

УДК 515.2

КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ПУАНСО ОБЕРТАННЯ ОБ'ЄКТА З НЕРУХОМОЮ ТОЧКОЮ

Куценко Л.М., д.т.н.

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків),

Запольський Л.Л., к.т.н.

*Український науково-дослідний інститут цивільного захисту (м. Київ,
Україна)*

Наведено комп'ютерну графічну модель інтерпретації Пуансо обертання твердого тіла з нерухомою точкою для дослідження стійкості його руху. Для цього змодельоване кочення без ковзання еліпсоїда інерції цього тіла по одній зі своїх дотичних площин, в результаті чого побудовані відповідні лінії кочення - герполодія на дотичній площині і полодія на поверхні еліпсоїда.

Ключові слова: інтерпретація Пуансо, момент інерції, еліпсоїд інерції, кочення еліпсоїда, полодія, герполодія

Постановка проблеми. Дослідження обертання за інерцією об'єкту з нерухомою точкою (задача Ейлера) пов'язані з визначенням стійкості обертання твердого тіла навколо головних осей еліпсоїда інерції [1, 2]. Розгляд геометричної картини Пуансо дозволяє зробити висновок про стійкість зазначеного обертання. Сутність геометричної інтерпретація Пуансо полягає в тому, що для дослідження стійкості обертання тіла, слід розглянути рух його еліпсоїда інерції, який має котитися без ковзання по одній зі своїх дотичних площин (площині Пуансо π). Тоді стійкість руху твердого тіла визначається формою лінії кочення еліпсоїда, яка утворюється на дотичній площині π і має назву герполодії, а також формою і особливо розташуванням її відповідної лінії на поверхні еліпсоїда (полодії). Звідси слідує важлива роль комп'ютерних графічних технологій, які дозволять унаочнити геометричну картину Пуансо, і тим самим сприятимуть розв'язанню на якісному рівні зазначеного кола задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Класичний опис та визначення геометричної форми полодій зводиться до застосування еліптичних інтегралів і не просто формалізується при складанні комп'ютерних алгоритмів. У роботах [1,2] наведено детальний аналіз стійкості обертань твердого тіла залежно від форми полодій на еліпсоїді інерції. Але зазначені результати базуються виключно на формулах та ілюструються рисунками. Для інженерних досліджень набагато зручніше було б описані в літературі властивості сприймати

за допомогою динамічних зображень, створених засобами графічних комп'ютерних анімацій. У роботі [3] наведено програму моделювання геометричної картини Пуансо, складеної мовою пакету МАТНЕМАТІСА. Реалізацію її для користувача наведено у роботі [4]. У роботі [5] наведено аналогічну програму для середовища MatLab. Але у зазначених програм обмеженням є використання залежностей, одержаних у аналітичному вигляді. Для багатьох аналогічних програмних продуктів (наприклад, [6]), тексти програм закриті за інтерфейсами. Теж стосується і результатів, які викладені на youtube (наприклад, [7]).

Формулювання цілей статті. Скласти мовою Maple програму комп'ютерного моделювання обертання твердого тіла, яка б базувалася на геометричній інтерпретації Пуансо. Для досягнення цієї мети необхідно описати та побудувати: а) нерухому дотичну площину Пуансо; б) герполоїду на площині Пуансо; в) полоїду на поверхні еліпсоїда інерції; г) процес кочення еліпсоїда інерції по площині Пуансо; д) приклади кочення еліпсоїда інерції твердого тіла.

Основна частина. Позначимо через I_1, I_2 і I_3 , – моменти інерції тіла відносно нерухомих осей глобальної системи координат x, y і z , а через w_1, w_2 і w_3 – проекції вектора миттєвої кутової швидкості тіла на ці осі. Відомо [1, 2], що характер полоїдів і герполоїдів істотно залежить від величин моментів інерції I_1, I_2 і I_3 , а також від інтегралів:

$$I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2 = K^2 = const ; \quad (1)$$

$$I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2 = 2T = const , \quad (2)$$

де K – кінетичний момент, а T – кінетична енергія тіла обертання.

Нехай площина Пуансо π дотикається еліпсоїда інерції у точці P , вона перпендикулярна незмінному вектору кінетичного моменту K і відстоїть від центра еліпсоїда на постійній відстані $d = \sqrt{2T} / K$.

Нерухома площина Пуансо π , на якій зображується герполоїда у просторі системи координат $Oxyz$, описується рівнянням:

$$z = K(d - x(w_{10}I_1)/K - yx(w_{20}I_2)/K)/(w_{30}I_3). \quad (3)$$

Тут через w_{10}, w_{20} , і w_{30} позначено початкові значення кутових швидкостей обертання еліпсоїда навколо відповідних осей координат.

