УДК 515.2:519.85

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УМОВ НЕПЕРЕТИНАННЯ ЕЛІПСІВ

Комяк В.М., д.т.н.,
Соболь О.М., д.т.н.,
Данилин О.М., ад’юнкт*
Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)

У роботі розглядаються способи геометричного моделювання умов неперетинання двох еліпсів.

Ключевые слова: еліпс, геометричне моделювання, умови неперетинання.

Постановка проблеми. Задачі упаковки та розкрою (Cutting&Packing), зокрема задачі оптимальної упаковки еліпсів, які називаються також задачами оптимального розміщення, є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх розв’язання – напрямком теорії дослідження операцій. Цей клас задач має широкий спектр наукових і практичних застосувань в порошковій металургії, гірничодобувній промисловості для моделювання руху сипучих речовин, аналізі структур рідин та скла, задачах логістики для моделювання оптимальних упаковок вантажів, що мають форму еліптичного циліндра, в задачах евакуації людей з будівель при моделюванні індивідуально-поточного руху людей, проекції яких апроксимуються еліпсами.

Широкий спектр наукових і практичних застосувань, деякі з яких викладені вище, потребує розробки ефективних алгоритмів, що засновані на застосуванні методів оптимізації розміщення великої кількості еліпсів. У зв’язку з цим, виникає необхідність у розробці ефективних, з точки зору складності, підходів до геометричного моделювання умов неперетинання еліпсів, які допускають неперервні трансляції, обертання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Як ефективний засіб геометричного моделювання відносин неперетинання пари еліпсів з урахуванням допустимих відстаней використовуються функції з класу phi-функцій, що запропоновані в роботах Стояна Ю.Г [1,2]. В роботах [3,4] для побудови умов неперетинання еліпсів використовується апроксимація еліпсів у вигляді об'єднання базових об'єктів [3] або апроксимація дугами кіл [4] . Огляд публікацій з цієї

---

* Науковий керівник – д.т.н.,професор Комяк В.М

тематики дає можливість зробити висновок про те, що тільки у роботі [5] викладається метод розв’язання задачі упаковки справжніх еліпсів (без апроксимацій), що припускають обертання, з використанням сучасних NLP solvers, доступних в GAMS. У цій статті наводиться досить повний огляд літератури, присвячений задачам упаковки еліпсів. В [5] отримано глобальнийрозв’язок для невеликоїкількості еліпсів, однак при *N*>14 авторам не вдалося отримати допустимого рішення. У зв'язку з цим, автори пропонують евристичний polylithic-алгоритм для розміщення більшої кількості еліпсів (до 100) в прямокутній області фіксованої ширини і змінної довжини. Задача оптимальної упаковки еліпсів, що допускають неперервні обертання, розглянута в [6]. Для аналітичного опису основних обмежень розміщення використовуються квазі-phi-функції [2]. Підхід, що викладений в роботах [6], дозволяє представити задачу оптимальної упаковки еліпсів з урахуванням допустимих відстаней у вигляді задачі нелінійного програмування і отримувати локально-оптимальні рішення при N< 120 (N – кількість об’єктів розміщення).
Тому виникла необхідність в розробці ефективних підходів до геометричного моделювання умов неперетинання еліпсів, які б дозволили розв’язувати практичні задачі більшої вимірності.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є розробка ефективних алгоритмів моделювання умов взаємодії між еліпсами (неперетинання, дотику, перетинання).

Основна частина. Розглянемо еліпси $E_i(u_{E_i})$ та $E_j(u_{E_j})$, які задані у власних системах координат. Нехай центри O_i, O_j (полюси) еліпсів $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$знаходяться у точках (x_{E_i}, y_{E_i}), (x_{E_j}, y_{E_j}), причому еліпси повернені на кути $\theta_{E_i}, \theta_{E_j}$ відповідно. Еліпси $E_i(u_{E_i})$ та $E_j(u_{E_j})$ задані великими піввісями a_{E_i}, a_{E_j} і малими піввісями b_{E_i}, b_{E_j} відповідно. Між еліпсами E_i та E_j можуть бути задані обмеження на мінімально допустимі відстані r_{ij}, а між еліпсом E_i та границею області Ω – обмеження на мінімально допустимі відстані r_i. Необхідно здійснити геометричне моделювання умов неперетинання еліпсів з вивченням їх властивостей для розробки ефективних алгоритмів їх моделювання розміщення.

