

УДК 515.2

КЕРУВАННЯ ФОРМОЮ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ ПОВЕРХНІ ЗА РАХУНОК ВКЛЮЧЕННЯ ЗАДАНИХ ВУЗЛІВ

Ботвіновська С.І., к.т.н.,¹

Золотова А.В., к.т.н.

*Київський національний університет будівництва і архітектури
(м. Київ, Україна)*

У статті розглянуто теоретичні питання керування формою дискретно представленої поверхні (ДПП), каркас якої можна отримати з використанням статико-геометричного методу (СГМ) шляхом включення у каркас заданих вузлів як крайових умов. Відмінність такого підходу у тому, що з'являється можливість моделювати єдину поверхню не складену, що може стати визначальним моментом при виборі методу моделювання криволінійної поверхні у процесі архітектурного проектування. Поставлені у роботі задачі розв'язані з врахуванням проведеного параметричного аналізу, який дозволив знайти функціональні залежності між невідомими та заданими параметрами поверхні та далі використовувати їх для розв'язання задач з іншими вихідними умовами.

Ключові слова: геометричне моделювання, параметричний аналіз, зовнішнє формоутворююче навантаження, дискретний каркас, статико-геометричний метод.

Постановка проблеми. У практиці архітектурного проектування часто зустрічаються поверхні (оболонки) які покривають унікальні споруди і самі є унікальними, як з точки зору оригінальності геометричної форми так і функціонального призначення. В процесі моделювання подібних об'єктів виникають задачі забезпечення естетичних характеристик [2] при збереженні заданих вихідних даних. В процесі моделювання форми покриття архітектору або дизайнеру необхідно мати можливість керувати його формою. При використанні СГМ формування каркаса майбутньої поверхні це можна зробити шляхом включення у каркас майбутньої поверхні наперед заданих ліній або вузлів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В основі будь-якого комплексного геометричного моделювання об'єктів архітектури та дизайну лежить аналіз всіх вихідних даних. За результатами проведення параметричного аналізу можна формально визначити, чи

¹ Науковий консультант – д.т.н., професор Ковальов С.М.

буде мати розв'язок та або інша задача за заданими вихідними даними. Параметричний аналіз дозволяє також виявити надлишкову інформацію, яка також може ускладнити процес моделювання у майбутньому.

Наукові дослідження в області дискретного моделювання криволінійних поверхонь з використанням СГМ та проведенням параметричного аналізу зустрічаються у роботах [1, 2-6]. Аналіз існуючих публікацій [2-6], в яких розглядаються подібні задачі дозволив зробити висновки, що моделювання ДПП завжди відбувається з урахуванням залежностей між параметрами об'єкта моделювання. Але, у цих роботах не розглядалися питання можливого формоутворення єдиної нескладеної поверхні, яка не буде мати стикування частин і, відповідно, не розглядалися питання керування формою такої поверхні. А саме це є один із важливих моментів моделювання криволінійної поверхні для архітекторів та дизайнерів.

Формулювання цілей статті. Мета роботи – визначити можливості керування формою дискретного каркаса криволінійної поверхні, якщо включати до вихідних умов крім заданого опорного контура окремі вузли або ламані.

Основна частина. Однією з найважливіших задач, які виникають в процесі дискретного геометричного моделювання криволінійних поверхонь покриття є керування їх формою шляхом додавання (включення) у каркас цих поверхонь ліній заданої форми та положення або вузлів, положення яких задано.

Відомо, що СГМ [1] при формуванні дискретних каркасів поверхонь дозволяє за крайові умови призначати не тільки опорний контур, але і окремі задані вузли [3, 5] при цьому, кожна задана координата такого вузла зменшує на одиницю число невідомих у системі рівнянь рівноваги вузлів, що порушує баланс між числом невідомих та числом рівнянь.

Цей баланс відновлюється за рахунок задання невідомих параметрів зусиль зовнішнього навантаження. Узагальнення такого підходу (включення у каркас поверхні окремих заданих вузлів) може бути включенням у дискретний каркас поверхні заданого ланцюга в'язей, що у відомих дослідженнях до цього часу не розглядалося.

