УДК 514.18

MODELING OF SURFACES BASED ON QUASICONFORMAL PARAMETER CHANGE

Ausheva N., Gurin A.

The paper elucidates the method of construction of surfaces based on isotropic curves and quasiconformal parameter change. Coefficients of basic quadratic forms were calculated and the surfaces were proved minimal. Some examples of the surfaces having been constructed are submitted.

Key words: isotropic curve, minimal surface, coefficients of basic quadratic forms of the surface.

Formulation of the problem. Professor Weierstrass proposed to construct a minimal surface using an isotropic curve, which is based on the analytic function [1]. In this case, instead of the parameter t, the complex variable was substituted for the isotropic curve $t = u + vi$. When selecting the real part, an equation of minimal surface was obtained. It is advisable to investigate the surfaces obtained by other methods of replacing the parameter in the isotropic curve equation.

Analysis of recent research and publications. In the dissertation studies [2] it is proposed to model minimal and attached minimal surfaces by means of an isotropic curve whose equation is determined on the basis of a plane parametric curve. The author of the paper [3] considers the construction of screw minimal surfaces and proposes ways of finding isotropic spatial curves. A number of papers [4, 5] offers an analytical description of the minimal surfaces constructed on the basis of isotropic curves lying on different surfaces and referred to isometric grids. In the paper [6] a method for constructing planar orthogonal and isothermal coordinate grids is proposed on the basis of isotropic Bezier curves of the third order. The author of the paper [7] explores the method of constructing surfaces and grids based on an isotropic parametric Lagrange polynomial.

Formulating the goals of the article. Construct surfaces based on the quasiconformal replacement of the parameter in the equation of the isotropic curve and calculate the coefficients of the basic quadratic forms.

Main part. To model the surface, we apply the Weierstrass method [1], that is, we will construct the surface based on the guide of the isotropic curve, but instead of the conformal replacement of the parameter $t = u + vi$ we will use a quasi-conformal replacement: $t=ku+iv$ or $t=u+ikv$. The surface equation will be obtained based on the selection of a real or imaginary part of the expression obtained:

$$x_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(x(t)),\ y_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(y(t)),\ z_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(z(t));$$
$$x_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(x(t)),\ y_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(y(t)),\ z_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(z(t)), \quad (1)$$

where $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ - spatial parametric isotropic curve.

Take as a guide curve - the Bezier curve in the form of:

$$\mathbf{r(t)}=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{r_j}J_{n,j}(t),\ \text{де}\ J_{n,j}(t)=\frac{n!}{j!(n-j)!}t^j(1-t)^{n-j}, \quad (2)$$

where $\mathbf{r_j}=\lfloor x_j \quad y_j\rfloor$.

Let us consider a partial case, namely, we substitute the equation (2) $n=3$, that is, as a guide we will apply the cubic isotropic Bezier curve. Perform a replacement $t=u+ikv$ and we separate the real part, we get:

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathbf{r}_{0\mathrm{Re}}(1-3u+3u^2-3v^2k^2-u^3+3uv^2k^2)-\mathbf{r}_{0\mathrm{Im}}(-3vk+6uvk-\\&-3u^2vk+v^3k^3)-(-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(1-2u+u^2-v^2k^2)+3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(-2vk+2uvk))u+\\&+(-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(1-2u+u^2-v^2k^2)-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(-2vk+2uvk))vk-(-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}(1-u)-\\&-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}vk)(u^2-v^2k^2)+2(-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}(1-u)+3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}vk)uvk+\mathbf{r}_{3\mathrm{Re}}(u^3-\\&-3uv^2k^2)-\mathbf{r}_{3\mathrm{Im}}(3u^2vk-v^3k^3).\end{aligned} \quad (3)$$

When we replace $t = ku + iv$ we will have:

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathbf{r}_{0\mathrm{Re}}(1-3uk+3u^2k^2-3v^2-u^3k^3+3uv^2k)-\mathbf{r}_{0\mathrm{Im}}(-3v+6uvk-\\&-3u^2vk^2+v^3)-(-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(1-2uk+u^2k^2-v^2)+3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(-2v+2uvk))uk+\\&+(-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Im}}(1-2uk+u^2k^2-v^2)-3\mathbf{r}_{1\mathrm{Re}}(-2v+2uvk))v-(-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}(1-uk)-\\&-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}v)(u^2k^2-v^2)+2(-3\mathbf{r}_{2\mathrm{Im}}(1-uk)+3\mathbf{r}_{2\mathrm{Re}}v)uvk+\mathbf{r}_{3\mathrm{Re}}(u^3k^3-\\&-3uv^2k)-\mathbf{r}_{3\mathrm{Im}}(3u^2vk^2-v^3).\end{aligned} \quad (4)$$

