УДК 514.74

РАЦІОНАЛЬНА КРИВА БЕЗЬЄ 7-ГО СТЕПЕНЯ ЗА ЗАДАНИМИ ДВОМА ТОЧКАМИ І КРИВИНАМИ ТА СКРУТОМ В НИХ

Бадаєв Ю.І., д.т.н.,
Ганношина І.М.
Державний університет інфраструктури та технологій
(м. Київ, Україна)

Розглянуто побудову просторової раціональної кривої Безьє 7-го степеня за заданими двома точками і кривинами та скрутом в них.

Ключові слова: кривина, скрут, просторова раціональна крива Безьє.

Постановка проблеми. Проблема полягає в тому, що при проектуванні обводів машин і агрегатів, які працюють у рухомому середовищі, виникає необхідність задання конкретних значень кривини уздовж обводу, а також значень скруту для обводів шляхопроводів, які призначені для переміщення рідини або сипучих матеріалів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз існуючої літератури дає змогу вважати , що ця задача зовсім або недостатньо досліджена. Ця задача частково розглянута в роботах [3,4], але тільки для кривих Безьє 5-го степеня, що звужує її застосування.

Формулювання цілей статті. Метою статті є аналітичний вивід рівняння просторової кривої за заданими точками і кривинами та скрутом в них, що дає змогу проектувати просторову криву за заданими графіками кривини та скруту.

Основна частина. Раціональна крива Безьє 7-го степеня задається формулою [2]:

$$r(t)=\frac{\sum_{i=0}^{7}B_i^7 r_i w_i t^i (1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^{7}B_i^7 w_i t^i (1-t)^{(n-i)}}, \qquad (1)$$

де $\mathbf{r_i}$- вузлові точки;

$\mathbf{w_i}$ - вага вузлової точки;

$\mathbf{t}$ – параметр $\mathbf{0<t<1.0}$;

$B_i^7=\frac{7!}{i!(n-i)!}$ - біноміальний коефіцієнт Ньютона.

Перебудуємо (1) у вигляд:

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^{7} A_i t^i}{\sum_{i=0}^{7} W_i t^i}, \qquad (2)$$

де

$$A_0 = r_0 w_0,$$
$$A_1 = 7(r_1 w_1 - r_0 w_0),$$
$$A_2 = 21(r_0 w_0 - 2r_1 w_1 + r_2 w_2),$$
$$A_3 = 35(-r_0 w_0 + 3r_1 w_1 - 3r_2 w_2 + r_3 w_3),$$
$$A_4 = 35(r_0 w_0 - 4r_1 w_1 + 6r_2 w_2 - 4r_3 w_3 + r_4 w_4),$$
$$A_5 = 21(-r_0 w_0 + 5r_1 w_1 - 10r_2 w_2 + 10r_3 w_3 - 5r_4 w_4 + r_5 w_5),$$
$$A_6 = 7(r_0 w_0 - 6r_1 w_1 - 15r_2 w_2 - 20r_3 w_3 + 15r_4 w_4 - 6r_5 w_5 + r_6 w_6),$$
$$A_7 = (-r_0 w_0 + 7r_1 w_1 - 21r_2 w_2 + 35r_3 w_3 - 35r_4 w_4 + 21r_5 w_5 - 7r_6 w_6 + r_7 w_7).$$

$$W_0 = w_0,$$
$$W_1 = 7(w_1 - w_0),$$
$$W_2 = 21(w_0 - 2w_1 + w_2),$$
$$W_3 = 35(-w_0 + 3w_1 - 3w_2 + w_3),$$
$$W_4 = 35(w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4),$$
$$W_5 = 21(-w_0 + 5w_1 - 10w_2 + 10w_3 - 5w_4 + w_5),$$
$$W_6 = 7(w_0 - 6w_1 - 15w_2 - 20w_3 + 15w_4 - 6w_5 + w_6)$$
$$W_7 = (-w_0 + 7w_1 - 21w_2 + 35w_3 - 35w_4 + 21w_5 - 7_6 w_6 + w_7).$$