Якщо, дискретно представлена лінія, яка включається в дискретний каркас модельованої поверхні визначається вузлами сітки, через які вона проходить, то задача зводиться до параметричного аналізу ДПП, де невідомими є як координати вузлів сітки, так і параметри зусиль зовнішнього формоутворюючого навантаження, з наступним складанням і розв'язанням системи рівнянь рівноваги вузлів сітки. Система рівнянь рівноваги вузлів доповнюється системою рівнянь залежностей між параметрами зусиль. Результатом

параметричного аналізу повинна бути відповідність числа невідомих числу рівнянь. Розглянемо деякі приклади побудови ДПП з урахуванням заданих вузлів та ліній дискретного каркаса.

Приклад 1 (рис. 1). Змоделюємо розтягнуту сітку на квадратному плані, якщо задано опорний контур з двох ламаних у паралельних площинах $x=0$ та $x=40$ лін. од. та двох півкіл $x^2 + y^2 = 20^2$, де $0 \leq z \leq 20$ у площинах $y=0$ та $y=40$ (рис. 1, а). Маємо шістнадцять вузлів крайового контура рівномірно розміщених вздовж цих елементів з кроком $t=10$. В умовних лінійних одиницях задано координати вузлів: $A(x=0; y=0; z=0)$, $A'(x=0; y=40; z=0)$, $B(x=20; y=0; z=20)$, $B'(x=20; y=40; z=20)$, $C(x=4; y=0; z=0)$, $C'(x=40; y=40; z=0)$, $D(x=0; y=20; z=20)$, $D'(x=40; y=20; z=20)$.

Необхідно визначити координати вузлів розтягнутої сітки. Координати проміжних вузлів опорного контура, розміщених на інтервалах $[A, A']$ і $[A, C]$ визначено з умови, що вузли розділяють ці інтервали на чотири рівні частини (рис. 1, а). Маємо: $(x_{10}=10; y_{10}=0; z_{10}=17.3205)$, $(x_{30}=30; y_{30}=0; z_{30}=17.3205)$, $(x_{01}=0; y_{01}=10; z_{01}=10)$, $(x_{03}=0; y_{03}=30; z_{03}=10)$. За СГМ складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів для знаходження аплікат всіх внутрішніх вузлів для сітки з чотирикутними клітинами:

$$z_{i-1,j,u} + z_{i+1,j,u} + z_{i,j-1,u} + z_{i,j+1,u} - 4z_{i,j,u} = 0. \quad (1)$$

Підрахунок параметрів доводить, що число невідомих аплікат дорівнює числу рівнянь. Після розв'язання системи (1) і визначення аплікат всіх внутрішніх вузлів будемо дискретний каркас поверхні (рис. 1, а).

Додамо до вихідних даних попередньої задачі центральний вузол $M(x=20; y=20; z=35)$. Система рівнянь рівноваги вузлів (1) налічує 9 рівнянь, а за таких вихідних умов маємо лише 8 невідомих аплікат. Необхідно зберегти баланс між числом невідомих та числом рівнянь. Для цього додаємо у кожне рівняння системи (1) невідоме зусилля, що буде прикладатись до кожного вузла дискретної сітки. Це зусилля буде однаковим для всіх вузлів.

$$z_{i-1,j,u} + z_{i+1,j,u} + z_{i,j-1,u} + z_{i,j+1,u} - 4z_{i,j,u} + kP = 0, \quad (2)$$

де k - коефіцієнт пропорційності між зусиллям та довжиною в'язі за СГМ. Після розв'язання системи рівнянь (2) отримуємо невідомі аплікати вузлів та величину зовнішнього навантаження. За цими результатами на рис. 1, б побудовано дискретний каркас поверхні із заданим центральним вузлом. Зауважимо, що у цій задачі апліката вузла М задана, але вузол не є точкою опори поверхні і рівняння рівноваги для цього вузла записується у загальну систему (2). Отримана поверхня є єдиною, нескладеною без особливих точок.

Якщо, з будь якої причини необхідно задати чотири внутрішні і два зовнішні вузла: $D(x = 0; y = 20; z = 20)$, $E(x = 10; y = 20; z = 18)$, $M(x = 20; y = 20; z = 24)$, $K(x = 20; y = 30; z = 30)$, $L(x = 30; y = 30; z = 25)$, $G(x = 40; y = 30; z = 10)$, а зовнішній вигляд поверхні вимагає появи на ній заданої лінії, що є ланцюгом із в'язей та заданих вузлів (рис. 1, в) то згідно із заданими умовами можна скласти систему рівнянь:

$$z_{i-1,j,u} + z_{i+1,j,u} + z_{i,j-1,u} + z_{i,j+1,u} - 4z_{i,j,u} + kP_{i,j} = 0 \quad (3)$$

