УДК 514.18

УТВОРЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА УЯВНІЙ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ЦИКЛОЇДИ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Муквич М.М., к.т.н.[1]
Національний університет біоресурсів і природокористування України, (Україна, м. Київ)

У роботі здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь на основі просторових ізотропних ліній, які лежать на уявній поверхні обертання циклоїди навколо її напрямної. Параметричні рівняння ізотропних ліній знайдено із умови рівності нулю лінійного елемента уявної поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній.

Ключові слова: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, циклоїда, лінійний елемент поверхні, ізометрична сітка координатних ліній.

Постановка проблеми. У сучасних CAD-системах при проектуванні різноманітних поверхонь технічних форм та періодичних структур будівельних матеріалів започатковано використання геометричних моделей на основі мінімальних поверхонь. Геометрична форма мінімальної поверхні, середня кривина у всіх точках якої дорівнює нулю, забезпечує рівномірний розподіл зусиль при взаємодії оболонки з середовищем без врахування крайових ефектів [1, с. 152].

Зокрема, при створенні пористих каркасів різноманітних конструктивних матеріалів у галузі тканинної інженерії використовуються три-періодичні мінімальні поверхні [2]. Експериментальні результати підтверджують оптимізовані фізичні властивості та легкість наповнення вказаних пористих структур.

Відомими є сучасні дослідження аналітичних характеристик мінімальних поверхонь з метою формалізації процесу виготовлення поверхонь технічних форм за допомогою роботизованих станків [3].

Задача знаходження параметричних рівнянь мінімальних поверхонь, починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), реалізується за допомогою методів теорії функцій комплексної змінної [4, с. 685]. Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснюють у комплексному просторі з ізотропними

---
[1] Науковий консультант – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

лініями у ролі ліній сітки переносу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини. Моделювання ізотропних ліній за допомогою фундаментальних сплайнів розглянуто у роботі [5]. Ряд робіт авторів статті присвячена задачі знаходження аналітичного опису ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній [8, с. 54]. Зокрема, у статті [6] знайдено параметричні рівняння ізотропних ліній, які лежать на поверхні обертання циклоїди навколо її напрямної. При цьому потребує дослідження задача аналітичного опису ізотропних ліній, які належать уявній поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній.

Формулювання цілей статті. Знайти параметричні рівняння просторових ізотропних ліній, які лежать на уявній поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній. Використовуючи аналітичний опис ізотропних ліній визначити параметричні рівняння відповідних мінімальних поверхонь.

Основна частина. Розглянемо уявну поверхню, утворену при обертанні циклоїди, заданої параметричними рівняннями $\varphi(\tau)=b\cdot(\tau-\sin\tau);\ \ \psi(\tau)=b\cdot(1-\cos\tau)$, де $\tau\in[0;\,2\pi)$, $b-$параметр циклоїди, навколо її напрямної на деякий кут, комплексна величина якого дорівнює: $(\alpha+\beta i)\cdot w$, де $\alpha,\beta\in R;\ w\in[0;\,2\pi);$ $i-$уявна одиниця. Параметричні рівняння уявної поверхні обертання циклоїди є функціями комплексної змінної і мають вигляд:

$$\begin{aligned} X(\tau;w)&=b\cdot(1-\cos\tau)\cdot\cos[(\alpha+\beta i)w];\\ Y(\tau;w)&=b\cdot(1-\cos\tau)\cdot\sin[(\alpha+\beta i)w];\\ Z(\tau;w)&=b\cdot(\tau-\sin\tau). \end{aligned} \tag{1}$$

Вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми уявної поверхні (1), заданої рівняннями $X(\tau,w),\ Y(\tau,w),Z(\tau,w)$, дорівнюють:

$$E=(X'_\tau)^2+(Y'_\tau)^2+(Z'_\tau)^2=2b^2\cdot(1-cos\,\tau);$$

$$F=X'_\tau\cdot X'_w+Y'_\tau\cdot Y'_w+Z'_\tau\cdot Z'_w=0;$$

$$G=(X'_w)^2+(Y'_w)^2+(Z'_w)^2=4b^2(\alpha+\beta i)^2\cdot sin^4\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

