

УДК 514.18

## КОВЗАННЯ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ПЛОЩИНІ, ЯКА ЗДІЙСНЮЄ ПОСТУПАЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПО ЕПІЦИКЛОЇДІ

Несвідомін В.М., д.т.н.,

Бабка В.М., к.т.н.,

Несвідомін А.В., к.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування  
України (м. Київ, Україна)*

*Досліджено ковзання частинки по шорсткій площині, яка  
здійснює поступальні коливання по епіциклоїді в цій площині.*

*Ключові слова: шорстка площина, ковзання частинки,  
поступальні коливання, епіциклоїда, траєкторія, швидкість.*

**Постановка проблеми.** В більшості технологічних процесах пов'язаних з взаємодією сипучого матеріалу і рухомої шорсткої поверхні, остання здійснює переносний коливальний рух по прямій або ж по колу. Цікаво дослідити ковзання частинки по коливальній площині, яка здійснює переносний поступальний рух по епіциклоїді. Складність дослідження ковзання частинки по такій рухомій шорсткій площині залежить від параметрів епіциклоїди та початкових умов кидання частинки. Рішення цієї проблеми можливе за рахунок розробки комп'ютерної моделі з інтерактивним режимом дослідження.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Аналітичні основи руху частинки по шорстких поверхнях робочих органів с.-г. машин наведено в класичних працях [2, 3]. Застосування супровідного тригранника траєкторії для опису руху частинки по поверхні показано в праці [4].

**Формулювання цілей статті.** Розробити аналітичне та програмне забезпечення для середовища символічної алгебри Maple [1] комп'ютерну модель ковзання частинки по шорсткій площині, яка здійснює поступальні коливання по епіциклоїді в цій площині.

**Основна частина.** Нехай маємо шорстку похилу площину:

$$R(u, v) = R[u \cos(\beta), v, -u \sin(\beta)] \quad (1)$$

де  $\beta$  – кут повороту горизонтальної площини  $R[u, v, 0]$  навколо осі  $Oy$  декартової системи координат  $Oxyz$  ;

$u, v$  – аргументи координатних ліній площини  $R(u, v)$  .

Нехай напрямною кривою переносного руху площини  $R(u, v)$  є епіциклоїда з параметричним рівнянням вигляду:

$$r(t) = r \left[ a(a+b) \left( \cos(t) - \frac{\cos((b+1)t)}{b+1} \right), a(a+b) \left( \sin(t) - \frac{\sin((b+1)t)}{b+1} \right) \right],$$

де  $a, b$  – параметри форми епіциклоїди.

Ковзання частинки в шорсткій площині суттєво залежить від її переносного руху, в даному випадку від параметрів форми  $a, b$  епіциклоїди. На рис.1 побудовано зображення траєкторії довільної точки площини в залежності від параметрів форми  $a, b$  епіциклоїди та їх швидкість. Звернемо увагу, що на відміну від переносного руху площини по колу, її швидкість змінюється зигзагоподібно від нуля до значення  $(b+1)a\sqrt{2-2\cos(bt)}$ .