Let the directionless isotropic Bezier curve is created based on the analytic function:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r_0}(1-t)^3+3\mathbf{r_1}(1-t)^2t+3\mathbf{r_2}(1-t)t^2+\mathbf{r_3}t^3, \quad (5)$$

where $\mathbf{r_0}[(a_0-a_2)i \quad a_0+a_2 \quad -a_1 i]$,

$\mathbf{r_1}[(a_0-a_2-a_3)i \quad a_0+a_2+a_3 \quad -a_1 i]$,

$\mathbf{r_2}[(a_0-a_2-2a_3)i \quad a_0+a_2+2a_3 \quad (a_3-a_1)i]$,

$\mathbf{r_3}[(a_0-a_2-2a_3)i \quad a_0+a_2+4a_3 \quad (3a_3-a_1)i]$.

Let's substitute the values of the reference points (5) in equations (3) and (4). Calculate the coefficients of the first and second quadratic forms.

For $t = u + ikv$, the coefficients of the first quadratic form:

$$\begin{aligned}&E=9a_{3\mathrm{Re}}^2[2u^2v^2k^2+v^4k^4+2v^2k^2+1+2u^2+u^4]+9a_{3\mathrm{Im}}^2[v^4k^4+\\&+2v^2k^2+2v^2k^2u^2+1+2u^2+u^4],\\&G=9a_{3\mathrm{Re}}^2[u^4k^2+2u^2v^2k^4+2u^2k^2+v^4k^6+2v^2k^4+k^2]+\\&+9a_{3\mathrm{Im}}^2[2u^2v^2k^4+v^4k^6+2v^2k^4+u^4k^2+2u^2k^2+k^2],\end{aligned} \quad (6)$$

$F = 0.$

The analysis of expressions (6) shows that $E \neq G \Rightarrow \; k^2 E = G$. Calculate the coefficients of the second quadratic form:

$$L = \frac{6a_{3\,\mathrm{Im}} k (a_{3\,\mathrm{Re}}^2 [2u^2 v^2 k^2 + v^4 k^4 + 2v^2 k^2 + 1 + 2u^2 + u^4]}{\sqrt{(a_{3\,\mathrm{Im}}^2 + a_{3\,\mathrm{Re}}^2)^2 (v^2 k^2 + 1 + u^2)^4 k^2}} +$$
$$+ \frac{a_{3\,\mathrm{Im}}^2 [v^4 k^4 + 2v^2 k^2 + 2v^2 k^2 u^2 + 1 + 2u^2 + u^4])}{\sqrt{(a_{3\,\mathrm{Im}}^2 + a_{3\,\mathrm{Re}}^2)^2 (v^2 k^2 + 1 + u^2)^4 k^2}},$$
$$M = \frac{6a_{3\,\mathrm{Re}} k^2 (a_{3\,\mathrm{Re}}^2 [2u^2 v^2 k^2 + v^4 k^4 + 2v^2 k^2 + 1 + 2u^2 + u^4]}{\sqrt{(a_{3\,\mathrm{Im}}^2 + a_{3\,\mathrm{Re}}^2)^2 (v^2 k^2 + 1 + u^2)^4 k^2}} + \qquad (7)$$
$$+ \frac{a_{3\,\mathrm{Im}}^2 [v^4 k^4 + 2v^2 k^2 + 2v^2 k^2 u^2 + 1 + 2u^2 + u^4])}{\sqrt{(a_{3\,\mathrm{Im}}^2 + a_{3\,\mathrm{Re}}^2)^2 (v^2 k^2 + 1 + u^2)^4 k^2}},$$
$$N = -\frac{6a_{3\,\mathrm{Im}} k^3 (a_{3\,\mathrm{Re}}^2 [2u^2 v^2 k^2 + v^4 k^4 + 2v^2 k^2 + 1 + 2u^2 + u^4]}{\sqrt{(a_{3\,\mathrm{Im}}^2 + a_{3\,\mathrm{Re}}^2)^2 (v^2 k^2 + 1 + u^2)^4 k^2}} +$$
$$+ \frac{a_{3\,\mathrm{Im}}^2 [v^4 k^4 + 2v^2 k^2 + 2v^2 k^2 u^2 + 1 + 2u^2 + u^4])}{\sqrt{(a_{3\,\mathrm{Im}}^2 + a_{3\,\mathrm{Re}}^2)^2 (v^2 k^2 + 1 + u^2)^4 k^2}}.$$

Analyzing expressions (7), we obtain the following relations: $k^2 L = -N$, $M = \dfrac{a_{3\,\mathrm{Re}} L k}{a_{3\,\mathrm{Im}}}$. Find the average curvature of the surface. To do this, we will analyze the expression of the numerator:

$$LG = -\frac{N}{k^2} E k^2 = -NE\,, \quad MF = M \cdot 0 = 0\,. \qquad (8)$$

On the basis of expression (8) we will have *H = 0*, that is, the surface will be minimal.