Підрахунок параметрів показує, що при 9 рівняннях системи рівноваги вузлів маємо 5 невідомих аплікат $z_{i,j}$ внутрішніх незаданих вузлів і 9 невідомих зовнішніх зусиль $kP_{i,j}$, прикладених до кожного з вузлів сітки. Невідомих більше ніж рівнянь. Для встановлення балансу необхідно задати функціональний розподіл між зовнішніми зусиллями і, всі невідомі зусилля перезадати через чотири будь-які невідомі $kP_{i,j}$, додавши до системи (3) п'ять додаткових рівнянь:

$$P_{i-1,j,u} + P_{i+1,j,u} + P_{i,j-1,u} + P_{i,j+1,u} - 4P_{i,j,u} = 0. \quad (4)$$

Такий функціональний розподіл зовнішніх зусиль відповідає розподілу зусиль по поверхні гіпара. Додатково необхідно ще задати зовнішні зусилля, прикладені до всіх вузлів опорного контуру. У наведеному прикладі всі ці зусилля обрано такими, що дорівнюють одиниці. Розв'язання системи лінійних рівнянь, яка складається із 9 рівнянь (3) і 5 рівнянь (4) існує, оскільки число рівнянь – 14 дорівнює числу невідомих – 14. Після розв'язання такої системи отримуємо п'ять невідомих аплікат вузлів серед інших невідомих і будуємо дискретний каркас поверхні, аксонометрія і проекції якої наведено на рис. 1, в.

Спробуємо узагальнити отримані результати. На рис. 2, а, б показано топологічну схему сітки, де товстою лінією виділено крайові умови, які складаються з ліній опорного контуру і лінії $ABCDE$, яка включається у каркас поверхні.

Система рівнянь рівноваги вузлів сітки налічує $3(m-1)(n-1)$ рівнянь, за кількістю координат внутрішніх вузлів сітки (крім вузлів опорного контуру). Нехай, задано лінію $ABCDE$, що має ще t заданих вузлів, крім вузлів A і E .

Тоді, система рівнянь рівноваги вузлів налічує $[3(m-1)(n-1)] - 3t$ невідомих координат вузлів сітки і $3(m-1)(n-1)$ невідомих координатних складових зусиль зовнішнього формоутворюючого навантаження. Отримане число невідомих перевищує число рівнянь на величину $[3(m-1)(n-1)] - 3t$.

