УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ КВАЗІКОНФОРМНОЇ ЗАМІНИ ПАРАМЕТРА

Аушева Н. М., д.т.н.,
Гурін А. Л., аспірант *
Національний технічний університет України ”Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”

Робота висвітлює спосіб побудови поверхонь на основі ізотропних кривих та квазіконформної заміни параметра. Розраховано коефіцієнти основних квадратичних форм та доведено, що поверхні будуть мінімальними. Наведено приклади поверхонь, що було побудовано.

Ключові слова: ізотропна крива, мінімальна поверхня, коефіцієнти основних квадратичних форм поверхні.

Постановка проблеми. Професор Вейєрштрассе запропонував будувати мінімальну поверхню за допомогою ізотропної кривої, яка будується на основі аналітичної функції [1]. В цьому випадку замість параметра t у рівняння ізотропної кривої підставлялась комплексна змінна $t = u + vi$. При виділенні дійсної частини одержувалось рівняння мінімальної поверхні. Доцільно дослідити поверхні, що одержуються при інших способах заміни параметра у рівнянні ізотропної кривої.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У дисертаційних дослідженнях [2] пропонується моделювати мінімальні та приєднані мінімальні поверхні за допомогою ізотропної кривої, рівняння якої визначається на основі плоскої параметричної кривої. Автором роботи [3] розглядається конструювання гвинтових мінімальних поверхонь та пропонуються способи знаходження ізотропних просторових кривих. Ряд робіт [4, 5] пропонує аналітичний опис мінімальних поверхонь, що побудовані на основі ізотропних кривих, які лежать на різних поверхнях та віднесені до ізометричних сіток. У статті [6] запропоновано метод побудови плоских ортогональних та ізотермічних координатних сіток на основі ізотропних кривих Без’є 3-го порядку. Автором роботи [7] досліджується спосіб побудови поверхонь та сіток на основі ізотропного параметричного многочлена Лагранжа.

Формулювання цілей статті. Побудувати поверхні на основі квазіконформної заміни параметра у рівнянні ізотропної кривої та

* Науковий керівник – д.т.н., професор Аушева Н.М.

розрахувати коефіцієнти основних квадратичних форм.

Основна частина. Для моделювання поверхні застосуємо метод Вейєрштрасса [1], тобто поверхню будемо будувати на основі напрямної ізотропної кривої, але замість конформної заміни параметра $t = u + vi$ будемо використовувати квазіконформну заміну: $t=ku+iv$ або $t=u+ikv$. Рівняння поверхні будемо одержувати на основі виділення дійсної або уявної частини від отриманого виразу:

$$x_{\mathrm{Re}}(u,v) = \mathrm{Re}(x(t)),\ y_{\mathrm{Re}}(u,v) = \mathrm{Re}(y(t)),\ z_{\mathrm{Re}}(u,v) = \mathrm{Re}(z(t));$$
$$x_{\mathrm{Im}}(u,v) = \mathrm{Im}(x(t)),\ y_{\mathrm{Im}}(u,v) = \mathrm{Im}(y(t)),\ z_{\mathrm{Im}}(u,v) = \mathrm{Im}(z(t)), \qquad (1)$$

де $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$ - просторова параметрична ізотропна крива.

Візьмемо в якості напрямної кривої - криву Без'є у вигляді:

$$\mathbf{r(t)} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{r_j} J_{n,j}(t),\ \text{де}\ J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{r_j} = \lfloor x_j \quad y_j \rfloor$.

Розглянемо частковий випадок, а саме підставимо у рівняння (2) $n = 3$, тобто в якості напрямної будемо застосовувати кубічну ізотропну криву Без'є. Виконаємо заміну $t=u+ikv$ та відокремимо дійсну частину, одержимо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{\mathrm{Re}}(u,v) = \mathbf{r}_{0\mathrm{Re}}(1 - 3u + 3u^2 - 3v^2k^2 - u^3 + 3uv^2k^2) - \mathbf{r}_{0\mathrm{Im}}(-3vk + 6uvk - \\
&- 3u^2vk + v^3k^3) - (-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(1 - 2u + u^2 - v^2k^2) + 3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(-2vk + 2uvk))u + \\
&+ (-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(1 - 2u + u^2 - v^2k^2) - 3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(-2vk + 2uvk))vk - (-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}(1-u) - \\
&- 3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}vk)(u^2 - v^2k^2) + 2(-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}(1-u) + 3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}vk)uvk + \mathbf{r}_{3\mathrm{Re}}(u^3 - \\
&- 3uv^2k^2) - \mathbf{r}_{3\mathrm{Im}}(3u^2vk - v^3k^3).
\end{aligned} \qquad (3)$$