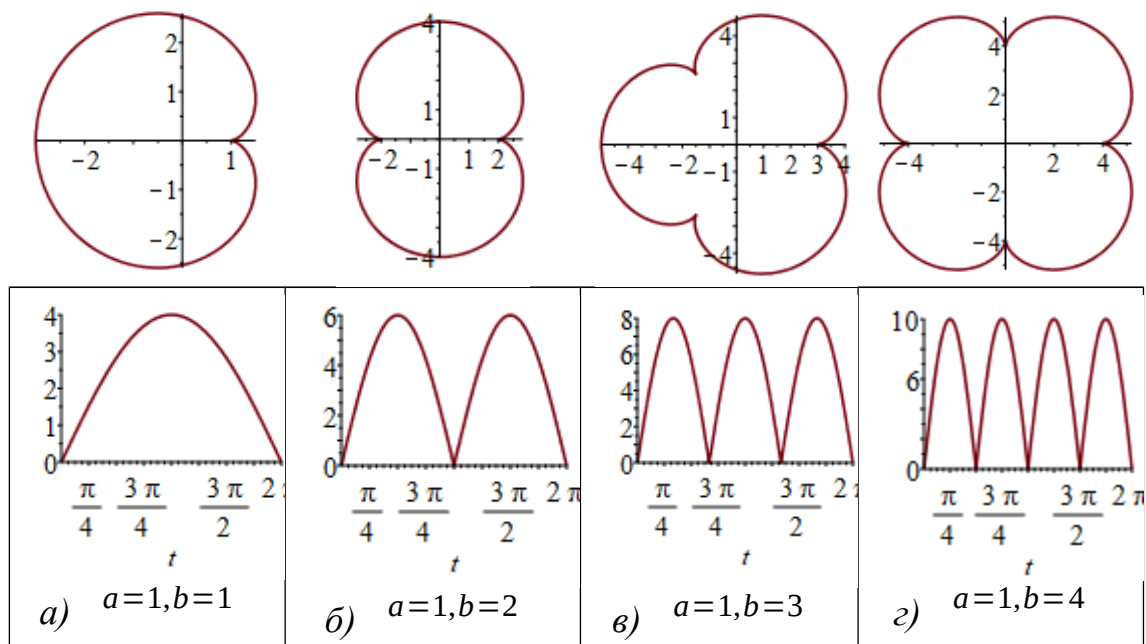


Рис.1. Траєкторії переносного руху площини та графіки її швидкості

Рівняння переносного руху площини по епітрохіді, яка лежить в цій площині матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 & (\omega t) \sin(b\omega t) + \cos(\omega t) \\
 & a(\sin \dot{\iota}(b - \cos(b\omega t) + 1)) \cos(\beta); \\
 & \dot{\iota} \\
 & (\omega t) \cos(b\omega t) - \cos(\omega t) \sin(b\omega t) + \sin(\omega t) \\
 & a(-\sin \dot{\iota}(b+1)) \\
 & \dot{\iota} \\
 & \dot{\iota} \\
 & \dot{\iota}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$M(t) = M \left[ (\omega t) \sin(b\omega t) + \cos(\omega t) - a(\sin \dot{\iota}(b - \cos(b\omega t) + 1)) \sin(\beta) \dot{\iota}, \dot{\iota} \right]$$

де  $t, c$  – час;

$\omega, c^{-1}$  – параметр переносного руху.

Оскільки при поступальному русі площини відсутнє Кориолісове прискорення, то виведення закону руху частинки для такого випадку значно спрощується. Так, абсолютна траєкторія площини при її поступальному русі є сумою вектор-функцій (1) і (2):

$$H(u, v, t) = R(u, v) + M(t) = \dot{\zeta}$$

$$\begin{aligned} & (\omega t) \sin(b\omega t) + \cos(\omega t) \\ & a(\sin \dot{\zeta}(b - \cos(b\omega t) + 1)) \cos(\beta) + u \cos(\beta), \\ & (\omega t) \cos(b\omega t) - \cos(\omega t) \sin(b\omega t) + \sin(\omega t) \\ & a(-\sin \dot{\zeta}(b + 1)) \\ & + v, \end{aligned} \quad (3)$$

$$H[(\omega t) \sin(b\omega t) + \cos(\omega t) - a(\sin \dot{\zeta}(b - \cos(b\omega t) + 1)) \sin(\beta) \dot{\zeta} - u \sin(\beta) \cdot \dot{\zeta}]$$

Векторне рівняння руху частинки у шорсткій площині, яка здійснює поступальні переміщення в просторі має вигляд:

$$m w = mg G - f(\pm F_g \cos(\widehat{N, G}) \pm F_c \cos(\widehat{N, n})) \tau_\rho, \quad (4)$$

де:  $m$  – маса частинки;

$w$  – вектор абсолютного прискорення частинки;

$\tau_\rho = \frac{V_\rho}{|V_\rho|}$  – одиничний вектор відносної швидкості частинки;

$N$  – вектор нормалі вздовж траєкторії у відносному русі частинки;

$G = [0, 0, -1]$  – одиничний вектор сили тяжіння;

$F_g = mg$  – сила тяжіння,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;

$F_c = m V^2 k$  – відцентрова сила, де  $V$  – абсолютна швидкість частинки, а  $k$  – кривина абсолютної траєкторії частинки.

В проекціях на орти  $u \equiv R'_u$  і  $v \equiv R'_v$  тригранника  $OuvN$

векторне рівняння руху частинки (4) у функції часу  $t$  буде мати вигляд:

$$\begin{cases} Ou := mW \cos(\widehat{R_u, w}) = F_g \cos(\widehat{R_u, G}) - f F_N \cos(\widehat{R_u,}) \\ Ov := mW \cos(\widehat{R_v, w}) = F_g \cos(\widehat{R_v, G}) - f F_N \cos(\widehat{R_v,}) \end{cases} \quad (5)$$

Вище наведене аналітичне забезпечення (1)-(5) складає основу розробленого додатку до системи комп'ютерної алгебри Maple [1] дослідження ковзання частинки по шорсткій площині  $R$ , яка здійснює поступальні переміщення по напрямній  $M(t)$ . В середовищі Maple автоматично формується закон руху частинки (5), рівняння яких є настільки громіздкими, що приводить їх тут не має можливості.