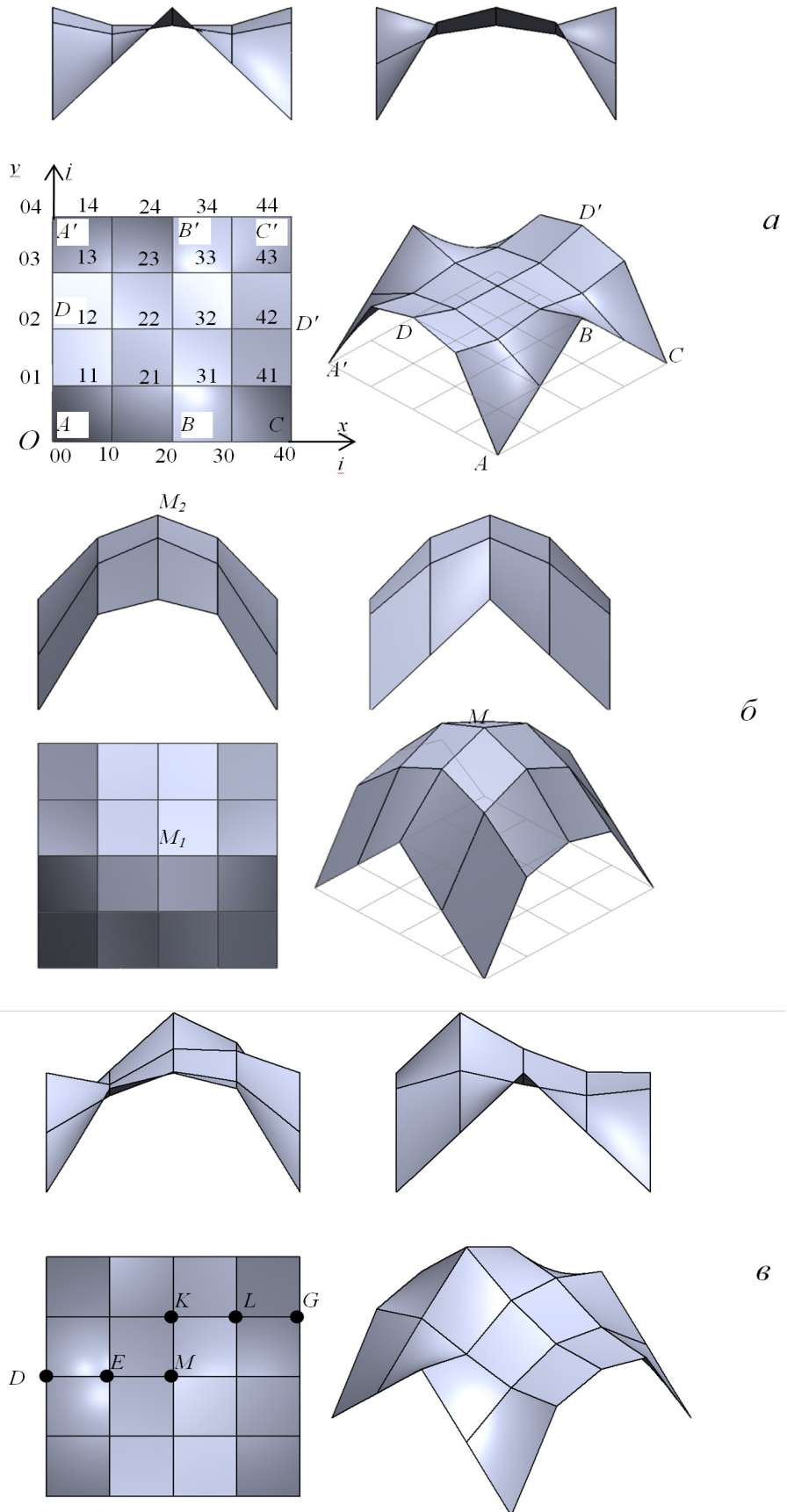


Рис. 1 Каркаси ДПП та приклади включення у каркаси додаткових заданих вузлів

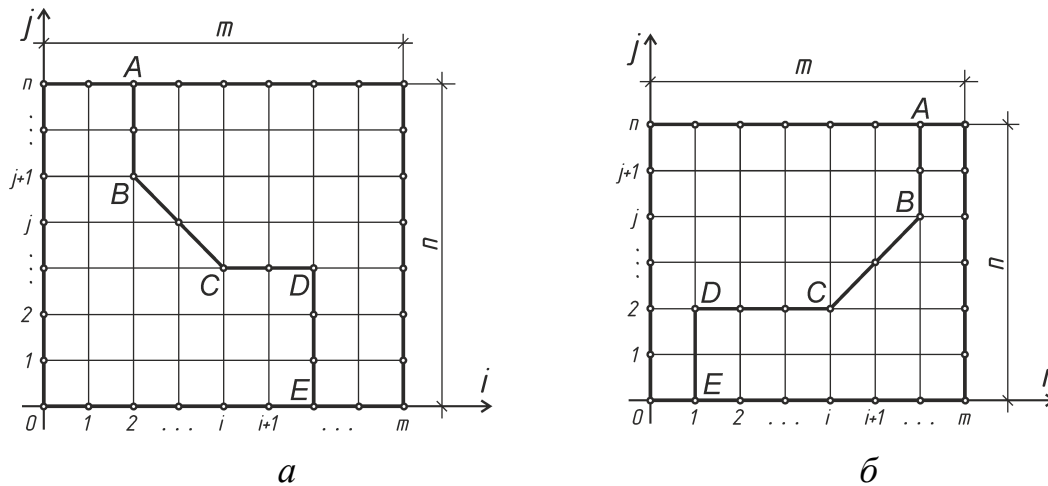


Рис. 2 Топологічні схеми сіток із заданими крайовими умовами та додатковими лініями і вузлами, які необхідно включити у каркас модельованої поверхні

Для збереження балансу між числом рівнянь і числом невідомих необхідно до системи рівнянь рівноваги вузлів додати $[3(m-1)(n-1)] - 3t$ рівнянь залежності між координатними складовими зовнішніх зусиль, що дорівнює числу невідомих координат внутрішніх вузлів сітки.

