УДК 519.632.4

ВПЛИВ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ НА ВЛАСТИВОСТІ РЕКУРЕНТНОГО СПЛАЙНА П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ

Вірченко Г.А., д.т.н.
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (*Україна*),
Маломуж Т.В., к.т.н.,
Старун Н.В., к.т.н.,
Тулученко Г.Я., д.т.н.
Херсонський національний технічний університет (*Україна*)

У роботі обґрунтовується доцільність опису ланки рекурентного згладжучого сплайна п'ятого степеня за допомогою полінома Ерміта спеціального виду. За результатами аналізу характеристик матриць, що використовуються при реалізації алгоритму, надано практичні рекомендації щодо форми подання полінома з поточної ланки сплайна.

Ключові слова: сплайн, матриця стійкості, матриця Грама, базисні поліноми Ерміта.

Постановка проблеми. Пошуки можливостей надання сплайнам додаткових властивостей, що необхідні для розв'язання прикладних задач, супроводжують усю історію розвитку теорії сплайнів. При апроксимації часових рядів актуальною є задача побудови згладжуючих сплайнів, які є наближеними до оптимальних і припускають переобчислення незначної кількості останніх ланок при надходженні нової порції експериментальних даних. Традиційними недоліками алгоритмів, що реалізують побудову таких сплайнів є суб'єктивне визначення критерію довжини поточної ланки сплайна та поява осциляцій у сплайнової кривої по мірі росту послідовності експериментальних даних.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботах [1-3] розглядається алгоритм побудови згладжуючого напівлокального сплайна на рівномірних сітках моментів спостережень та вузлів сплайна, які не співпадають між собою. У цих дослідженнях для опису ланок сплайна використовуються виключно поліноми у степеневих базисах. У наших попередніх дослідженнях [4] показано, що опис ланки кубічного сплайна за допомогою поліномів у інших базисах може приводити до покращення стійкості вказаного алгоритму. Крім того, встановлено, що для побудови сплайна другого порядку гладкості є доцільним підвищення степеня сплайна.

Формулювання цілей статті. Дослідити вплив форми подання полінома для опису поточної ланки сплайна п'ятого степеня на стійкість названого алгоритму.

Основна частина. Позначимо поточну ланку сплайна $[x_a; x_b]$. Розглянемо чотири форми опису ланки сплайна п'ятого степеня дефекту 3:

1) поліномом у степеневому базисі:

$$P_{St}(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i; \tag{1}$$

2) поліномом Ерміта з двома вузлами, в яких задані значення функції та її похідних перших двох порядків:

$$P_{Herm1}(x) = \begin{pmatrix} f_a & f_a^{/} & f_a^{//} & f_b & f_b^{/} & f_b^{//} \end{pmatrix} \cdot V_{Herm1}^{-1} \cdot X, \tag{2}$$

де $V_{Herm1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_a & 1 & 0 & x_b & 1 & 0 \\ x_a^2 & 2x_a & 2 & x_b^2 & 2x_b & 2 \\ x_a^3 & 3x_a^2 & 6x_a & x_b^3 & 3x_b^2 & 6x_b \\ x_a^4 & 4x_a^3 & 12x_a^2 & x_b^4 & 4x_b^3 & 12x_b^2 \\ x_a^5 & 5x_a^4 & 20x_a^3 & x_b^5 & 5x_b^4 & 20x_b^3 \end{pmatrix}$;

$X = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{pmatrix}^T$;

3) поліномом Ерміта з трьома вузлами $(x_a < x_0 < x_b)$, для якого в першому вузлі задані значення функції та її похідних перших двох порядків, у другому вузлі – значення функції, у третьому вузлі – значення функції та її першої похідної:

$$P_{Herm2}(x) = \begin{pmatrix} f_a & f_a^{/} & f_a^{//} & f_0 & f_b & f_b^{/} \end{pmatrix} \cdot V_{Herm2}^{-1} \cdot X, \tag{3}$$

де $V_{Herm2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_a & 1 & 0 & x_0 & x_b & 1 \\ x_a^2 & 2x_a & 2 & x_0^2 & x_b^2 & 2x_b \\ x_a^3 & 3x_a^2 & 6x_a & x_0^3 & x_b^3 & 3x_b^2 \\ x_a^4 & 4x_a^3 & 12x_a^2 & x_0^4 & x_b^4 & 4x_b^3 \\ x_a^5 & 5x_a^4 & 20x_a^3 & x_0^5 & x_b^5 & 5x_b^4 \end{pmatrix}$;

4) поліномом Ерміта з трьома вузлами $(x_a < x_0 < x_b)$, для якого в першому вузлі задані значення функції та її похідних перших

двох порядків, у другому вузлі – значення функції та її першої похідної, у третьому вузлі – значення функції:

$$P_{Herm3}(x) = \begin{pmatrix} f_a & f_a^{/} & f_a^{//} & f_0 & f_0^{/} & f_b \end{pmatrix} \cdot V_{Herm3}^{-1} \cdot X, \qquad (4)$$

де $V_{Herm3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_a & 1 & 0 & x_0 & 1 & x_b \\ x_a^2 & 2x_a & 2 & x_0^2 & 2x_0 & x_b^2 \\ x_a^3 & 3x_a^2 & 6x_a & x_0^3 & 3x_0^2 & x_b^3 \\ x_a^4 & 4x_a^3 & 12x_a^2 & x_0^4 & 4x_0^3 & x_b^4 \\ x_a^5 & 5x_a^4 & 20x_a^3 & x_0^5 & 5x_0^4 & x_b^5 \end{pmatrix}$.