Наведемо результати експериментальних досліджень ковзання частинки по шорсткій рухомій площині при таких змінних параметрів, як коефіцієнт тертя  $f=0.3$ , початкової швидкості  $V_0=2\text{ м/с}$  кидання, куту  $\beta=0$  положення площини в залежності різного кута  $\alpha_0$  кидання частинки та параметрів  $a$  і  $b$  форми напрямної епіциклоїди. На рис.2 побудовано абсолютну  $r(t)$ , відносну  $\rho(t)$  траєкторії частинки, графіки її абсолютної  $V(t)$  та відносної  $V_\rho(t)$  швидкостей для рухомої площини  $\omega=1\text{ с}^{-1}$  в залежності від кута  $\alpha_0=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$  кидання частинки, параметрів форми епіциклоїди  $a=1$ ,  $b=1$ . Для цих вихідних параметрів всі частинки кинуті в різні сторони під кутами  $\alpha_0$  зупиняться вже через проміжок  $t \approx 6\text{ с}$  – в момент, коли швидкість переносного руху площини дорівнюватиме нулю.

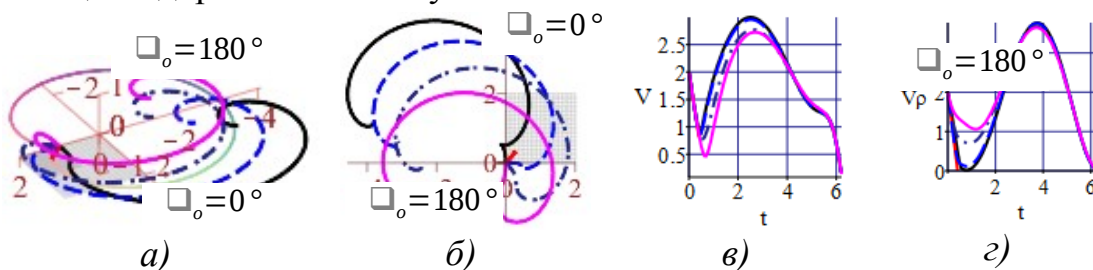


Рис.2. Траєкторії  $r(t)$ ,  $\rho(t)$  та графіки швидкостей  $V(t)$ ,  $V_\rho(t)$  частинки в залежності від кута  $\alpha_0$  її кидання при  $\omega=1\text{ с}^{-1}$ ,  $a=1$ ,  $b=1$

Для того щоб частинки не зупинялися ковзати в площині, досить збільшити параметр  $\omega$  до значення  $\omega=1.2c^{-1}$  (рис.3). В цьому випадку всі частинки віддаляючись від початку координат через проміжок часу  $t=2.5c$  будуть наближатися до конгруентних траєкторій в різних місцях рухомої шорсткої площини.

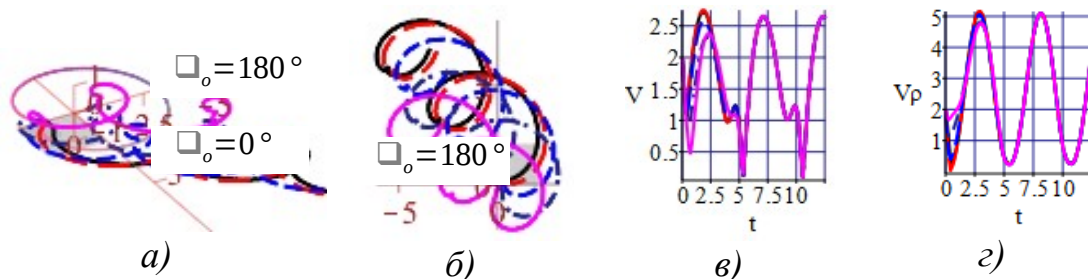


Рис.3. Траєкторії  $r(t)$ ,  $\rho(t)$  та графіки швидкостей  $V(t)$ ,  $V_\rho(t)$  частинки в залежності від кута  $\alpha_0$  її кидання при  $\omega=1.2c^{-1}$ ,  $a=1$ ,  $b=1$

Змінимо форму переносної траєкторії площини по епіциклоїді - візьмемо значення параметра форми  $a=1$ ,  $b=2$  і  $\omega=1c^{-1}$ . На відміну від попередніх випадків, епіциклоїда має дві точки звороту 1-го роду (рис.4). Зрозумілим є збільшення вдвічі частоти зміни абсолютної  $V(t)$  та відносної  $V_\rho(t)$  швидкостей частинок, які ніколи вже не зупиняться.