Тобто, необхідно записати рівняння залежності між координатними складовими зовнішніх зусиль, для кожного вузла сітки, координати якого невідомі. Такі рівняння для сіток з чотирикутними клітинами мають вигляд:

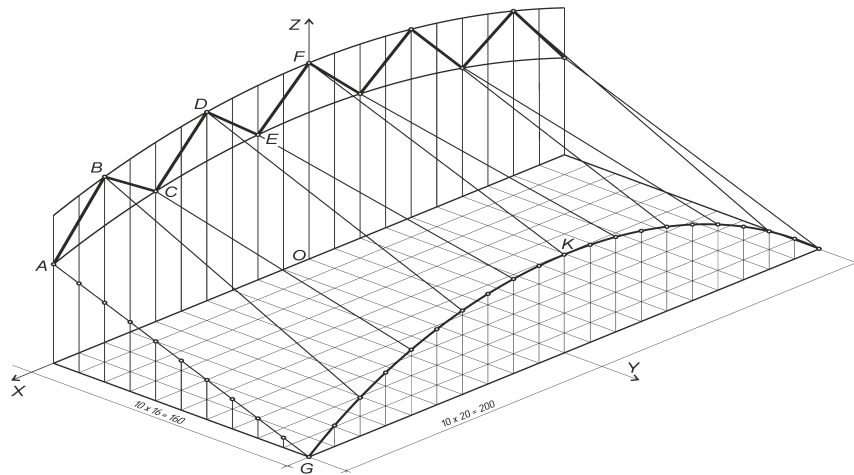
$$P_{i-1,j,u} + P_{i+1,j,u} + P_{i,j-1,u} + P_{i,j+1,u} - 4P_{i,j,u} = 0, \quad (5)$$

причому, слід задати величини $P_{i,0,u}$, $P_{i,n,u}$, $P_{0,j,u}$, $P_{m,j,u}$ координатних складових зусиль у вузлах всіх елементів $i=0$ і $j=0$ опорного контуру. Такі координатні складові можна задавати довільно і, тоді вони також будуть параметрами управління формою дискретної сітки модельованої поверхні.

Топологія сітки не впливає на алгоритм розв'язання задачі, але рівняння (5) повинно відповідати топології кожного вузла сітки.

Покажемо побудову стикованої ДПП до каркасу якої необхідно задати додаткові вузли та ламану.

Приклад 2 (рис. 3). Задано прямокутний план сітки із сторонами $m=200$ лін. од. і $n=160$ лін. од. з квадратними в плані клітинами і вздовж координатних напрямів $h=10$ лін. од. Вузли крайового контуру задано в симетричних площинах. Опорний контур складається з двох однакових дуг кіл $x^2 + (z-105)^2 = 145^2$, у площинах $y = \pm 80$ лін. од., і з двох ламаних $y \pm 2z \pm 80 = 0$ у двох паралельних площинах $x = \pm 100$ лін. од. при умові, що $0 \leq z \leq 40$.