При заміні $t=ku+iv$ будемо мати:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{\mathrm{Re}}(u,v) = \mathbf{r}_{0\mathrm{Re}}(1 - 3uk + 3u^2k^2 - 3v^2 - u^3k^3 + 3uv^2k) - \mathbf{r}_{0\mathrm{Im}}(-3v + 6uvk - \\
&- 3u^2vk^2 + v^3) - (-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(1 - 2uk + u^2k^2 - v^2) + 3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(-2v + 2uvk))uk + \\
&+ (-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(1 - 2uk + u^2k^2 - v^2) - 3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(-2v + 2uvk))v - (-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}(1-uk) - \\
&- 3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}v)(u^2k^2 - v^2) + 2(-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}(1-uk) + 3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}v)uvk + \mathbf{r}_{3\mathrm{Re}}(u^3k^3 - \\
&- 3uv^2k) - \mathbf{r}_{3\mathrm{Im}}(3u^2vk^2 - v^3).
\end{aligned} \qquad (4)$$

Нехай напрямна ізотропна крива Без'є створюється на основі аналітичної функції:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0}(1-t)^3 + 3\mathbf{r_1}(1-t)^2t + 3\mathbf{r_2}(1-t)t^2 + \mathbf{r_3}t^3, \qquad (5)$$

де $\mathbf{r_0}\left[(a_0 - a_2)i \quad a_0 + a_2 \quad -a_1 i\right]$,

$\mathbf{r_1}\left[(a_0 - a_2 - a_3)i \quad a_0 + a_2 + a_3 \quad -a_1 i\right]$,

$\mathbf{r_2}\left[(a_0 - a_2 - 2a_3)i \quad a_0 + a_2 + 2a_3 \quad (a_3 - a_1)i\right]$,

$\mathbf{r_3}\left[(a_0 - a_2 - 2a_3)i \quad a_0 + a_2 + 4a_3 \quad (3a_3 - a_1)i\right]$.

Підставимо значення реперних точок (5) у рівняння (3) та (4). Розрахуємо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм.

Для $t=u+ikv$ коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$
\begin{aligned}
&E = 9a_{3\mathrm{Re}}^2[2u^2v^2k^2 + v^4k^4 + 2v^2k^2 + 1 + 2u^2 + u^4] + 9a_{3\mathrm{Im}}^2[v^4k^4 + \\
&+ 2v^2k^2 + 2v^2k^2u^2 + 1 + 2u^2 + u^4], \\
&G = 9a_{3\mathrm{Re}}^2[u^4k^2 + 2u^2v^2k^4 + 2u^2k^2 + v^4k^6 + 2v^2k^4 + k^2] + \\
&+ 9a_{3\mathrm{Im}}^2[2u^2v^2k^4 + v^4k^6 + 2v^2k^4 + u^4k^2 + 2u^2k^2 + k^2], \\
&F = 0.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Аналіз виразів (6) показує, що $E \neq G \Rightarrow k^2E = G$. Розрахуємо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$
\begin{aligned}
&L = \frac{6a_{3\mathrm{Im}}k(a_{3\mathrm{Re}}^2[2u^2v^2k^2 + v^4k^4 + 2v^2k^2 + 1 + 2u^2 + u^4]}{\sqrt{(a_{3\mathrm{Im}}^2 + a_{3\mathrm{Re}}^2)^2(v^2k^2 + 1 + u^2)^4k^2}} + \\
&+ \frac{a_{3\mathrm{Im}}^2[v^4k^4 + 2v^2k^2 + 2v^2k^2u^2 + 1 + 2u^2 + u^4])}{\sqrt{(a_{3\mathrm{Im}}^2 + a_{3\mathrm{Re}}^2)^2(v^2k^2 + 1 + u^2)^4k^2}}, \\
&M = \frac{6a_{3\mathrm{Re}}k^2(a_{3\mathrm{Re}}^2[2u^2v^2k^2 + v^4k^4 + 2v^2k^2 + 1 + 2u^2 + u^4]}{\sqrt{(a_{3\mathrm{Im}}^2 + a_{3\mathrm{Re}}^2)^2(v^2k^2 + 1 + u^2)^4k^2}} + \\
&+ \frac{a_{3\mathrm{Im}}^2[v^4k^4 + 2v^2k^2 + 2v^2k^2u^2 + 1 + 2u^2 + u^4])}{\sqrt{(a_{3\mathrm{Im}}^2 + a_{3\mathrm{Re}}^2)^2(v^2k^2 + 1 + u^2)^4k^2}}, \\
&N = -\frac{6a_{3\mathrm{Im}}k^3(a_{3\mathrm{Re}}^2[2u^2v^2k^2 + v^4k^4 + 2v^2k^2 + 1 + 2u^2 + u^4]}{\sqrt{(a_{3\mathrm{Im}}^2 + a_{3\mathrm{Re}}^2)^2(v^2k^2 + 1 + u^2)^4k^2}} + \\
&+ \frac{a_{3\mathrm{Im}}^2[v^4k^4 + 2v^2k^2 + 2v^2k^2u^2 + 1 + 2u^2 + u^4])}{\sqrt{(a_{3\mathrm{Im}}^2 + a_{3\mathrm{Re}}^2)^2(v^2k^2 + 1 + u^2)^4k^2}}.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Аналізуючи вирази (7), одержуємо наступні співвідношення: $k^2L = -N$, $M = \dfrac{a_{3\mathrm{Re}}Lk}{a_{3\mathrm{Im}}}$. Знайдемо середню кривину поверхні. Для цього проаналізуємо вираз чисельника:

$$
LG = -\frac{N}{k^2}Ek^2 = -NE, \quad MF = M \cdot 0 = 0. \qquad (8)
$$

На основі виразу (8) будемо мати *H=0*, тобто поверхня буде мінімальною.

