УДК 514.18

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА КРИВА НА ОСНОВІ СУМИ ОДНОТИПНИХ ФУНКЦІЙ ГІПЕРБОЛІЧНОГО СЕКАНСА

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Грищенко І.Ю., к.т.н.,
Кремець Т.С.
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)

В роботі розглянуто порівняння інтерполяційної кривої на основі суми функцій гіперболічного секанса із іншими інтерполяційними кривими, зокрема поліномами. Показано, що запропонована інтерполяційна крива не схильна до осциляцій незалежно від кількості точок, через які вона проходить.

Ключові слова: інтерполяційна крива, поліном, гіперболічний секанс, сума однотипних функцій.

Постановка проблеми. При конструюванні обводів або контурів плоских фігур виникає задача проведення кривих неперервних ліній, які мають проходити через заданий точковий ряд. В системах символьної математики *Mathematica, Maple, MatLab, MathCAD* закладені свої методи інтерполяції, які мають ряд особливостей [1]. Окрім лінійної інтерполяції відрізками прямих, в них пропонується різні підходи інтерполяції точкового ряду як неперервними кривими, так і кускова інтерполяція дугами кривих. Якщо при кусковій інтерполяції вдається зменшити осциляцію,то виникає інший недолік – з'єднання кусків дуг із заданим порядком гладкості. Наприклад, кусково-кубічна інтерполяція сплайнами Ерміта забезпечує неперервність тільки першої похідної, а друга похідна розривна [1]. В зв'язку із цим виникає задача відшукання такої інтерполяційної кривої, яка б була неперервною і мала мінімальні осциляції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує напрям досліджень, при якому дискретно представлена крива загущується проміжними точками із заданою щільністю за відсутності осциляцій, однак при цьому відсутні рівняння кривої [2, 3]. Деякі автори звернули увагу на криві, що є сумою графіків дзвоноподібних кривих [4-6]. Такі інтерполяційні функції дозволяють забезпечити проходження кривої через задане число точок і із-за своєї природи за певних умов не схильні до осциляцій. До таких функцій входить стала величина, значенням якої можна впливати на форму інтерполяційної кривої.

Формулювання цілей статті. Розглянути особливості інтерполяції точкового ряду кривими на основі суми функцій гіперболічного секанса та порівняти із інтерполяцією поліномом.

Основна частина. Розглянемо криву, що є сумою двох функцій гіперболічного секанса, зміщених вздовж осі *Ox* на певну величину *h* (рис. 1). Рівняння сумарної функції має вигляд:

$$y = y_1 + y_2; \quad y_1 = c_1 \operatorname{sech}(ax); \quad y_2 = c_2 \operatorname{sech}\big(a(x-h)\big), \tag{1}$$

де c_1, c_2 – сталі величини, що задають максимальне значення координати y вершині кожного графіка;

a – стала величина, значення якої впливає на форму графіка.