Згідно з визначенням, phi-функцією для об'єктів $E_i(u_{E_i})$ та $E_j(u_{E_j})$ [1] називається неперервна всюди визначена функція $\Phi^{E_iE_j}(u_{E_i}, u_{E_j}): R^6 \to R^1$, для якої виконується наступна важлива властивість: якщо $\Phi^{E_iE_j}(u_{E_i}, u_{E_j}) \geq 0$, то $\operatorname{int} E_i(u_{E_i}) \bigcap \operatorname{int} E_j(u_{E_j}) = \varnothing$.

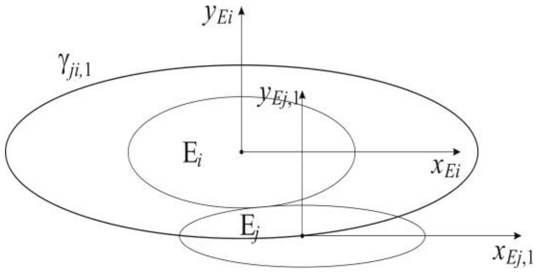
Розглянемо метод геометричного моделювання перерізів поверхні дотику двох орієнтованих та неорієнтованих еліпсів. Загальна структура зазначеного методу є такою.

Якщо центри еліпсів $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$ знаходяться у точках $(0{,}0)$, (x_{E_j}, y_{E_j}), еліпси є орієнтованими, тобто $\theta_{E_i} = const, \theta_{E_j} = const$ та $r_{ij} = 0$, то $\Phi^{E_i E_j}(u_{E_i}, u_{E_j})$ буде задана у просторі R^2 і являти собою переріз поверхні дотику двох неорієнтованих еліпсів $E_i(x_{E_i}, y_{E_i}, \theta_{E_i})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$.

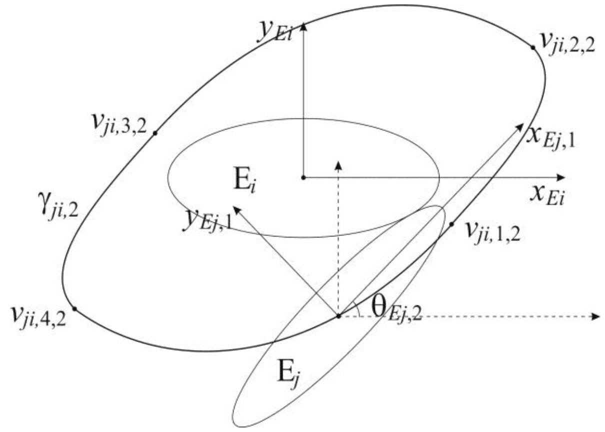
Розглянемо побудову перерізів поверхні дотику двох еліпсів: орієнтованого $E_i(0{,}0{,}0)$ та неорієнтованого $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$. Для цього параметри розміщення $E_i(0{,}0{,}0)$ фіксуються, а інший об’єкт залишається рухомим та здійснює трансляцію по границі еліпса $E_i(0{,}0{,}0)$ таким чином, що $O_j \in FrE_i(u_{E_i})$, де $FrE_i(u_{E_i})$ - границя $E_i(u_{E_i})$ (рис.1). Здійснюється завдання параметра дискретизації n_d кута повороту θ_{E_j} власної системи координат рухомого об’єкта. Значення параметра дискретизації визначає кількість перерізів поверхні дотику двох заданих еліпсів. Для кожного $\theta_{E_j,d+1} = d \cdot \dfrac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \ldots, n_d - 1, n_d > 0$, відбувається побудова перерізу поверхні дотику об’єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0{,}0{,}0)$, причому кожен переріз являє собою замкнений контур.

На рис. 1 наведено приклад побудови перерізів $\gamma_{ji,1}$ та $\gamma_{ji,2}$ поверхні дотику неорієнтованих об’єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0{,}0{,}0)$ для відповідних значень кутів повороту $\theta_{E_j,1} = 0$ і $\theta_{E_j,2} = \dfrac{\pi}{4}$ локальної системи координат рухомого об’єкта $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та нерухомого $E_i(0{,}0{,}0)$. Аналогічно здійснюється побудова інших перерізів для кутів повороту $\theta_{E_j,d+1} = d \cdot \dfrac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \ldots, n_d - 1$ локальної системи координат рухомого об’єкта.