На

Рис. 3. Вихідні дані модельованої поверхні

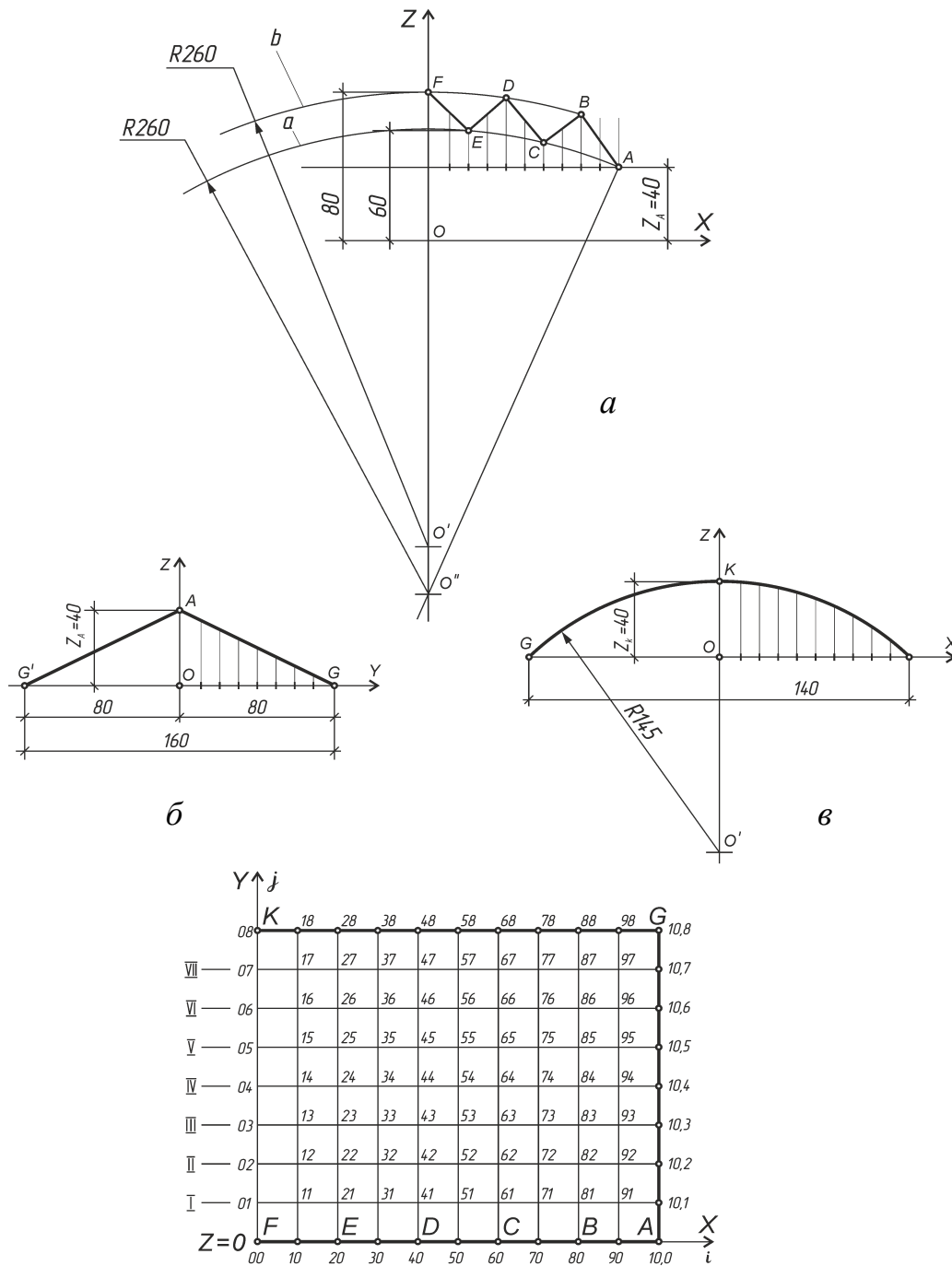
рис. 4, а представлено ламану $ABCDEF$, яку необхідно включити до дискретного каркаса ДПП. Вузли A, C, E ламаної та симетричні їм вузли відносно площини симетрії $x=0$ належать колу (а) $x^2 + (z-200)^2 - 260^2 = 0$ у площині $y=0$, а вузли ламаної B, D, F та симетричні їм відносно площини симетрії $x=0$ належать колу (б) $x^2 + (z-180)^2 - 260^2 = 0$. Крок заданих вузлів ламаної опорного контура вздовж осі Ox дорівнює $h=20$ лін. од. (рис. 4, а). Тоді, абсциси і аплікати вузлів ламаної $ABCDEF$ приймають значення:

$$\begin{array}{ll} x_A = 100.0; z_A = 40.0; & x_D = 40.0; z_D = 76.9050; \\ x_B = 80.0; z_B = 67.3860; & x_E = 20.0; z_E = 59.2300; \\ x_C = 60.0; z_C = 52.9820; & x_F = 0.0; z_C = 80.0; \end{array}$$

Геометричну форму інших елементів заданого опорного контура та положення їх вузлів представлено на рис. 4, б, в. Нумерація вузлів сітки відповідає топологічній схемі сітки, що представлено на рис.4, г.

Зусилля зовнішнього формоутворюючого навантаження прийнято вертикальними і тому, клітини сітки у плані залишаються квадратними.

Рівняння рівноваги (3) вузлів сітки з урахуванням симетрії вихідних даних складаються для 1/4 частини плану. Ця система налічує 80 рівнянь, серед яких є рівняння рівноваги вузлів, аплікати яких невідомі, і рівняння рівноваги вузлів заданої ламаної лінії $ABCDEF$. Рівняння залежностей між величинами векторів зусиль зовнішнього навантаження (5), які додаються до системи (2).