Далі наведемо систему шести диференціальних рівнянь, які пов'язують проекції вектора $w_1(t), w_2(t)$ і $w_3(t)$ миттєвої кутової швидкості тіла на осі x, y і z , а також кути Ейлера $u(t), v(t)$ і $w(t)$, які миттєва вісь обертання утворює з цими осями координат [1,2].

$$I_1 \frac{dw_1}{dt} = (I_2 - I_3)w_2w_3; \quad I_2 \frac{dw_2}{dt} = (I_3 - I_1)w_1w_3; \quad I_3 \frac{dw_3}{dt} = (I_1 - I_2)w_1w_2; \quad (4)$$

$$\frac{du}{dt} \sin w \sin v + \frac{dw}{dt} \cos v = w_1; \quad \frac{du}{dt} \sin w \cos v - \frac{dw}{dt} \sin v = w_2; \quad \frac{du}{dt} \cos w + \frac{dv}{dt} = w_3.$$

Розв'язання системи рівнянь (4) проводиться наближено методом Рунге-Кутти з початковими умовами $w_1(0)=w_{10}$, $w_2(0)=w_{20}$, $w_3(0)=w_{30}$, $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$ і $w(0)=w_0$.

Наведемо приклади виконання складеної програми. При цьому будуть враховані значення моментів інерції тіла I_1 , I_2 і I_3 відносно нерухомих осей системи координат x , y і z , для сталих початкових умов швидкостей обертання навколо відповідних осей еліпсоїда інерції $w_{10}=1$; $w_{20}=2$; $w_{30}=1$, а також сталих початкових значень кутів обертання $u(0)=0.01$; $v(0)=0.01$; $w(0)=0.01$. Для ілюстрації результатів обрано кадри комп'ютерної анімації кочення еліпсоїда.

Приклад 1. $I_1=2$; $I_2=12$; $I_3=15$. Рівняння дотичної площини $z=0,54 - 0,13x - 1,65y$. На рис. 1 наведено три фази кочення еліпсоїда по дотичній площині.

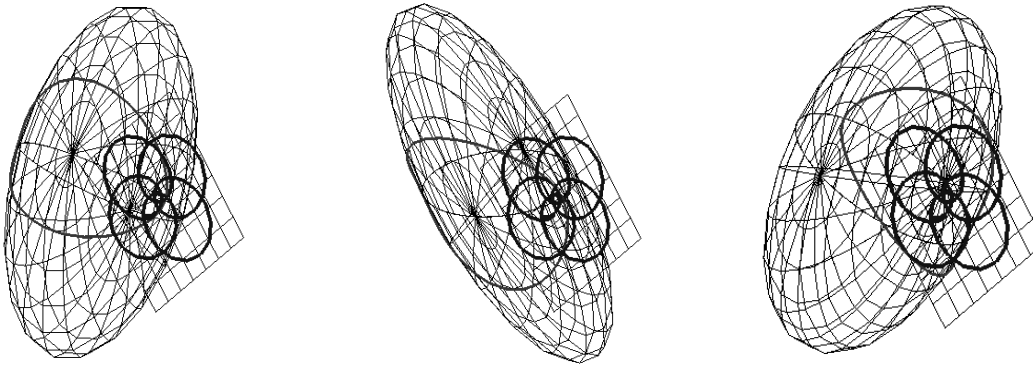


Рис. 1. Фази кочення еліпсоїда по дотичній площині для прикладу 1

Приклад 2. $I_1=8,2$; $I_2=5$; $I_3=13$. Рівняння дотичної площини $z=0,49-0,63x-0,77y$. На рис. 2 наведено три фази кочення еліпсоїда.

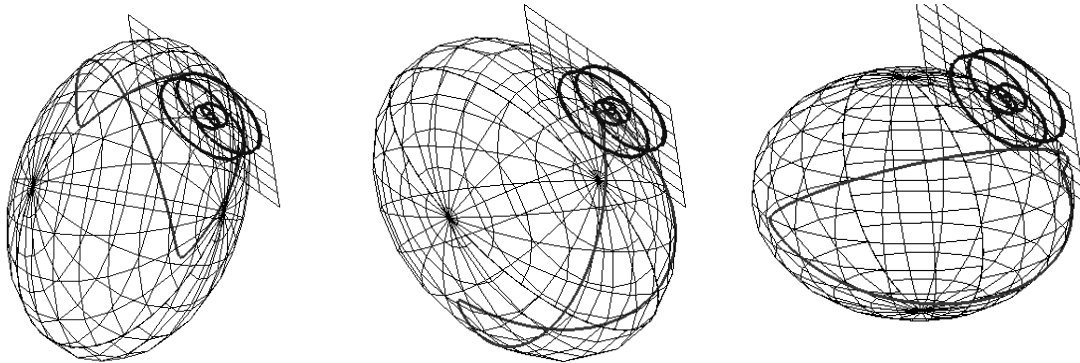


Рис. 2. Фази кочення еліпсоїда по дотичній площині для прикладу 2

Приклад 3. $I_1=15$; $I_2=11$; $I_3=3$. Рівняння дотичної площини $z=2,62 - 5x - 7,72y$. На рис. 3 наведено фази кочення еліпсоїда по площині.