Лінійний елемент [8, с. 53] уявної поверхні обертання циклоїди (1) запишеться у вигляді:

$$ds^2=2b^2\cdot(1-\cos\tau)\cdot d\tau^2+4b^2(\alpha+\beta i)^2\cdot\sin^4\left(\frac{\tau}{2}\right)\cdot dw^2. \tag{2}$$

Перетворимо вираз (2) до вигляду:

$$ds^2 = 4b^2(\alpha+\beta i)^2\cdot\sin^4\left(\frac{\tau}{2}\right)\cdot\left[\frac{1-\cos\tau}{2(\alpha+\beta i)^2\cdot\sin^4\left(\frac{\tau}{2}\right)}\cdot d\tau^2+dw^2\right]. \qquad (3)$$

Уведемо заміну: $dt^2 = \dfrac{1-\cos\tau}{2(\alpha+\beta i)^2\cdot\sin^4\left(\frac{\tau}{2}\right)}\cdot d\tau^2,$ тоді вираз (3) можна записати у вигляді:

$$ds^2 = 4b^2(\alpha+\beta i)^2\cdot\sin^4\left(\frac{\tau}{2}\right)\cdot\left[dt^2+dw^2\right]. \qquad (4)$$

Лінійний елемент (4) уявної поверхні (1) обертання циклоїди визначає ізометричну (або ізотермічну) координатну сітку поверхні [8, с. 54]. Перетворивши вираз указаної заміни, отримаємо залежність:

$$t = \frac{1}{\alpha+\beta i}\cdot\int\frac{d\tau}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{2}{\alpha+\beta i}\cdot\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\tau}{4}\right)\right|+C_1, \qquad (5)$$

де C_1 – довільна стала інтегрування.

Нехай $C_1=0$, тоді з рівності (5) отримаємо умову переходу від ортогональної до ізометричної сітки координатних ліній для уявної поверхні (1) обертання циклоїди:

$$\tau = 4\cdot arctg\left[e^{\frac{t}{2}\cdot(\alpha+\beta i)}\right].$$

Підставивши останній вираз у (1), після перетворень і спрощень, отримаємо параметричні рівняння уявної поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній:

$$\begin{aligned} X(t;w) &= \frac{8b\,e^{(\alpha+\beta i)\cdot t}}{\left(1+e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)^2}\cdot\cos[(\alpha+\beta i)\cdot w];\\ Y(t;w) &= \frac{8b\,e^{(\alpha+\beta i)\cdot t}}{\left(1+e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)^2}\cdot\sin[(\alpha+\beta i)\cdot w];\\ Z(t;w) &= b\cdot\left(4\,\mathrm{arctg}\left(e^{\frac{t}{2}\cdot(\alpha+\beta\cdot i)}\right)-\frac{4e^{\frac{t}{2}\cdot(\alpha+\beta\cdot i)}\left(1-e^{\cdot(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)}{\left(1+e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)^2}\right), \end{aligned} \qquad (7)$$

де b – параметр циклоїди; $t,\alpha,\beta\in R;\quad w\in[0;\,2\pi)$.

Лінійний елемент уявної поверхні (7), віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, має вигляд:

$$ds^2 = \frac{64b^2e^{2t(\alpha+\beta\cdot i)}\cdot(\alpha+\beta\cdot i)^2}{\left(1+e^{t(\alpha+\beta\cdot i)}\right)^4}\cdot\left(dw^2+dt^2\right). \qquad (8)$$

Розклавши на множники вираз (8), отримаємо:

$$ds^2 = \frac{64b^2e^{2t(\alpha+\beta\cdot i)}\cdot(\alpha+\beta\cdot i)^2}{\left(1+e^{t(\alpha+\beta\cdot i)}\right)^4}\cdot(dw-i\cdot dt)(dw+i\cdot dt),$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$w=i\cdot t+C \quad \text{або} \quad w=-i\cdot t+C, \qquad (9)$$

де $C-$ довільна стала інтегрування.