Остаточно здійснюється формування множини перерізів $\gamma_{ji,d+1}$,



а)



б)

Рис. 1. Побудова перерізів поверхні дотику об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$

$d = 0, ..., n_d - 1$, поверхні дотику двох неорієнтованих еліпсів. Так, на рис. 2 наведено множину перерізів поверхні дотику об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$ при $n_d = 8$.

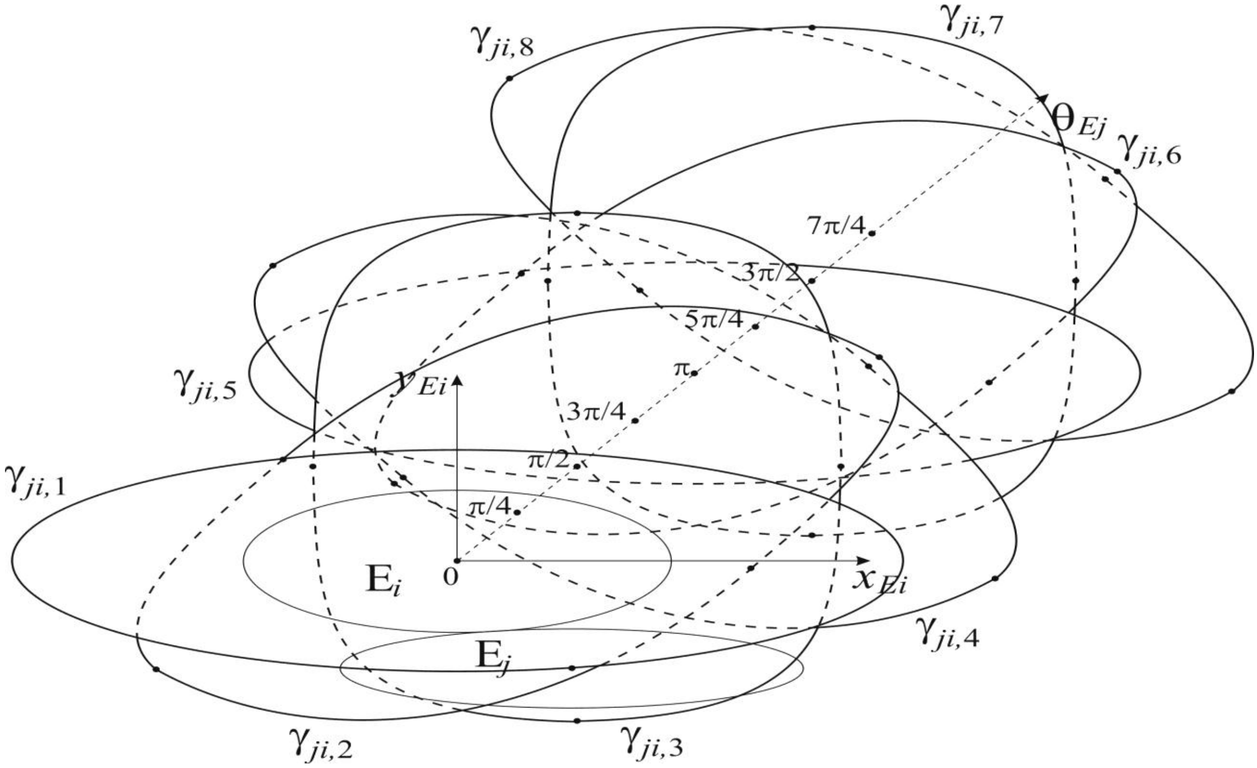


Рис. 2. Множина перерізів $\gamma_{ji,d+1}$, $d = 0, ..., n_d - 1$ поверхні дотику двох неорієнтованих еліпсів для $n_d = 8$

Дана множина перерізів являє собою геометричну інтерпретацію умов неперетинання неорієнтованих еліпсів, обертання яких здійснюється дискретно.

Розглянемо випадок, коли кути змінюються неперервно.

В роботі [7]доведено таке твердження.