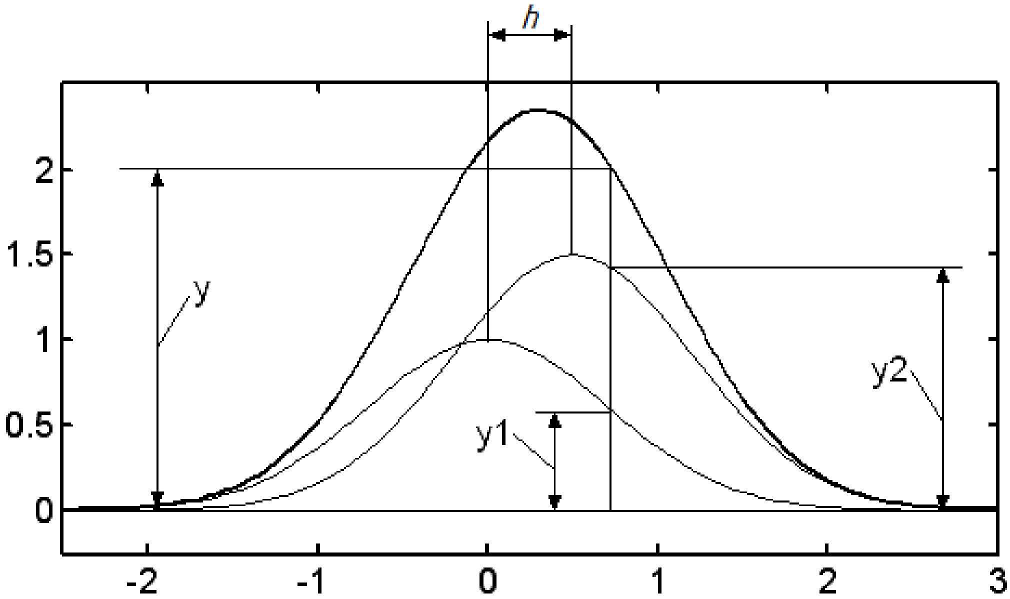

Рис. 1. Графіки складових функцій гіперболічного секанса при $a = 1$; $c_1 = 1$; $c_2 = 1{,}5$; $h = 0{,}5$ та їх сумарний графік

На рис. 1 показано два графіки гіперболічного секанса, які зміщені на величину *h*, та їх сумарний графік. При $x=0{,}8$ показано одержання сумарної ординати додаванням ординат функцій y_1 і y_2 . З рисунка також видно, що при $x > 3$ *і* $x < -3$ значення ординат всіх функцій дуже малі (практично дорівнюють нулю). Таким чином, поведінка сумарної функції прогнозована: по мірі зростання або зменшення змінної осциляції виключаються, оскільки графік сумарної кривої практично збігається із віссю *Ox*.

Інтерполяційну сумарну функцію будемо розглядати як параметричну, тобто у вигляді:

$$\begin{aligned} x &= c_1 \operatorname{sech}[a(t-t_1)] + c_2 \operatorname{sech}[a(t-t_2)] + \ldots + c_n \operatorname{sech}[a(t-t_n)]; \\ y &= d_1 \operatorname{sech}[a(t-t_1)] + d_2 \operatorname{sech}[a(t-t_2)] + \ldots + d_n \operatorname{sech}[a(t-t_n)], \end{aligned} \tag{2}$$

де $c_1 \ldots c_n$, $d_1 \ldots d_n$ – коефіцієнти, які знаходяться за умови проходження кривої (2) через *n* заданих точок;

a – коефіцієнт перед аргументом, якому можна надавати певних значень;

$t_{1...n}$ – порядковий номер точки: $t_1=1;\ t_2=2...\ t_n=n;$

t – змінний параметр, який в заданих точках приймає ціле значення (1, 2 ... n) за номером точки, а між точками – дробове.

Для знаходження коефіцієнтів $c_1 ... c_n$, $d_1 ... d_n$ складається дві лінійні системи рівнянь по n рівнянь у кожній. Для складених систем в ліву частину кожного рівняння (2) замість поточних значень x і y підставляють відповідні координати кожної із n точок:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \operatorname{sech}[a(1-1)] + c_2 \operatorname{sech}[a(1-2)] + ... + c_n \operatorname{sech}[a(1-n)]; \\ x_2 = c_1 \operatorname{sech}[a(2-1)] + c_2 \operatorname{sech}[a(2-2)] + ... + c_n \operatorname{sech}[a(2-n)]; \\ . \\ x_n = c_1 \operatorname{sech}[a(n-1)] + c_2 \operatorname{sech}[a(n-2)] + ... + c_n \operatorname{sech}[a(n-n)]; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y_1 = d_1 \operatorname{sech}[a(1-1)] + d_2 \operatorname{sech}[a(1-2)] + ... + d_n \operatorname{sech}[a(1-n)]; \\ y_2 = d_1 \operatorname{sech}[a(2-1)] + d_2 \operatorname{sech}[a(2-2)] + ... + d_n \operatorname{sech}[a(2-n)]; \\ . \\ y_n = d_1 \operatorname{sech}[a(n-1)] + d_2 \operatorname{sech}[a(n-2)] + ... + d_n \operatorname{sech}[a(n-n)]. \end{cases} \tag{4}$$

В системах (3), (4) замість змінного параметра t (номера точки) поставлено його значення, а коефіцієнт a вважається наперед заданим.

В праці [1] розглянуто інтерполяцію точкового ряду на тестовому прикладі дискретно представленої кривої (ДПК) за заданими координатами десяти точок (табл. 1).