При підстановці виразу $w=i\cdot t+C$ у рівняння (7) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння ізотропної лінії, яка лежить на уявній поверхні обертання циклоїди:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{8\,b\,e^{(\alpha+\beta i)\cdot t}}{\left(1+e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)^2}\cdot\cos[(\alpha+\beta i)\cdot(i\cdot t+C)];\\
y(t) &= \frac{8\,b\,e^{(\alpha+\beta i)\cdot t}}{\left(1+e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)^2}\cdot\sin[(\alpha+\beta i)\cdot(i\cdot t+C)];\\
z(t) &= 4b\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{t}{2}\cdot(\alpha+\beta\cdot i)}\right)-\frac{e^{\frac{t}{2}\cdot(\alpha+\beta\cdot i)}\left(1-e^{\cdot(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)}{\left(1+e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t}\right)^2}\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у рівняннях (10) уведемо заміну: $t=u+i\cdot v$.

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (10), отримаємо рівняння мінімальної поверхні (при $C=0$):

$$
\begin{aligned}
X(u,v) &= \frac{4b}{\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)\right)^2}\cdot\Big[e^{4\alpha u}+e^{4\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\times\\
&\quad\times\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}\right)\cdot\cos(v\alpha+u\beta)+2e^{2\alpha u+2\beta v}\cdot\cos(2(v\alpha+u\beta))\Big];\\
Y(u,v) &= -\frac{8b\cdot e^{\alpha u+\beta v}\cdot\sin(v\alpha+u\beta)}{e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)};\\
Z(u,v) &= 2b\left(\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{u\alpha}{2}}\cos\frac{1}{2}(v\alpha+u\beta)}{e^{\frac{v\beta}{2}}+e^{\frac{u\alpha}{2}}\sin\frac{1}{2}(v\alpha+u\beta)}+\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{u\alpha}{2}}\cos\frac{1}{2}(v\alpha+u\beta)}{e^{\frac{v\beta}{2}}-e^{\frac{u\alpha}{2}}\sin\frac{1}{2}(v\alpha+u\beta)}\right)-\\
&\quad-\frac{4b\cos\frac{1}{2}(v\alpha+u\beta)\cdot\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+4e^{\alpha u+\beta v}-2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)\right)}{e^{-\frac{1}{2}(u\alpha+v\beta)}\cdot\left(e^{v\beta}-e^{u\alpha}\right)^{-1}\cdot\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)\right)^2};
\end{aligned}
\tag{11}
$$

та приєднаної мінімальної поверхні (при $C=0$):

$$
\begin{aligned}
X^*(u,v) &= \frac{8b\cdot\left[-e^{u\alpha+v\beta}+\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}\right)\cdot\sin(v\alpha)\cdot\sin(u\beta)\right]\cdot\sin(\alpha v+\beta u)}{\left(e^{v\beta}-e^{u\alpha}\right)^{-1}\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)\right)^2};\\
Y^*(u,v) &= \frac{4b\cdot\left(e^{2\alpha u}-e^{2v\beta}\right)}{e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)};\\
Z^*(u,v) &= b\ln\left|\frac{e^{\alpha u-\beta v}\cdot\cos^2\left(\frac{v\alpha}{2}+\frac{u\beta}{2}\right)+\left(1+e^{\frac{1}{2}(u\alpha-v\beta)}\sin\left(\frac{v\alpha}{2}+\frac{u\beta}{2}\right)\right)^2}{e^{\alpha u-\beta v}\cdot\cos^2\left(\frac{v\alpha}{2}+\frac{u\beta}{2}\right)+\left(1-e^{\frac{1}{2}(u\alpha-v\beta)}\sin\left(\frac{v\alpha}{2}+\frac{u\beta}{2}\right)\right)^2}\right|-\\
&\quad-\frac{4b\cos\left(\frac{v\alpha}{2}+\frac{u\beta}{2}\right)\cdot\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}-4e^{\alpha u+\beta v}-2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)\right)}{e^{-\frac{1}{2}(u\alpha+v\beta)}\cdot\left(e^{v\beta}+e^{u\alpha}\right)^{-1}\cdot\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)\right)^2};
\end{aligned}
\tag{12}
$$

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (11) і (12) відповідно, при $b=3;\ \alpha=1;\ \beta=2;\quad u\in\left[\frac{\pi}{2};...\pi\right];\ \ v\in\left[\frac{\pi}{2};...\pi\right].$

а б

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих на основі ізотропної лінії (10) при $C=0$:
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (11);
б) відсік приєднаної мінім. поверхні, побудованої за рівняннями (12).