Твердження 1. Якщо опуклі об'єкти (еліпси) не перетинаються, то існує така пряма $L_{ij}^{\perp}$, яка проходить через центр системи координат таким чином, що проекції об'єктів на дану пряму не перетинаються.

Нехай еліпси $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$ не мають спільних внутрішніх точок (рис. 3).

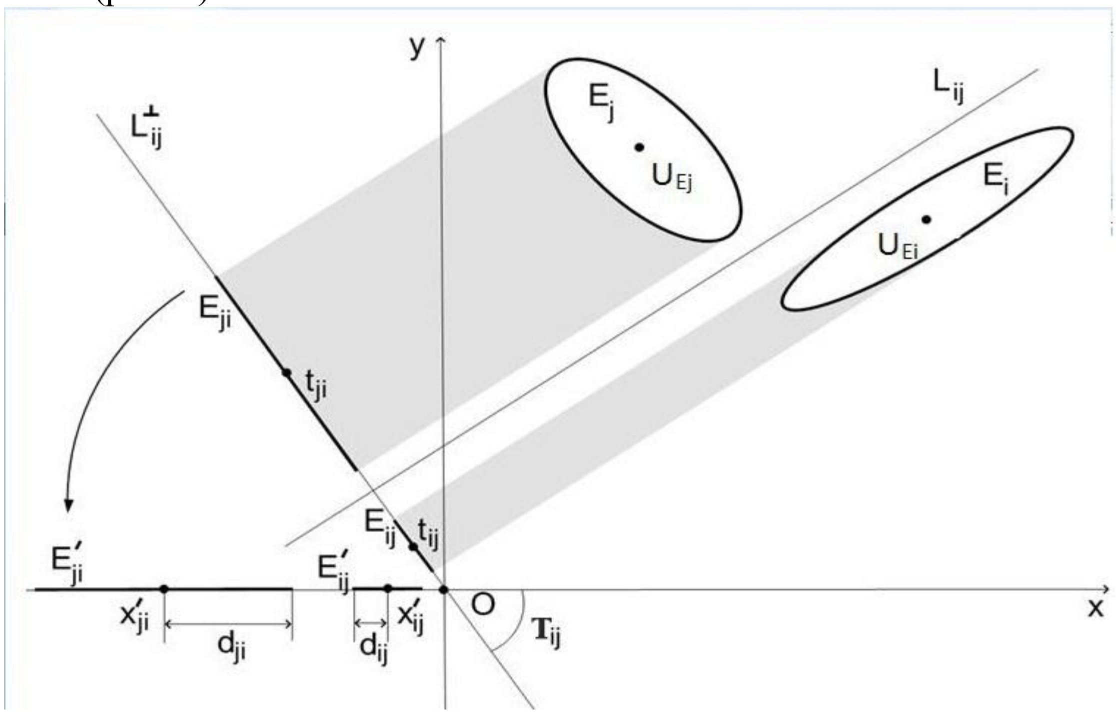


Рис. 3. Геометрична ілюстрація до побудови phi-функції $\Phi'^{E_iE_j}$

Нехай існує пряма L_{ij} (розділяюча пряма), що розбиває площину на дві півплощини таким чином, що об'єкти $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$ лежать в різних півплощинах. Отже, проекції множин $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$ на будь-яку пряму, перпендикулярну L_{ij}, не перетинаються (не мають спільних внутрішніх точок в R^1). Позначимо через $L_{ij}^{\perp}$ пряму, яка перпендикулярна L_{ij} і проходить через центр системи координат, T_{ij} – кут між прямою L_{ij} і віссю *Ox.*

Повернувши пряму $L_{ij}^{\perp}$ разом з проекціями еліпсів E_{ij} і E_{ji} (з центрами в точках t_{ij} і t_{ji} відповідно) навколо точки O на кут $(-T_{ij})$, отримаємо проекції еліпсів $E_{ij}^{'}$ і $E_{ji}^{'}$ з центрами в точках $x_{ij}^{'}$ і $x_{ji}^{'}$.