При побудові рекурентного сплайна за алгоритмом Д.О. Силаєва [1-3] матриця системи для знаходження частини коефіцієнтів ланки сплайна за методом найменших квадратів (МНК) складається з одного блоку традиційної матриці для цього методу. У даному випадку з блоку, що містить три останні рядки та стовпчики. Як відомо, апроксимаційні властивості базисів оцінюють за числом обумовленості матриці Грама. Для їх обчислення при використанні різних форм подання полінома, не втрачаючи загальності результатів, покладемо $[x_a; x_b] = [0;1]$. Також будемо вважати, що $x_0 = (x_a + x_b)/2$. Доцільність такої локалізації внутрішнього вузла доводиться, зокрема, в роботі [4].

Із даних табл. 1 очевидно, що суттєві переваги має застосування поліномів Ерміта виду (4). Також відзначимо, що у своїх дослідженнях автори розглядали більшу кількість видів форм поліномів, але їх застосування негативно впливало на число обумовленості матриці Грама.

Таблиця 1

Числа обумовленості матриці Грама *G* та її блока

Поліном	Число обумовленості	
	матриці Грама *G*	блока
Поліном із степеневим базисом (1)	$1{,}495 \cdot 10^7$	30298,672
Поліном Ерміта з двома вузлами (2)	$2{,}056 \cdot 10^6$	$1{,}977 \cdot 10^5$
Поліном Ерміта з трьома вузлами (3)	$1{,}102 \cdot 10^6$	2884,545
Поліном Ерміта з трьома вузлами (4)	$1{,}450 \cdot 10^6$	15,930

Висновки. У роботах [1-3] для оцінки стійкості досліджуваного алгоритму використовується величина найбільшого модуля власного числа матриці спеціального виду, яка названа матрицею стійкості. Наші дослідження показали, що форма подання полінома не впливає на значення власних чисел цієї матриці для різних співвідношень попередньої та остаточної довжин ланок сплайна (табл. 2).

Таблиця 2

Приклади оцінки модулів власних чисел матриці стійкості

M	m	$\min_M \max \lvert\lambda_i\rvert$	M	m	$\min_M \max \lvert\lambda_i\rvert$
6	3	0,267	11	7	0,204
7	4	0,226	12	7	0,221
8	5	0,205	13	8	0,208
9	5	0,236	14	9	0,203
10	6	0,214	15	9	0,213

Тому для обробки експериментальних залежностей, що містять похибки вимірювань доцільним є використання поліномів Ерміта з трьома вузлами виду (4). При цьому внутрішній вузол рекомендовано розміщувати у вузлі, який є найближчим до середини ланки сплайна.

Література

1. Силаев Д.А. Полулокальные сглаживающие сплайны / Д.А. Силаев // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – 2013. – Вып. 29. – С. 443–454.
2. Силаев Д.А. Полулокальные сглаживающие S-сплайны / Д.А. Силаев // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Т. 2. – № 4. – С. 349–357.
3. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C_1 / Д.А. Силаев и др. // Труды семинара имени И. Г. Петровского. – 2007. – Вып. 26. – С. 347–367.
4. Tuluchenko G. Generalization of One Algorithm for Constructing Recurrent Splines / G. Tuluchenko, G. Virchenko, G. Getun, V. Martynov, M. Tymofieiev // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol. 2. – №4. Mathematics and Cybernetics – Applied Aspects. – P. 53–62.

ВЛИЯНИЕ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ НА СВОЙСТВА РЕКУРЕНТНОГО СПЛАЙНА ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Вирченко Г.А., Маломуж Т.В., Старун Н.В., Тулученко Г.Я.

В работе обосновывается целесообразность описания звена рекуррентного сглаживающего сплайна пятой степени с помощью полинома Эрмита специального вида. На основании результатов анализа характеристик матриц, которые используются при реализации алгоритма построения такого сплайна, даны практические рекомендации относительно формы представления полинома для текущего звена сплайна.

Ключевые слова: сплайн, матрица устойчивости, матрица Грама, базисный полином Эрмита.

INFLUENCE OF BASIC FUNCTIONS ON THE PROPERTIES OF THE FIRST DEGREE RECURRENT SPLINE

Virchenko G., Malomuzh T., Starun N., Tuluchenko G.

The feasibility of describing the link of a recurrent smoothing spline of the fifth degree with the help of the Hermite polynomial of a special type is justified in this paper. Based on the results of the analysis of the characteristics of matrices that are used in the implementation of the algorithm for constructing such a spline, practical recommendations are given regarding the form of the representation of the polynomial for the current link of the spline.

Keywords: spline, matrix, Gram matrix, Hermite basic polynomial.