If we carry out similar studies with a quasiconformal substitution *t = ku + iv*, then we obtain a zero value of the mean curvature, that is, the surface will be minimal.

Here are some examples of surfaces with a quasiconformal substitution based on different curve directional problems. Fig. 1 shows two surfaces with different coefficients *k* for replacing *t = u + ikv: k = -1.5* and *k = 0.5*. In fig. 2, a minimal surface with a coefficient *k = 4* is constructed based on the fractionally rational isotropic curve.

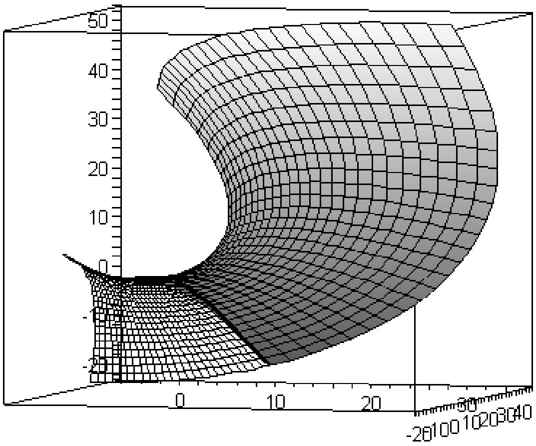

Fig.1 Minimal surfaces based on analytic function and quasi-conformal replacement

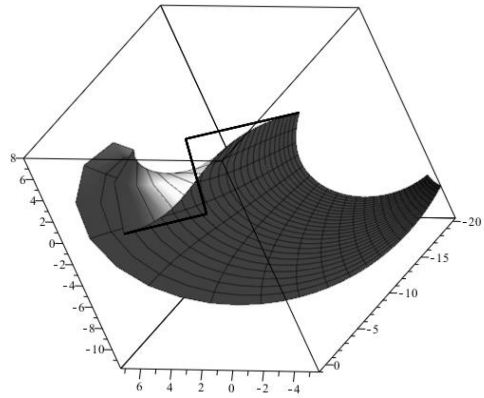

Fig.2 Minimum surface based on a fractional-rational curve and a quasi-conformal replacement

Conclusions. As a result of the performed research, it was proposed to construct a surface based on the quasiconformal replacement of the parameter in the isotropic curve equation. Using the coefficients of the basic quadratic forms, it was proved that the surface would be minimal. Subsequent studies are related to the application of parameters in the form of functions of a complex variable.

Literature

1. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна [Текст]/ В. Бляшке. – Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. – 330 с.
2. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм [Текст]: автореф. дис… канд. техн. наук: 05.01.01 / Е.О. Чернишова. – К.: КНУБА, 2007.– 20 с.
3. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції [Текст]: автореф. дис… канд. техн. наук: 05.01.01 / І.О. Коровіна. – К.: КНУБА, 2012. – 19 с.
4. Пилипака С. Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип.6. – С. 91–95.
5. Пилипака С. Ф. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні цикліди Дюпена [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ

ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип.8.– С. 115–121.
6. Аушева Н. М. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих [Текст] / Н.М. Аушева, А. А. Демчишин// Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”. – Вип.91. – К.:КНУБА, 2013р. – С.2–7.
7. Аушева Н. М. Конструювання поверхонь та ортогональних сіток на основі ізотропного параметричного многочлена Лагранжа / Н.М. Аушева // Містобудування та територіальне планування : науково-технічний збірник; відп. редактор М.М. Осєтрін. – Вип.59. – К.: КНУБА, 2016. – С.16–22.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КВАЗИКОНФОРМНОЙ ЗАМЕНЫ ПАРАМЕТРА

Аушева Н.Н., Гурин А.Л.

В работе рассматривается способ построения поверхностей на основе изотропных кривых и квазиконформной замены параметра. Рассчитаны коэффициенты основных квадратичных форм и доказано, что поверхности будут минимальными. Приведены примеры смоделированных поверхностей.

Ключевые слова: изотропная кривая, минимальная поверхность, коэффициенты основных квадратичных форм поверхности.

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ КВАЗІКОНФОРМНОЇ ЗАМІНИ ПАРАМЕТРА

Аушева Н. М., Гурін А. Л.

Робота висвітлює спосіб побудови поверхонь на основі ізотропних кривих та квазіконформної заміни параметра. Розраховано коефіцієнти основних квадратичних форм та доведено, що поверхні будуть мінімальними. Наведено приклади поверхонь, що було побудовано.

Ключові слова: ізотропна крива, мінімальна поверхня, коефіцієнти основних квадратичних форм поверхні.