УДК 515.2+563.3

МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ ПОВЕРХОНЬ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ ФУНКЦІЙ

Ковальов С.М. д.т.н.,
Мостовенко О.В., к.т.н.
Київський національний університет будівництва та архітектури (Україна)

В роботі запропоновано використання послідовностей функцій для моделювання поверхонь, які представлено дискретними лінійними каркасами.

Ключеві слова: числова послідовність, послідовність функцій, дискретний каркас,замкнена форма, рекурентна формула.

Постановка проблеми. В курсі нарисної геометрії криві поверхні графічно представляють у вигляді дискретних лінійних каркасів, але аналітичний опис таких каркасів не надається, хоча у більшості підручників з нарисної геометрії надається аналітичний супровід окремих тем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Після захисту докторської дисертації [2] у луцькій і київських школах прикладної геометрії продовжувались дослідження, пов'язані з формуванням дискретних точкових каркасів поверхонь на основі їх моделювання апаратом числових послідовностей. Зокрема відомі дослідження з питань утворення рекурентних залежностей, відмінних від операторів скінченних різниць [3]. Моделювання дискретних лінійних каркасів поверхонь на основі послідовностей функцій не розглядалось.

Формулювання цілей статті. Ціллю статті є показати, що геометричною інтерпретацією послідовності функцій є дискретний лінійний каркас поверхні.

Основна частина. Узагальненням поняття «числова послідовність» є послідовність функцій [1]:

$$\{f_j(x)\} \equiv f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \ldots, \tag{1}$$

де $j=0;\ 1;\ 2; \ldots,\ n \ldots$

За аналогією з числовою послідовністю, яка може бути геометричною моделлю дискретно представленої кривої [2], послідовність функцій однієї змінної можна представити у вигляді дискретного лінійного каркаса поверхні з одиничним кроком уздовж осі *Oy* в прямокутній декартовій системі координат (рис.1). У цьому випадку функції $f_1(x) \ldots f_n(x)$ описують лінії каркаса поверхні.

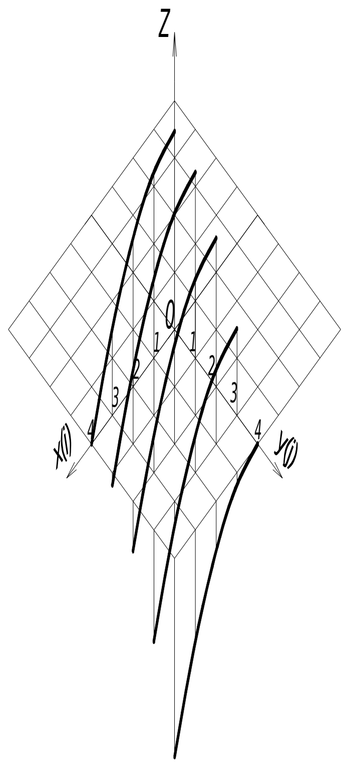

Рис. 1

На рис.1 наведено приклад моделювання дискретного лінійного каркаса поверхні послідовністю функцій:

$$\{f_j(x)\} = a\left(\frac{b^2 - x^2 - j^2}{b^2}\right), \tag{2}$$

де *a=b=4* – параметри поверхні;

j – номер лінії каркаса.

Якщо в (2) дискретний параметр *j* замінити на неперервний *y*, отримаємо рівняння параболоїда обертання:

$$Z = a\left(\frac{b^2 - x^2 - y^2}{b^2}\right), \tag{3}$$

де при заміні в (3) неперервного параметра *x* на дискретний параметр *i*, отримаємо іншу послідовність функцій:

$$\{f_i(y)\} = a\left(\frac{b^2 - i^2 - y^2}{b^2}\right), \tag{4}$$

яка моделює інший дискретний каркас параболоїда (3) у площинах, які паралельні площині *yOz*. Нарешті при заміні в (3) обох неперервних параметрів *x* і *y* на дискретні *i* та *j*, отримаємо подвійну числову послідовність, яка моделює дискретний точковий каркас поверхні (3).

Відомо [1], що числові послідовності мають дві форми математичного опису – замкнену (у вигляді дискретної функції) і рекурентну (у вигляді різницевого рівняння). За аналогією з числовими послідовностями послідовності функцій також можуть мати такі дві форми математичного опису. Так, вирази (2) і (4) є замкненою формою опису послідовності функцій. Для переходу до рекурентної залежності необхідно визначити значення кількох суміжних членів послідовності функцій, а тоді виключити з них дискретний параметр i (або j). Наприклад, для послідовності функцій (2) визначимо рівняння трьох суміжних функцій:

$$f_{j-1}(y)=\frac{a\left[b^2-x^2-(j-1)^2\right]}{b^2};$$
$$f_j(y)=\frac{a\left(b^2-x^2-j^2\right)}{b^2}; \tag{5}$$
$$f_{j+1}(y)=\frac{a\left[b^2-x^2-(j+1)^2\right]}{b^2}.$$