2

Рис. 4 Задані компоненти опорного контура поверхні та топологічна схема сітки

Величини координатних складових $P_{10,j,z}$, $P_{i,8,z}$ зусиль, що прикладено до вузлів опорного контуру по лініям $i=10$ і $j=8$ прийнято рівними одиниці. Система рівнянь залежностей зовнішніх зусиль налічує 70 рівнянь, які складаються тільки для вузлів, аплікати яких невідомі, тобто для всіх внутрішніх вузлів сітки крім вузлів ламаної $ABCDEF$. У цьому разі ДПП складається з двох частин, які гладко стикуються уздовж ламаної $ABCDEF$. Тоді, загальне число

рівнянь системи, яку необхідно розв'язати дорівнює сумі невідомих аплікрат $z_{i,j}$ та невідомих координатних складових $P_{i,j,z}$ зовнішніх зусиль, і налічує 150 рівнянь. Система рівнянь залишається лінійною. За результатами розв'язання описаних систем рівнянь типу (3) і (5) на рис. 5 побудовано проєкції та аксонометрію дискретного каркаса стикованої поверхні.

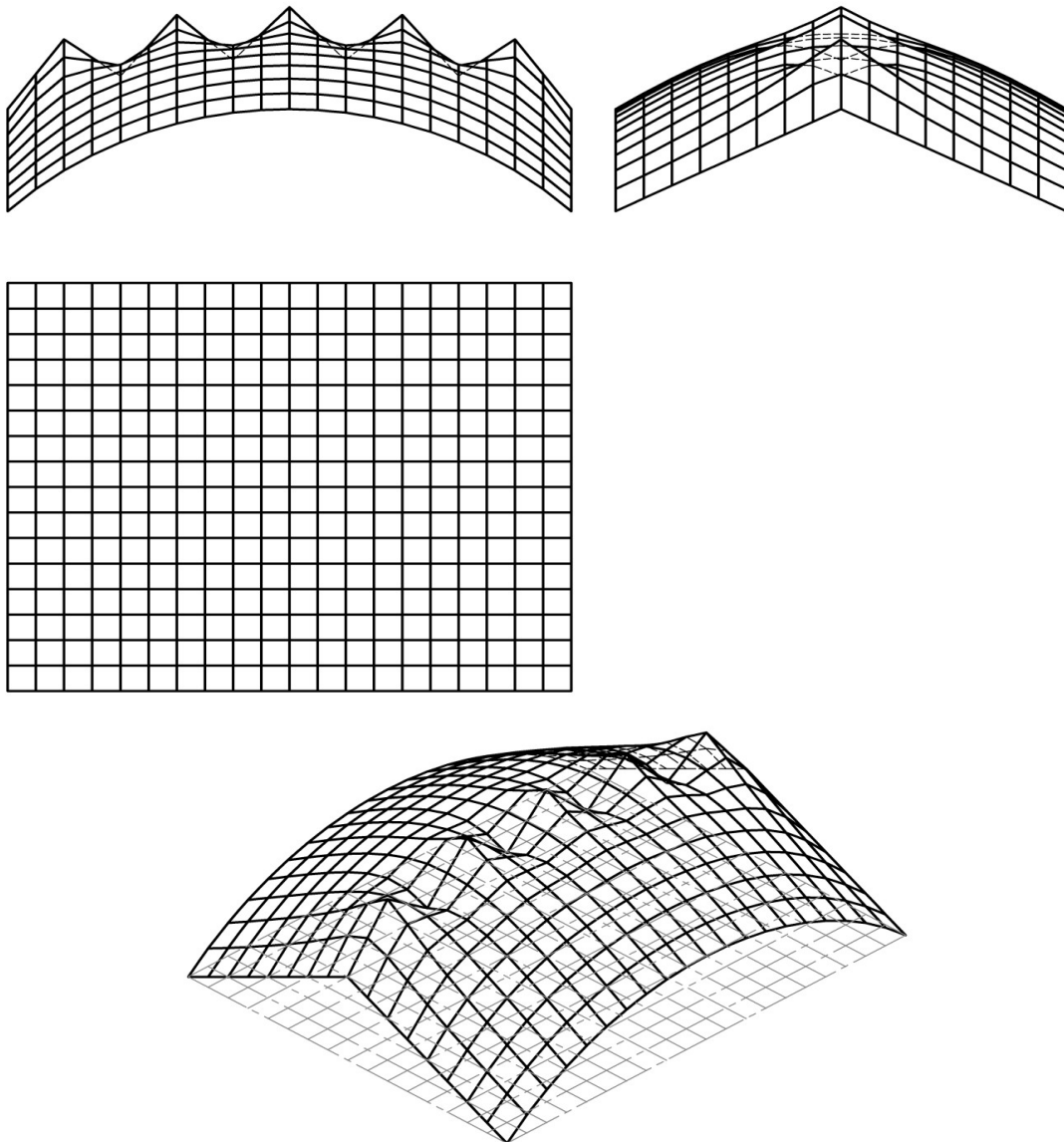


Рис. 5. Дискретний каркас поверхні, яка моделюється із заданою додатковою лінією каркаса ДПП