Таблиця 1

Координати точок тестової ДПК

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0	20	45	53	57	62	74	89	95	100
y	0	0	-47	335	26	387	104	0	100	0

Автором праці [1] розглянуто різні способи інтерполяції ДПК за допомогою алгоритмів, закладених у поширені системи комп'ютерної математики, перераховані на початку статті. В їх основі лежить використання алгебраїчних кривих: поліномів, сплайнів, дробово-раціональних кривих. Автор робить висновок, що застосування цих видів інтерполяції не дає бажаного результату. Зробимо порівняння інтерполяції точкового ряду (табл. 1) поліномом і інтерполяційною кривою (2).

Степінь полінома буде на одиницю менший від числа точок, через які має пройти крива:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + ... + b_9 x^9. \quad (5)$$

Підставимо по черзі в (5) координати всіх десяти точок із табл. 1 і одержимо систему десяти лінійних рівнянь.

Розв'язком системи будуть значення десяти невідомих коефіцієнтів $b_0, b_1, b_2, b_3, ... b_9$:

$$b = \begin{cases} 0; \quad 156456.8503966196; \quad -23827.25620877762; \\ 1492.1070451178582; \quad -50.984919662155754; \\ 1.0493979889085476; \quad -0.01340260414904959; \\ 0.00010416000035587583; \quad -4.517635003471402*10\text{^}-7; \\ 8.392710259937338*10\text{^}-10 \end{cases} \quad (6)$$

Аналізуючи отримані коефіцієнти полінома (5) приходимо до висновку, що їх значення за абсолютною величиною знаходяться у великому діапазоні дійсних чисел, що вимагає для операцій із ними відповідних електронних ресурсів. Для малопотужних обчислювальних машин побудова інтерполяційної кривої за розглянутим алгоритмом стає проблематичною.

На рис. 2 за рівнянням (5) з підстановкою в нього знайдених коефіцієнтів (6) побудовано інтерполяційну криву, яка має на початку такий екстремум, який змусив показати саму криву у зменшеному масштабі вздовж осі *Oy*.

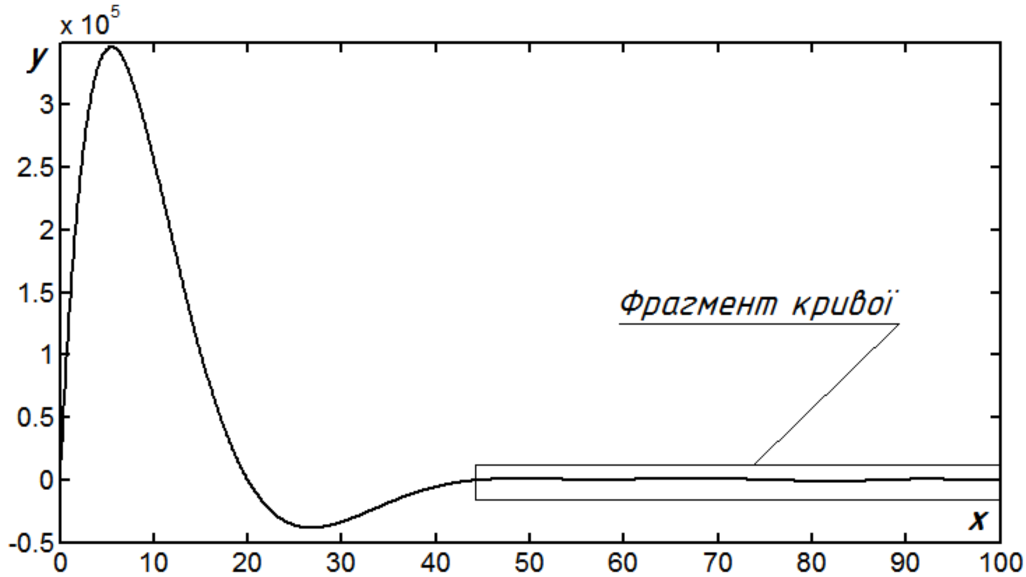

Рис. 2. Інтерполяційна крива, побудована за рівняннями (5), яка проходить через точковий ряд, координати якого задано в табл.1

Побудуємо інтерполяційну криву на цьому ж само точковому ряді за рівняннями (2). Коефіцієнти *c* і *d*, отримані внаслідок розв'язку систем (3) і (4) при *a*=0,5, мають наступні значення:

$$c = \begin{cases} 35.8327; & -214.4113; & 351.2788; & -267.9846; & 172.29; \\ -27.6349; & -126.3872; & 278.046; & -245.7517; & 183.2027 \end{cases}$$

$$d = \begin{cases} -7451; & 24613; & -44984; & 59882; & -63371; \\ 54746; & -37053; & 18671; & -637; & 1113 \end{cases} \quad (7)$$

Коефіцієнти c і d в (7) співрозмірні, що не потребує великої точності обчислень. Крім того, до параметричних рівнянь (2), як і до рівняння полінома (5), входить однакова кількість складових функцій, однак функції в (2) є однотипними на відміну від (5), де показник степеня кожної наступної функції зростає.