Таким чином, в результаті геометричного моделювання показано, що умова неперетинання еліпсів $E_i(x_{E_i}, y_{E_i}, \theta_{E_i})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ еквівалентна умові: $x'_{ij} - x'_{ji} \geq d_{ij} + d_{ji}$, а квази-phi-функція $\Phi'^{E_iE_j}$ може бути записана у вигляді:

$$\Phi'^{E_iE_j} = x'_{ij} - x'_{ji} - d_{ij} - d_{ji},$$

де $x'_{ij} = x_{ij}\cos T_{ij} - y_{ij}\sin T_{ij}$, $x'_{ji} = x_{ji}\cos T_{ij} - y_{ji}\sin T_{ij}, T_{ij}$ – кут між прямою $L_{ij}^{\perp}$, яка перпендикулярна розділяючій прямій L_{ij}, і віссю *Ox*, $d_{ij} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2)\cos^2(\theta_{E_i} - T_{ij})}, d_{ji} = \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2)\cos^2(\theta_{E_j} - T_{ij})}$.

Властивість 1. Точка на перерізі поверхні дотику об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$, який отримано шляхом трансляції полюса рухомого об'єкта по границі нерухомого при певному значенню кута повороту $\theta_{E_j,d}$, відповідає двом проекціям еліпсів на пряму (згідно твердження 1), які торкаються, коли $r_{ij}=0$, і знаходяться на відстані r_{ij} при наявності відстані між еліпсами.

Властивість 2. При зміні параметрів $(x_{E_i}, y_{E_i}, \theta_{E_i})$ та $(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ еліпсів $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$, змінюється як розташування пар відрізків на вісі *Ox*, так і їх розміри, причому $d_{ij} \in [b_{E_i}, a_{E_i}]$, а $d_{ji} \in [b_{E_j}, a_{E_j}]$.

Властивість 3. Множина точок перерізу поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$, який відповідає певному значенню кута повороту $\theta_{E_j,d}$ – це неперервна підмножина $M_{E_j,d}$, відповідних до твердження 1, пар відрізків на вісі *Ox*.

Властивість 4. Множина точок перерізів поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$, яка відповідає кутам повороту $\theta_{E_j,d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0,\ldots,n_d - 1$, локальної системи координат рухомого об'єкта – це дискретна множина підмножин $M_{E_j,d}, d = 0,\ldots,n_d - 1$.

Властивість 5. Множина точок поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ – це нескінчена множина пар відрізків на вісі *Ox*.

Висновки. Подальші дослідження будуть направлені на розробку ефективних алгоритмів геометричного моделювання неорієнтованих еліпсів у заданих областях на базі запропонованих способів побудови умов їх неперетинання.

Литература

1. Стоян Ю.Г. Полный класс Ф-функций для базових объектов / [Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов, А.В. Панкратов] // Доп. НАН України. – 2010. – № 12. – С. 25 – 30.
2. Стоян Ю.Г. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов / [Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов] // Доп. НАН України. – 2014. – Т 9. – С. 49 – 54.
3. Суббота И.А. Задача оптимальной упаковки эллипсов: математические модели и методы решения: дис. … канд. техн. наук: 01.05.02. Математичне моделювання та обчислювальні методи / И.А. Суббота. – Харьков, 2014. – 120 с.
4. Панкратов А.В. Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей / А.В. Панкратов // Радиоэлектроника и информатика. 2015. – 2(69). С. 6 – 9.
5. Kallrath J. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles [Text] / J. Kallrath, S. Rebennack // JournalofGlobalOptimization. – 2013. – Vol. 59 (2-3). – P. 405 – 437. doi:10.1007/s10898-013-0125-3.
6. Панкратов А. В. / Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимих расстояний [Текст] / А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, И. А. Суббота // Журнал обчислювальної математики. – 2014. – Т.1 – С. 27 – 42.
7. Данилин А.Н. Упаковка эллипсов в прямоугольник минимальных размеров / [А.Н. Данилин, В.В. Комяк, В.М.Комяк, А.В.Панкратов] // УСиМ. – К.,2016. –№5. – С.5 – 9.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ НЕПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПСОВ

Комяк В.М., Соболь А.Н., Данилин А.Н.

В статье рассматриваются способы геометрического моделирования условий непересечения двух эллипсов.

Ключевые слова: эллипс, геометрическое моделирование, условия непересечения.

GEOMETRIC MODELING OF THE CONDITIONS OF NONINTERSECTION OF ELIPS

Komyak V., Sobol A., Danilin A.

The paper considers approaches to geometric modeling of nonintersection conditions of two ellipses.

Keywords: ellipse, geometric modeling, conditions of nonintersection