Приймемо

$$\sum_{i=0}^{5} A_i t^i = A$$

$$\sum_{i=0}^{5} W_i t^i = B$$

Тоді (2) перепишеться у вигляді:

$$r(t) = \frac{A}{B}\,. \qquad (3)$$

Розрахуємо похідні від (2):

$$r'(t) = \frac{A'B - AB'}{B^2} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} r''(t) &= \frac{(A'B - \mathrm{AB'})'\mathrm{B}^2 - (A'B - AB')2BB'}{B^4} = \\ &= \frac{(\mathrm{A'B} - \mathrm{AB'})'\mathrm{B}^2}{B^4} - \frac{(A'B - AB')2BB'}{B^4} = \\ &= \frac{(A''B - AB'')}{B^2} - \frac{(A'B - AB')2BB'}{B^4} = \\ &= \frac{(\mathrm{A''B} - \mathrm{AB''})\,\mathrm{B}^2 - 2\,\mathrm{A'B}^2\,B' + 2AB'^2\,B}{B^4} = \\ &= \frac{(A''B - AB'' - 2A'B')}{B^2} + 2\frac{AB'^2}{B^3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для розрахунку третьої похідної візьмемо похідну від (5):

$$\begin{aligned} r'''(t) &= \frac{(A''B - AB'' - 2A'B')'B^2 - (A''B - AB'' - 2A'B')2BB'}{B^4} + \\ &+ 2\frac{(A'B'^2 + AB'^3)B^3 - AB'^2\,3B^2B'}{B^6} = \\ &\frac{A'''B - AB''' - 3\,\mathrm{A''B'}}{B^2} + \frac{2AB''B' + 5A'B'^2 + AB'^3}{B^3} - 3\frac{AB'^3}{B^4}. \end{aligned} \tag{6}$$

Враховуючи, що $B' = 7(w_1 - w_0)$, приймемо $w_1 = w_0 = 1.0$. Тоді $B' = 0$, і рівняння (4), (5) і (6) спростяться:

$$r'(t) = \frac{A'}{B} = \frac{7(\mathrm{r}_1 - r_0)}{B} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} r''(t) &= \frac{(A'B - \mathrm{AB'})'\mathrm{B}^2 - (A'B - AB')2BB'}{B^4} = \\ &= \frac{(\mathrm{A'B} - \mathrm{AB'})'\mathrm{B}^2}{B^4} - \frac{(A'B - AB')2BB'}{B^4} = \\ &= \frac{(A''B - AB'')}{B^2} - \frac{(A'B - AB')2BB'}{B^4} = \\ &= \frac{(\mathrm{A''B} - \mathrm{AB''})\,\mathrm{B}^2 - 2\,\mathrm{A'B}^2\,B' + 2AB'^2\,B}{B^4} = \\ &= \frac{(A''B - AB'')}{B^2}. \end{aligned} \tag{5a}$$

$$r'''(t)=\frac{(A''B-AB''-2A'B')'B^2-(A''B-AB''-2A'B')2BB'}{B^4}+$$
$$+2\frac{(A'B'^2+AB'^3)B^3-AB'^2\,3B^2B'}{B^6}=$$
$$\frac{A'''B-AB'''}{B^2}. \tag{6a}$$

При t=0 буде:

$$\begin{aligned}
&A(0)=r_0w_0=\mathrm{r}_0,\\
&A'(0)=A_1=7(r_1w_1-r_0w_0)=7(\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_0),\\
&A''(0)=2A_2=42(r_0w_0-2r_1w_1+r_2w_2)=42(\mathrm{r}_0-2r_1+r_2w_2),\\
&A'''(0)=6A_3=210(r_3w_3-3r_2w_2+3r_1w_1-r_0w_0)=210(\mathrm{r}_3\mathrm{w}_3-3\,\mathrm{r}_2\mathrm{w}_2+3\,\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_0),\\
&B(0)=w_0=1.0,\\
&B'(0)=W_1=7(w_1-w_0)=0,\\
&B''(0)=2W_2=42(w_0-2w_1+w_2)=42(\mathrm{w}_2-1),\\
&B'''(0)=6W_3=210(w_3-3w_2+3w_1-w_0)=210(\mathrm{w}_3-3\,\mathrm{w}_2+2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Кривизна кривої дорівнює [1]:

$$k_1^2=\frac{\begin{vmatrix}x''&y''\\x'&y'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y''&z''\\y'&z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z''&x''\\z'&x'\end{vmatrix}^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}=\frac{|\mathrm{r}''|^2}{|r'|^6} \tag{8}$$

$$\mathrm{k}_1=\frac{|r''|}{|r'|^3}=\frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{[\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}]^3}.$$