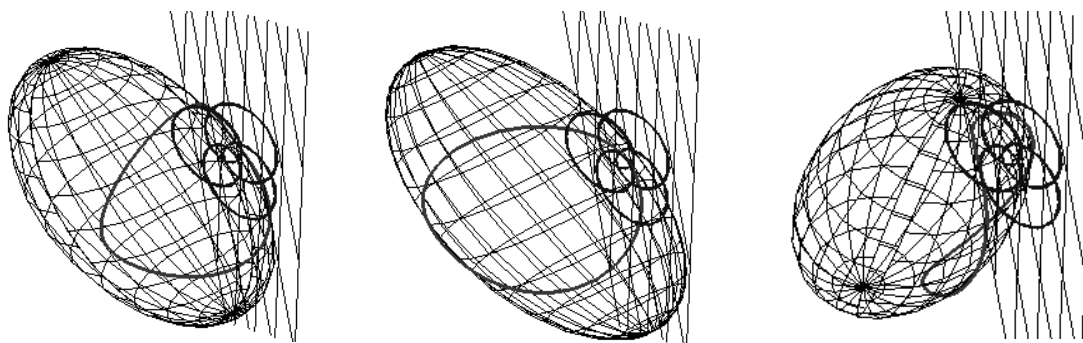


Рис. 3. Фази кочення еліпсоїда по дотичній площині для прикладу 3

В режимі анімації можна показати, що обертання навколо середньої за величиною осі еліпсоїда інерції виявляється нестійким. Адже при малому збурюванні обертання навколо зазначеної осі новий рух здійснюватиметься коченням еліпсоїда по площині π , коли геометричним місцем точок дотику буде служити одна з полюдів, досить близька до кривої, складеної з будь-яких половин двох еліпсів (сепаратрис). Рух еліпсоїда буде однаково ймовірний по кожній з досить близьких полюдів, що лежать у чотирьох областях, на які поверхня розділяється сепаратрисами. Це характерно для нестійкого обертання і істотно відрізняє цей випадок від обертання навколо максимальної та мінімальної за величинами осей, коли збурений рух здійснюється коченням еліпсоїда інерції уздовж досить близької полюді, яка «огортає» одну з цих осей.

Для обчислень необхідно задати: проміжок часу інтегрування системи диференціальних рівнянь *Time* (не плутати з часом виконання програми), кількість проміжних положень процесу кочення (кадрів анімації) N , початкові значення проєкцій вектора $w_1(0)$, $w_2(0)$ і $w_3(0)$ миттєвої кутової швидкості тіла на осі x , y і z , початкові значення кутів Ейлера $u(0)$, $v(0)$ і $w(0)$, які миттєва вісь обертання утворює з цими осями координат.

Висновки. В роботі складена та протестована *maple* програма комп'ютерного моделювання обертання твердого тіла з нерухомою точкою, яка базується на геометричній інтерпретації Пуансо.

Література

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: часть 2 / Н.Н. Бухгольц — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 332 с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. / А.П.Маркеев – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 416 с.

3. Програма кочення еліпсоїда мовою пакету mathematica [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/23297/how-can-i-simulate-a-pot-lid-rotating-around-an-axis-that-is-quickly-rotating>.
4. Savransky D. Poinsot Construction. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61433-poinsot-construction?focused=7212431&tab=function>.
5. Free Rotation of a Rigid Body: Poinsot Constructions. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://demonstrations.wolfram.com/FreeRotationOfARigidBodyPoinsotConstructions/>.
6. 3D Rigid Body Simulation Instructions. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://ialms.net/sim/3d-rigid-body-simulation/>.
7. Poinsot's construction. Polhode. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.youtube.com/watch?v=BwYFT3T5uIw>.

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ПУАНСО ВРАЩЕНИЯ ОБЪЕКТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Куценко Л.Н. , Запольский Л.Л.

Приведено компьютерную графическую модель интерпретации Пуансо вращения твердого тела с неподвижной точкой для исследования устойчивости его движения. Для этого смоделировано качение без скольжения эллипсоида инерции этого тела по одной из своих касательных плоскостей, в результате чего построены соответствующие линии качения - герполодия на касательной плоскости и полодия на поверхности эллипсоида.

Ключевые слова: интерпретация Пуансо, момент инерции, эллипсоид инерции, качение эллипсоида, полодия, герполодия.

COMPUTER IMPLEMENTATION OF THE MODEL OF POINSOT'S ROTATION OF THE OBJECT WITH A FIXED POINT

Kutsenko L., Zapolsky L.

A computer graphic model of Poinsot's interpretation of the rotation of a rigid body with a fixed point is presented to study the stability of its motion. For this, a rolling without sliding of the ellipsoid of inertia of this body along one of its tangent planes is simulated, as a result of which the corresponding rolling lines-herpolodia on the tangent plane and the poloidium on the surface of the ellipsoid are constructed.

Key words: Poinsot's interpretation, moment of inertia, inertia ellipsoid, rolling of an ellipsoid, polhode, herpolhode.