Якщо провести аналогічні дослідження з квазіконформною заміною *t=ku+iv*, то одержимо нульове значення середньої кривини, тобто поверхня буде мінімальною.

Наведемо декілька прикладів поверхонь із квазіконформною заміною на основі різного завдання напрямної кривої. На рис.1 відображено дві поверхні з різним коефіцієнтом k для заміни $t=u+ikv$: $k=-1.5$ та $k=0.5$. На рис. 2 відображено мінімальну поверхню з коефіцієнтом $k=4$, побудовану на основі дробово-раціональної ізотропної кривої.

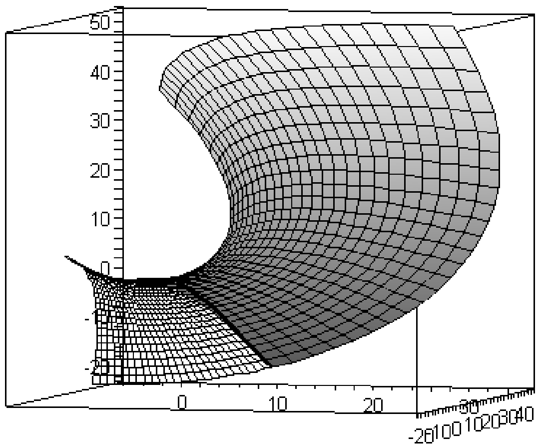

Рис.1. Мінімальні поверхні на основі аналітичної функції та квазіконформної заміни

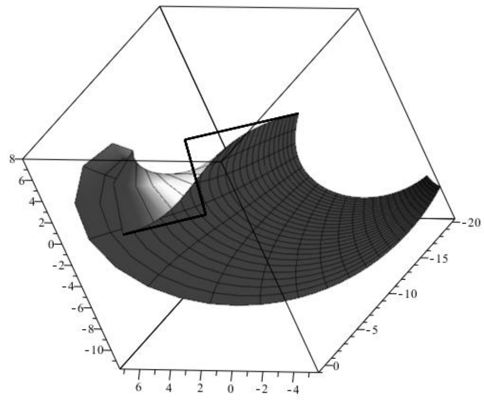

Рис.2. Мінімальна поверхня на основі дробово-раціональної кривої та квазіконформної заміни

Висновки. В результаті виконаних досліджень було запропоновано будувати поверхню на основі квазіконформної заміни параметра у рівнянні ізотропної кривої. За допомогою коефіцієнтів основних квадратичних форм було доведено, що поверхня буде мінімальною. Подальші дослідження пов’язані з застосуванням параметрів у вигляді функцій комплексного змінного.

Література

1. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна [Текст]/ В. Бляшке. – Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. – 330 с.
2. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм [Текст]: автореф. дис… канд. техн. наук: 05.01.01 / Е.О. Чернишова. – К.: КНУБА, 2007.– 20 с.
3. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції [Текст]: автореф. дис… канд. техн. наук: 05.01.01 / І.О. Коровіна. – К.: КНУБА, 2012. – 19 с.
4. Пилипака С. Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми

моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип.6. – С. 91–95.
5. Пилипака С. Ф. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні цикліди Дюпена [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип.8.– С. 115–121.
6. Аушева Н. М. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих [Текст] / Н.М. Аушева, А. А. Демчишин// Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”. – Вип.91. – К.:КНУБА, 2013р. – С.2–7.
7. Аушева Н. М. Конструювання поверхонь та ортогональних сіток на основі ізотропного параметричного многочлена Лагранжа / Н.М. Аушева // Містобудування та територіальне планування : науково-технічний збірник; відп. редактор М.М. Осєтрін. – Вип.59. – К.: КНУБА, 2016. – С.16–22.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КВАЗИКОНФОРМНОЙ ЗАМЕНЫ ПАРАМЕТРА

Аушева Н.Н., Гурин А.Л.

В работе рассматривается способ построения поверхностей на основе изотропных кривых и квазиконформной замены параметра. Рассчитаны коэффициенты основных квадратичных форм и доказано, что поверхности будут минимальными. Приведены примеры смоделированных поверхностей.

Ключевые слова: изотропная кривая, минимальная поверхность, коэффициенты основных квадратичных форм поверхности.

MODELING OF SURFACES BASED ON QUASICONFORMAL PARAMETER CHANGE

Ausheva N., Gurin A.

The paper elucidates the method of construction of surfaces based on isotropic curves and quasiconformal parameter change. Coefficients of basic quadratic forms were calculated and the surfaces were proved minimal. Some examples of the surfaces having been constructed are submitted.

Key words: isotropic curve, minimal surface, coefficients of basic quadratic forms of the surface.