Скрут кривої дорівнює [1]:

$$k_2=-\frac{(r'r''r''')}{(r'\wedge r'')^2}=-\frac{\begin{vmatrix}x'&y'&z'\\x''&y''&z''\\x'''&y'''&z'''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'&y'\\x''&y''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y'&z'\\y''&z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z'&x'\\z''&x''\end{vmatrix}^2}=\frac{|r'''|}{|(r'\mathrm{x}\mathrm{r}'')|}=\frac{\sqrt{x'''^2+y'''^2+z'''^2}}{\sqrt{\begin{vmatrix}x'&y'\\x''&y''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y'&z'\\y''&z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z'&x'\\z''&x''\end{vmatrix}^2}}. \tag{9}$$

Таким чином, якщо задати дві точки r_0 і r_7 а також кривизну і скрут в цих точках $k_{1(0)}$,$k_{2(0)}$,$k_{1(7)}$,$k_{2(7)}$,то інші точки кривої (1) можна знайти наступним чином.

В точці r_0 t=0. Тоді B(0)=W_0 =w_0 =1.0. Точка r_1 визначиться із формули (4а):

$$r'(0)=\frac{A'(0)}{B(0)}=\frac{7(\mathrm{r}_1-r_0)}{B(0)}=A'=7(\mathrm{r}_1-r_0).$$

Задамо першу похідну r'(0) в точці r_0.Тобто задамо x'(0),y'(0),z'(0). Звідси:

$$r_1 = r_0 + \frac{\mathrm{r}'(0)}{7}. \tag{10}$$

Точку r_2 знайдемо за заданою кривиною $k_1(0)$. Із формули (8) маємо:

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = k_1(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |r''|^2. \tag{11}$$

Із формули (11) бачимо, що для задання повного вектора r’’ необхідно задати будь-які дві його координати із трьох: x’’,y’’,z’’. Тоді третя координата знайдеться із формули (11).

Точка r_2 визначиться формулою (5а):

$$\begin{aligned} r''(0) &= \frac{(A''(0)B(0) - A(0)B''(0)}{B^2(0)} = \frac{(42(r_0 - 2r_1 + r_2\,\mathrm{w}_2) - 42r_0(w_2 - 1.0)}{1.0} = \\ &= 42\,\mathrm{r}_0 - 84\,\mathrm{r}_1 + 42\,\mathrm{r}_2\mathrm{w}_2 - 42\,\mathrm{r}_0\mathrm{w}_2 + 42\,\mathrm{r}_0 = \\ &= 84\,\mathrm{r}_0 - 84\,\mathrm{r}_1 + 42\,\mathrm{w}_2(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_0). \end{aligned} \tag{12}$$

За формулою (12) можна визначити вектор r_2 при заданні ваги w_2:

$$r_2 = \frac{r''(0)}{42w_2} + 2r_1 - r_0 \tag{13}$$

або вагу w_2 при заданні вектора r_2:

$$w_2 = \frac{r''(0)}{42(r_2 - r_0)} + 2(r_1 - r_0). \tag{14}$$

Точку r_3 знайдемо за допомогою заданого скруту $k_2(0)$. Із формули (9) випливає:

$$\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2} = k_2\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}. \tag{15}$$

Із формули (15) бачимо, що для задання повного вектора r’’’ необхідно задати будь-які дві його координати із трьох: x’’’,y’’’,z’’’. Тоді третя координата знайдеться із формули (15)

Точка r_3 визначиться формулою (6а):

$$\begin{aligned} r'''(0) &= \frac{[A'''(0)B(0) - A(0)B'''(0)]}{B^2(0)} = \frac{(210(r_3w_3 + 3r_1 - 3r_2\,\mathrm{w}_2 - \mathrm{r}_0) - 210r_0(w_3 + 3w_1 - 3w_2 - w_0)}{1.0} = \\ &= 210\,\mathrm{r}_3\,w_3 + 630r_1 - 630r_2w_2 - 210r_0 - 210r_0w_3 - 630r_0w_1 + 630r_0w_2 + 210r_0w_0 = \\ &= 210w_3(\mathrm{r}_3 - \mathrm{r}_0) + 630\,\mathrm{r}_1 - 630\,\mathrm{r}_2\mathrm{w}_2 + 630\,\mathrm{r}_0\mathrm{w}_2 - 630\,\mathrm{r}_0. \end{aligned} \tag{16}$$