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (11) та приєднаної поверхні (12) дорівнюють:

$$E=G=\frac{64b^2\cdot\left(e^{\alpha u}+e^{\beta v}\right)^2\cdot e^{2\alpha u+2\beta v}\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(e^{2\alpha u}+e^{2\beta v}+2e^{\alpha u+\beta v}\cos(\alpha v+\beta u)\right)^3};\quad F=0.$$

Вирази коефіцієнтів другої квадратичної форми мінімальної поверхні (11) та приєднаної поверхні (12) мають громіздкий вигляд і в даній статті не наводяться. Знайдені векторно-параметричні рівняння $\overline{R}=\overline{R}(u,v)$ поверхні (11) та $\overline{R}^*=\overline{R}^*(u,v)$ поверхні (12), віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній, задовольняють умовам $\frac{\partial^2\overline{R}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\overline{R}}{\partial v^2}=\overline{0}$ та $\frac{\partial^2\overline{R}^*}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\overline{R}^*}{\partial v^2}=\overline{0}$ відповідно. Тому, згідно твердження, доведеного у роботі [7] авторів даної статті, поверхні (4) і (5) є мінімальними.

Вираз (8) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2=\frac{64b^2e^{2t(\alpha+\beta\cdot i)}\cdot(\alpha+\beta\cdot i)^2}{\left(1+e^{t(\alpha+\beta\cdot i)}\right)^4}\cdot(dt-i\cdot dw)(dt+i\cdot dw).$$

Тоді з аналогічних міркувань можна знайти аналітичний опис двох сімей ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь, які мають спільні метричні властивості та властивості кривини із мінімальними поверхнями (11), (12).

Висновки. На уявній поверхні обертання циклоїди для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній, і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

Література

1. Гуляев В.И. Расчёт оболочек сложной формы [Текст] / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, В.В. Гайдайчук. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Feng, Jiawei. Porous scaffold design by solid T-splines and triply periodic minimal surfaces [Електронний ресурс] / Jiawei Feng, Fu Jianzhong, Shang Ce, Lin Zhiwei, Li Bin // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2018. – Vol. 336, 1 July 2018 – P. 333–352. Available at: https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.03.007.
3. Hua Hao. Wire cut of double-sided minimal surfaces [Електронний ресурс] / Hao Hua, Jia Tingli // Visual Comput. – 2018. – Vol. 34, Issue 274. – P.1–11. Available at: https://doi.org/10.1007/s00371-018-1548-0.
4. Математическая энциклопедия [гл. ред. И. М. Виногра-дов] Т. 3. – М.: Изд–во «Сов. энциклопедия», 1982. – С. 683–690.
5. Аушева Н.М. Ізотропні фундаментальні сплайни [Текст] / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2016.– №6. – С. 3–7.
6. Муквич М.М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди [Текст] / М.М. Муквич // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: Видавництво ХНТУ, 2016.– №3(58). – С. 519–523.
7. Пилипака С.Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: Видавництво ХНТУ, 2017.– №3(62). – Т.2. – С. 312–316.
8. Фиников С. П. Теория поверхностей [Текст] / С. П. Фиников. – М. – Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.

ОБРАЗОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ, ЛЕЖАЩИХ НА МНИМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЦИКЛОИДЫ

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н.

Получено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью пространственных изотропных линий, лежащих на мнимой поверхности вращения циклоиды вокруг ее направляющей. Параметрические уравнения изотропных линий получены из условия равенства нулю линейного элемента мнимой поверхности вращения циклоиды, отнесенной к изометрической сети мнимых координатных линий.

Ключевые слова: изотропная линия, минимальная поверхность, циклоида, линейный элемент поверхности, изометрическая сеть координатных линий.

CONSTRUCTION OF THE MINIMAL SURFACES BY MEANS OF ISOTROPIC CURVES, LYING ON THE IMAGINARY SURFACE OF REVOLUTION OF THE CYCLOID

Pylypaka S., Mukvich M.

An analytical description of the minimal surfaces on the basis of spatial isotropic lines, which lie on the imaginary surface of cycloid revolution around its guide, is carried out in the paper. Parametric equations of isotropic lines are found from the condition of zero equality of the linear element of the imaginary surface of the cycloid revolution, which is assigned to the isometric grid of imaginary coordinate lines.

Key words: isotropic line, minimal surface, linear surface element, cycloid, isometric grid of coordinate lines.