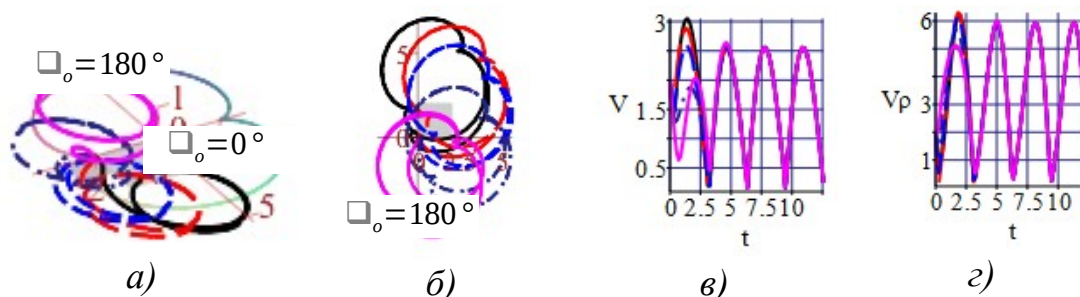


Рис.4. Траєкторії  $r(t)$ ,  $\rho(t)$  та графіки швидкостей  $V(t)$ ,  $V_\rho(t)$  частинки в залежності від кута  $\alpha_0$  її кидання при  $\omega=1c^{-1}$ ,  $a=1$ ,  $b=2$

Із збільшенням параметра форми  $b$  епіциклоїди до значення  $b=3$  – переносна траєкторія площини має вже три точки звороту (рис.5). Можна побачити деяке зменшення амплітуди абсолютної

$V(t)$  швидкості та збільшення відносної  $V_\rho(t)$  швидкості частинок при їх стабілізації ковзання – при  $t > 3c$ .

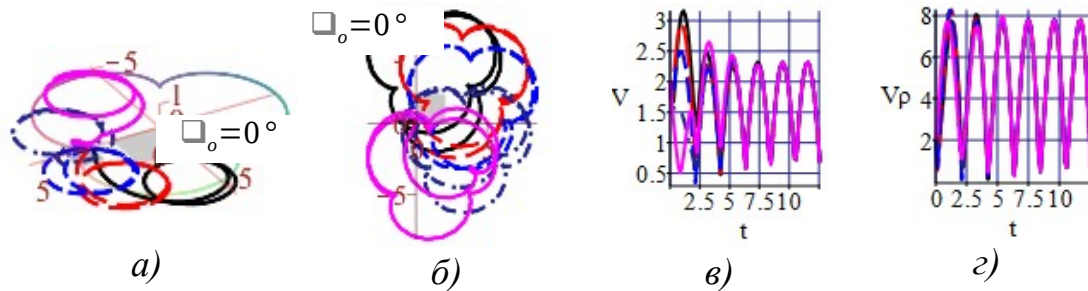


Рис.5. Траєкторії  $r(t)$ ,  $\rho(t)$  та графіки швидкостей  $V(t)$ ,  $V_\rho(t)$  частинки в залежності від кута  $\alpha_0$  її кидання при  $\omega = 1c^{-1}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$

Аналогічно було досліджено траєкторно-кінематичні властивості ковзання частинки по шорсткій коливальній площині по епіциклоїді в залежності від коефіцієнта тертя  $f$ , початкової швидкості  $V_0$  кидання, куту  $\beta$  положення.

**Висновки.** З'ясовано, що зміна параметра  $b$  форми епіциклоїди, який впливає на кількість точок звороту, збільшує частоту відносної швидкості частинки та її амплітуду – частинки переходять в режим стаціонарного руху по конгруентних епіциклоїдах.

### Література

- 1 Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007.– 458 с.
- 2 Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
- 3 Блехман И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. – М.: Наука, 1964. – 410 с.
- 4 Несвідомін А.В. Комп'ютерне моделювання руху частинки по нерухомих шорстких поверхнях в проекціях на орти супровідного тригранника траєкторії: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія та інженерна графіка" / А.В.Несвідомін. – К., 2016. – 24 с.

**СКОЛЬЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО ШОРСТОКОЙ ПЛОСКОСТИ,  
КОТОРАЯ СОВЕРШАЕТ ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
ПО ЭПИЦИКЛОИДЕ**

Несвидомин В.Н., Бабка В.Н., Несвидомин А.В.

*Проведены исследования скольжения частицы по шероховатой плоскости, которая осуществляет поступательные колебания по эпициклоиду в этой плоскости.*

*Ключевые слова: шероховатая плоскость, скольжения частицы, поступательные колебания, эпициклоида, траектория, скорость.*

**SLIDING OF A PARTICLE ON A PLANE THAT MAKES  
PERIODIC OSCILLOUS VIBRATIONS ON EPICYCLOID**

Nesvidomin V., Babka V., Nesvidomin A.

*Investigations of the slip of a particle along a rough plane that carries out translational oscillations along an epicycloid are carried out.*

*Key words: rough surface, particle slip, translational oscillations, epicycloid, trajectory, velocity.*