За формулою (16) можна визначити вектор r_3 при заданні ваги w_3:

$$r_3 = \frac{r'''(0)}{210w_3} + r_0 - \frac{3[r_1 + w_2(r_2 - r_0) + r_0]}{w_3} \qquad (17)$$

або вагу w_3 при заданні вектора r_3:

$$w_3 = \frac{r'''(0)}{210(r_3 - r_0)} - 3\frac{[r_1 + w_2(r_0 - r_2) - r_0]}{(r_3 - r_0)}. \qquad (18)$$

Якщо в (1) замість t підставити (1-u), то (1) можна переписати наступним чином:

$$r(u) = \frac{\sum_{i=7}^{0} B_i^7 r_i w_i u^i (1-u)^{(n-i)}}{\sum_{i=7}^{0} B_i^7 w_i u^i (1-u)^{(n-i)}}, \qquad (19)$$

тобто контрольні точки поміняються місцями:

$r_0 = r_7$, $r_1 = r_6$, $r_2 = r_5$, $r_3 = r_4$, $r_4 = r_3$, $r_5 = r_2$, $r_6 = r_1$, $r_7 = r_0$.

Тому, на основі (10)-(14), (17)-(18) можна написати:

$$r_6 = r_7 + \frac{r'(1)}{7}. \qquad (20)$$

$$r_5 = \frac{r'''(1)}{42w_5} + 2r_6 - r_7. \qquad (21)$$

$$w_5 = \frac{r''(1)}{42(r_5 - r_7)} + 2(r_6 - r_7). \qquad (22)$$

$$r_4 = \frac{r'''(0)}{210w_4} + r_0 - \frac{3[r_6 + w_5(r_5 - r_7) + r_7]}{w_4}. \qquad (23)$$

$$w_4 = \frac{r'''(1)}{210(r_4 - r_7)} - 3\frac{[r_6 + w_5(r_7 - r_5) - r_7]}{(r_4 - r_7)}. \qquad (24)$$

Таким чином всі точки кривої (1) за заданими умовами знайдені.

Висновки. В роботі отримані формули для побудови кривих із заданим графіком кривини та скруту на основі застосування раціональної кривої Безьє 7-го степеня, що актуально при проектуванні обводів машин і агрегатів, які працюють в рухомому середовищі.

Література

1. Погорелов А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.:Наука. – 1983. – 288с.
2. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов – М.: Физматлит, 2002. – 472 с.

3. Бадаєв Ю.І. Моделювання плоскої кривої із заданим законом кривини / Ю.І. Бадаєв, І.М. Ганношина // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць міжн. конф. – Мелітополь: МДПУ, 2015. – Вип.4. – С. 14-17.
4. Бадаєв Ю.І. Проектування просторової кривої із заданими законами кривини та скруту / Ю.І. Бадаєв, І.М. Ганношина // Вісник Вінницького політехнічного інституту: збірник наукових праць міжн. конф. –Вінниця: ВНТУ, 2016. – Вип. №4. – С. 44-51.

РАЦИОНАЛЬНАЯ КРИВАЯ БЕЗЬЕ 7-й СТЕПЕНИ ПО ЗАДАННЫМ ДВУМ ТОЧКАМ, А ТАКЖЕ КРИВИЗНАМ И КРУЧЕНИЕМ В НИХ

Бадаев Ю.И., Ганношина И.Н.

Рассмотрены построение пространственной рациональной кривой Безье 7-й степени по заданным двум точкам и кривизнам и кручениям в них.

Ключевые слова: кривизна, кручение, пространственная рациональная кривая Безье.

RATIONAL CURVES BY BEZIER SEVEN STEPPING FOR TWO POINTS AND CURVILINEAR AND SCREWS IN THESE

Badayev Y., Gannoshina I.

The construction of the spatial rational Bezier curve of the 7th degree for the given two points and curvilinear and difficulty in them is considered.

Keywords: curvature, difficulty, Bezier spatial rational curve.