При звільненні в (5) дискретного параметра j отримаємо:

$$f_{j-1}(y)-2f_j(y)+f_{j+1}(y)=\frac{2}{b^2}, \text{ або} \tag{6}$$
$$f_j(y)-3f_{j+1}(y)+3f_{j+2}(y)-f_{j+3}(y)=0. \tag{7}$$

На рис.2 наведено інший приклад моделювання дискретного каркаса поверхні циліндроїда, напрямними якого є косинусоїда:

$$\begin{cases} Z=\dfrac{a^2}{2}\left(1+\cos\dfrac{y\cdot 180^\circ}{a}\right), \\ x=a \end{cases}$$

де a – параметр ($CO=OD=a$), і парабола:

$$Z=\frac{y^2}{a}.$$

Рівняння поверхні має вигляд:

$$Z=\frac{2y^2(a-x)+a^2x\left(1+\cos\dfrac{y\cdot 180^\circ}{a}\right)}{2a^2}. \tag{8}$$

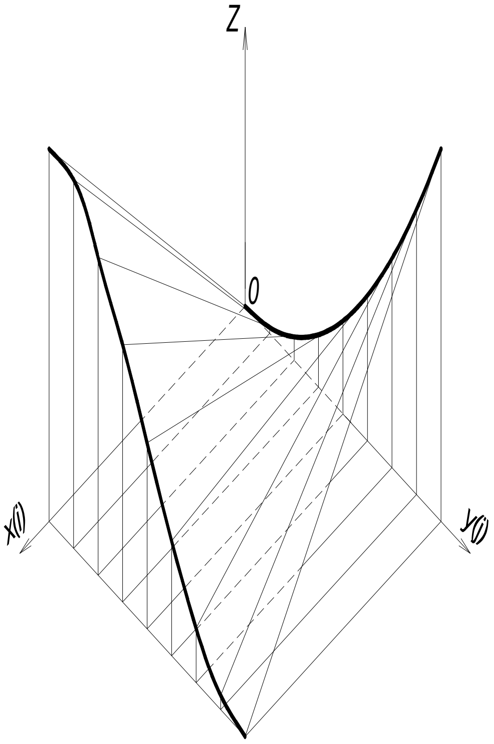

Рис. 2

При *a=8* дискретний лінійчатий каркас з одиничним кроком уздовж осі *Oy* описується послідовністю функцій:

$$\{f_j(x)\} = \frac{32x\left[1+\cos\left(22{,}5^\circ \cdot j\right)\right] - x + 8j^2}{64}. \tag{9}$$

Дискретний лінійний каркас поверхні (8) з одиничним кроком уздовж осі *Ox* отримаємо, якщо дискретний параметр *j* замінимо неперервним *y*, а неперервний параметр *x* – дискретним *i*:

$$\{f_i(y)\} = \frac{32i\left[1+\cos\left(22{,}5^\circ \cdot y\right)\right] - i + 8y^2}{64}. \tag{10}$$

Рекурентною формулою послідовності (10) буде:

$$f_{i-1}(y) - 2f_i(y) + f_{j+1}(y) = 0.$$

Рекурентну формулу послідовності (9) вище зазначеним способом вивести неможливо, оскільки неможливо звільнитись від дискретного параметра *j*.

Висновки. Проведене у роботі дослідження експериментальним шляхом показало, що геометричною інтерпретацією послідовності функцій є дискретний лінійний каркас поверхні.

Література

1. Энциклопедия элементарной математики. Том III. Функции и пределы. – М-Л.: Гос. Издательство технико-теоретической

литературы, 1952. – 559с.
2. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01/ С.І.Пустюльга / КНУБА. – К., 2006.
3. Ковальов С.М. Рекурентні формули числових послідовностей у формуванні дискретно визначених геометричних образів / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська //Прикл. геометрія та інженерна графіка. – К.:КНУБА, 2006, – Вип. 76. – С. 30-37.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ КАРКАСОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ФУНКЦИЙ

Ковалёв С.Н., Мостовенко А.В.

В работе рассмотрена возможность использования аппарата последовательностей функций для моделирования дискретных линейных каркасов поверхностей. Приведённые примеры наглядно демонстрируют эти возможности.

Ключевые слова: числовая последовательность, последовательность функций, замкнутая форма, реккурентная формула, дискретный каркас.

SIMULATION OF DISCRETE FRAMES OF SURFACES BY SEQUENCES OF FUNCTIONS

Kovalov S., Mostovenko A.

In the paper, the possibility of using the sequence function apparatus for modeling discrete linear surface skeletons is considered. These examples clearly demonstrate these opportunities.

Key words: numerical sequence, sequence of functions, closed form, recursive formula, discrete skeleton.