На рис. 3 побудовано інтерполяційну криву за рівняннями (2), а також виконано лінійну інтерполяцію.

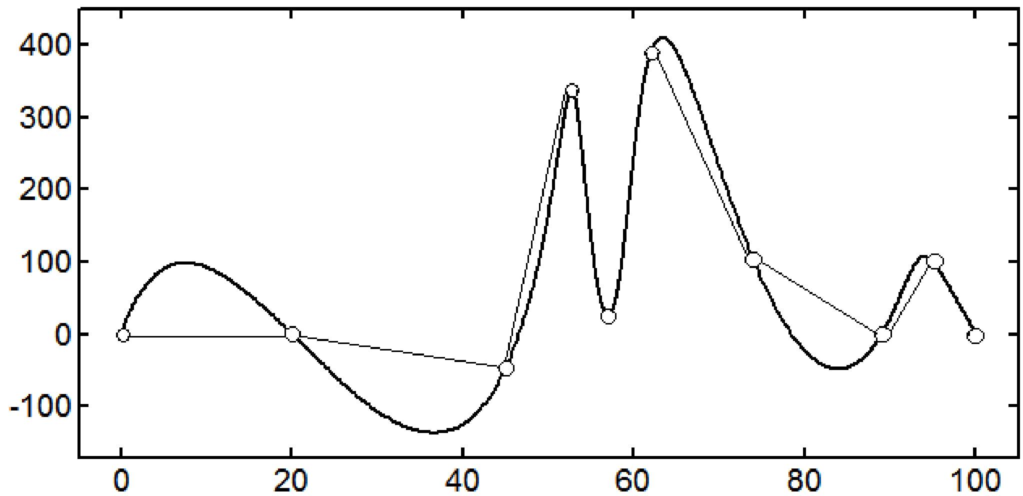

Рис. 3. Інтерполяційна крива, побудована за рівняннями (2), яка проходить через точковий ряд, координати якого задано в табл.1

Деякі відрізки лінійної інтерполяції майже збігаються із дугами інтерполяційної кривої, тому вони не показані. Якщо порівняти рисунки 2 і 3, то можна побачити, що на рис. 3 є деякі екстремуми, проте вони на значно менші, чим осциляції на рис. 2. Взагалі, якщо сумістити графіки (2) і (3) на одному рисунку із спільним масштабом, то інтерполяційна крива (рис. 3) на спільному рисунку виглядатиме прямою, паралельною осі Ox. Це свідчить про те, що інтерполяційна крива на основі суми функцій гіперболічного секанса не схильна до осциляцій на відміну від інтерполяційної кривої, якою є поліном. Крім того, кількість точок ДПК не впливає на осциляцію на відміну від полінома.

Про несхильність інтерполяційної кривої на основі суми функцій гіперболічного секанса до значних осциляцій свідчить і фрагмент, виділений на рис. 2. В порівнянні із сплеском ординати інтерполяційного полінома в лівій частині графіка на рис. 2 права частина зображена майже прямою. На рис. 4, де цей фрагмент зображено окремо і в іншому масштабі вздовж осі *Oy*, показано дві інтерполяційні криві: 1 – інтерполяційний поліном, 2 – інтерполяційна крива на основі суми функцій гіперболічного секанса. Як видно із рисунка, на обмеженій ділянці ДПК інтерполяційна крива на основі суми функцій гіперболічного секанса в сенсі осциляцій теж виграє.