Висновки. До параметрів форми модельованої ДПП, серед інших, належать координати вузлів опорного контура, або будь які інші задані вузли. Крім того параметрами ДПП виступають зовнішні формоутворюючі зусилля, прикладені до вузлів сітки, включаючи вузли опорного контура. Змінюючи ці параметри можна отримати нескінчену множину різноманітних дискретних каркасів поверхонь на заданих опорних контурах, серед яких можна обрати саме ту форму, яка буде задовольняти поставленим вимогам.

Крім того, змінюючи ці параметри, можна міняти дискретний каркас вже обраної поверхні, задаючи все нові додаткові вузли або лінії як вихідні умови це, в свою чергу, дозволить керувати формою поверхні, що моделюється.

Література

1. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис.....док. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія та інженерна графіка" / С.Н. Ковалёв. – М.: МАИ, 1986. – 348с.
2. Ковальов, С.Н. Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями в дизайні та архітектурі / С.Н. Ковальов, С.І. Ботвіновська, А.В. Золотова // Управління розвитком складних систем. – 2016. - № 26.
3. Золотова А.В. Дискретна двовимірна кускова інтерполяція з другим порядком гладкості стикування порцій [Текст] / А.В.Золотова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 179 – 184.
4. Ботвіновська С.І. Моделювання криволінійних поверхонь об'єктів дизайну та управління їх формою [Текст] / С.І.Ботвіновська // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Сучасні проблеми архітектури та містобудування». – Київ: КНУБА, 2017. – Вип. 47. – С.451-457.
5. Ковальов С.М. Формування дискретного ряду точок складених кривих ліній під дією нормального навантаження [Текст] / С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська, А.В. Золотова, С.О.Лось // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон.: ХНТУ, 2017. – Вип. 3(62). Т.2. -352 с. С. 278-284.
6. Ботвіновська С.І. Керування формою дискретно представлених поверхонь за рахунок варіювання параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження [Текст] / С.І.Ботвіновська // Журнал «Проблеми інформаційних технологій» № 22/2017: Херсонський національний технічний університет #01(022) грудень 2017. – С. 63-69.

УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗА СЧЕТ ВКЛЮЧЕНИЯ В ЕЕ КАРКАС ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УЗЛОВ И ЛИНИЙ

Ботвиновская С.И., Золотова А.В.

В статье рассмотрены теоретические вопросы управления формой дискретно представленной поверхности, каркас которой получен с использованием статико-геометрического метода (СГМ), путем включения в этот каркас заданных узлов в качестве исходных данных. Отличительной особенностью такого подхода является возможность получения большого разнообразия форм единой (не составной) криволинейной поверхности в процессе архитектурного проектирования. Это может стать определяющим моментом при выборе метода моделирования. Представленные задачи решены с учетом проведенного параметрического анализа, который позволил найти функциональные зависимости между неизвестными и заданными параметрами поверхности и далее использовать их для решения задач с различными исходными данными.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, параметрический анализ, внешняя формообразующая нагрузка, дискретный каркас, статико-геометрический метод

CONTROLLING THE FORM OF THE SURFACE REPRESENTED DISCRETELY BY INCLUDING GIVEN NODES

Botvinovska S., Zolotova A.

In this article are considered the theoretical problems how to control the shape of a discretely presented surface, the skeleton of which is obtained using SGM, by using as initial data the given nodes included into the framework. A distinctive feature of this approach is the possibility of obtaining a wide variety of forms of a single (not composite) curved surface in the process of architectural design. This can become a defining criterion of choosing the modeling method. The presented problems are solved with taking into account the parametric analysis that has made it possible to find functional dependencies between unknowns and given surface parameters and then to use them for solving problems with different initial data.

Keywords: geometric modeling, parametric analysis, external form-building load, discrete skeleton, static-geometric method.