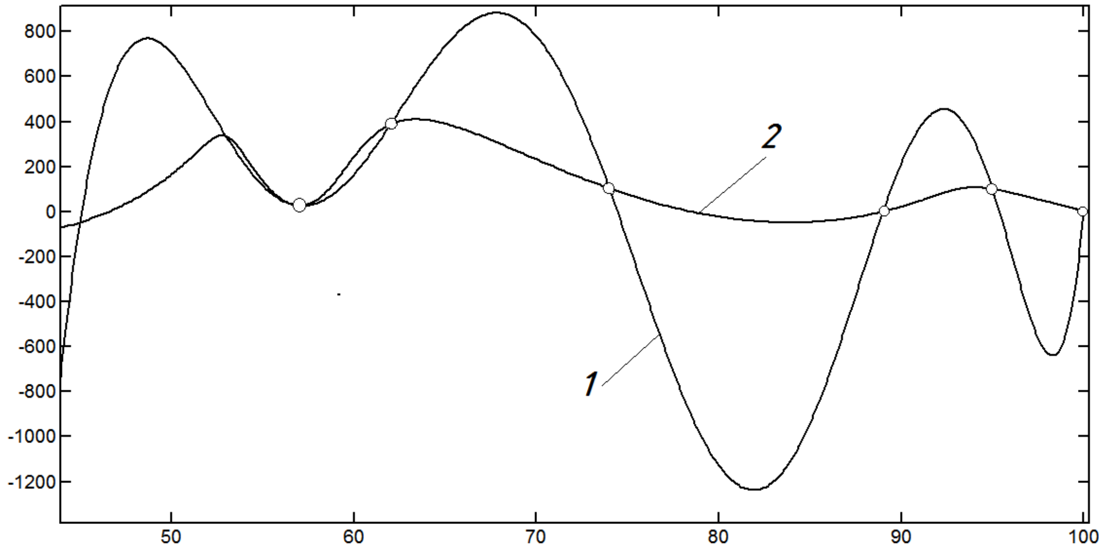

Рис. 4. Інтерполяційні криві (1 – поліном 9-го порядку (5);
2 - крива на основі суми функцій гіперболічного секанса (2))
на фрагменті ДПК, виділеному на рис. 2

Висновки. Інтерполяційна крива на основі суми функцій гіперболічного секанса менше схильна до осциляцій порівняно із алгебраїчними кривими. Вона досить добре інтерполює точковий ряд, розміщений на прямій лінії. Для отримання значень невідомих коефіцієнтів у параметричних рівняннях кривої необхідно розв’язати дві системи лінійних рівнянь, число яких дорівнює числу точок ДПК.

Література

1. Спиринцев Д.В. Особенности методов интерполяции на примере пакетов символьной математики / Д.В. Спиринцев, А.В. Найдыш // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць. – Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2016. – Вип. 7. – С. 151 – 156.
2. Найдыш В.М. Теоретические основы дискретного геометрического моделирования / В.М. Найдыш // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: КГТУСА, 1995. – Вып. 58. – С. 26 – 29.
3. Найдиш А.В. Згущення точкових рядів на основі кутів суміжності / А.В. Найдиш, В.О. Лебедєв // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4. – Т.19. – С. 26 – 31.
4. Сидоренко Ю. В. Комп’ютерна реалізація різних способів параметризації інтерполяційної функції Гаусса / Ю.В. Сидоренко,

А.В. Сацкова // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 174 – 178.
5. Сидоренко Ю.В. Побудова гладких ліній за допомогою параметризованих функцій Гаусса / Ю.В. Сидоренко // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2001. – Вип. 69. – С. 195 – 198.
6. Пилипака С.Ф. Дослідження інтерполяційної функції на основі суми графіків гіперболічного секанса / С.Ф. Пилипака, І.Ю. Хименко // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 4. – Т. 21. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – С. 12 – 15.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ КРИВАЯ НА ОСНОВЕ СУММЫ ОДНОТИПНЫХ ФУНКЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СЕКАНСА

Пилипака С.Ф., Грищенко И.Ю., Кремец Т.С.

В работе рассмотрено сравнение интерполяционной кривой на основе суммы функций гиперболического секанса с другими интерполяционными кривыми, в частности полиномами. Показано, что предложенная интерполяционная кривая не склонна к осцилляциям независимо от количества точек, через которые она проходит.

Ключевые слова: интерполяционная кривая, полином, гиперболический секанс, сумма однотипных функций.

INTERPOLATION CURVE ON THE BASIS OF SINGLE-SINGLE FUNCTIONS OF HYPERBOLIC SECANT

Pylypaka S., Grischenko I., Kremetz T.

The comparison of the interpolation curve on the basis of the sum of the functions of hyperbolic secant with other interpolation curves, in particular polynomials, is considered. It is shown that the proposed interpolation curve is not inclined to oscillations, regardless of the number of points through which it passes.

Keywords: interpolation curve, polynomial, hyperbolic secant, sum of one-type functions.