УДК 514.18

АНАЛІТИЧНІ ЗАЛЕЖНОСТІ УТВОРЕННЯ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ НА УЯВНИХ ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Муквич М.М., к.т.н.[1]
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

У роботі визначено аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній, які лежать на уявних поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки уявних координатних ліній. Знайдено параметричні рівняння ізотропних ліній та мінімальних поверхонь, побудованих на основі уявного циліндра, віднесеного до ізометричної сітки уявних координатних ліній.

Ключові слова: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, лінійний елемент поверхні, середня кривина поверхні.

Постановка проблеми. Розширення способів аналітичного опису ізотропних ліній та мінімальних поверхонь зумовлене задачами проектування поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Геометрична форма мінімальної поверхні забезпечує рівномірний розподіл зусиль при взаємодії оболонки з середовищем без врахування крайових ефектів [1, с. 152]. Умова рівності нулю величини середньої кривини H мінімальної поверхні у всіх її точках є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні [2, с. 683].

Відомими є сучасні дослідження три-періодичних мінімальних поверхонь (або мінімальних поверхневих структур) та вивчення можливості їх застосування: від біологічних мембран до штучного синтезу будівельних матеріалів. Три-періодичні мінімальні поверхневі структури, які характеризуються оптимізованими фізичними властивостями, ідентифікуються у багатьох природних системах [3].

Задача знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь приводить до диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [2, с. 683] в частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується.

Проблема спрощення аналітичного опису мінімальних поверхонь та отримання їх параметричних рівнянь, починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), реалізується за допомогою методів теорії функцій комплексної змінної [2, с. 685]. Аналітичний опис мінімальних

[1] Науковий консультант – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснюють у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини. Моделювання ізотропних ліній на основі ізотропного параметричного многочлена Лагранжа розглянуто у роботі [4]. Ряд робіт [5, 6] авторів статті присвячена задачі знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній [7, с. 54]. При цьому потребує дослідження проблема аналітичного опису ізотропних ліній, які належать уявним поверхням обертання, віднесеним до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній.

Формулювання цілей статті. Визначити аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній, які лежать на уявних поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки уявних координатних ліній. Знайти параметричні рівняння ізотропних ліній та мінімальних поверхонь, побудованих на основі уявного циліндра, віднесеного до ізометричної сітки уявних координатних ліній.

Основна частина. Розглянемо уявну поверхню, утворену при обертанні меридіана, заданого параметричними рівняннями $\varphi = \varphi(\tau)$; $\psi = \psi(\tau)$, на деякий кут, комплексна величина якого дорівнює: $(a + bi)\cdot w$, де $a, b \in R$; $w \in [0;\ 2\pi)$; $i -$ уявна одиниця. Параметричні рівняння цієї уявної поверхні обертання є функціями комплексної змінної і мають вигляд:

$$X(\tau; w) = \varphi(\tau)\cdot cos[(a + bi)w];\quad Y(\tau; w) = \varphi(\tau)\cdot sin[(a + bi)w];$$
$$Z(\tau; w) = \psi(\tau). \qquad (1)$$

Вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми [7, с. 40] уявної поверхні (1), заданої рівняннями $X(\tau, w),\ Y(\tau, w), Z(\tau, w)$, мають вигляд [7, с. 40]:

$$E = (X'_\tau)^2 + (Y'_\tau)^2 + (Z'_\tau)^2 = (\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2;$$
$$F = X'_\tau\cdot X'_w + Y'_\tau\cdot Y'_w + Z'_\tau\cdot Z'_w = 0;$$
$$G = (X'_w)^2 + (Y'_w)^2 + (Z'_w)^2 = (a + bi)^2\cdot\varphi^2(\tau).$$

Лінійний елемент [7, с. 53] уявної поверхні (1) запишеться у вигляді:

$$ds^2 = \left((\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2\right)\cdot d\tau^2 + (a + bi)^2\cdot\varphi^2(\tau)\cdot dw^2. \qquad (2)$$

Перетворимо вираз (2) до вигляду:

$$ds^2 = (a + bi)^2\cdot\varphi^2(\tau)\cdot\left[\frac{(\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2}{(a + bi)^2\cdot\varphi^2(\tau)}\cdot d\tau^2 + dw^2\right]. \qquad (3)$$

Уведемо заміну: $dt^2 = \dfrac{(\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2}{(a+bi)^2 \cdot \varphi^2(\tau)} \cdot d\tau^2$, тоді вираз (3) можна записати у вигляді:

$$ds^2 = (a+bi)^2 \cdot \varphi^2(\tau) \cdot [dt^2 + dw^2]. \qquad (4)$$

Лінійний елемент (4) поверхні (1) визначає ізометричну (або ізотермічну) координатну сітку поверхні [7, с. 54].

Перетворивши вираз указаної заміни, отримаємо умову переходу від ортогональної до ізометричної сітки координатних ліній для уявної поверхні (1):

$$t = \frac{1}{a+bi} \cdot \int \frac{\sqrt{(\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2}}{\varphi(\tau)} \cdot d\tau. \qquad (5)$$

Приклад. Розглянемо поверхню уявного циліндра, заданого параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} &X(\tau; w) = r \cdot \cos[(a+bi) \cdot w]; \\ &Y(\tau; w) = r \cdot \sin[(a+bi) \cdot w]; \quad Z(\tau; w) = \tau, \end{aligned} \qquad (6)$$

де r – радіус основи циліндра; $w \in [0;\ 2\pi)$; $\tau, a, b \in R$.

Знайдемо умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній, підставивши вирази $\varphi(\tau) = r;\ \psi(\tau) = \tau$ у (5), і, після перетворень, отримаємо залежність:

$$t = \frac{1}{(a+bi) \cdot r} \cdot \int d\tau = \frac{\tau}{(a+bi) \cdot r} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала інтегрування.

Нехай $C_1 = 0$, тоді умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній запишемо у вигляді:

$$\tau = (a+bi) \cdot r \cdot t.$$

Підставивши останній вираз у (6), отримаємо параметричні рівняння уявного циліндра, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній:

$$\begin{aligned} &X(t; w) = r \cdot \cos[(a+bi) \cdot w]; \\ &Y(t; w) = r \cdot \sin[(a+bi) \cdot w]; \quad Z(t; w) = (a+bi) \cdot r \cdot t, \end{aligned} \qquad (7)$$

де r – радіус основи циліндра; $t, a, b \in R$; $w \in [0;\ 2\pi)$.

Тоді лінійний елемент уявного циліндра (7), віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, має вигляд:

$$ds^2 = (a+bi)^2 \cdot r^2 \cdot [dt^2 + dw^2]. \qquad (8)$$

Розклавши на множники вираз (8), отримаємо:

$$ds^2 = (a+bi)^2 \cdot r^2 \cdot (dt - i \cdot dw)(dt + i \cdot dw),$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$t = i \cdot w + C \text{ або } t = -i \cdot w + C, \qquad (9)$$

де C – довільна стала інтегрування.

Лінійний елемент (8) уявного циліндра визначає довжину будь-якої лінії, яка йому належить. Тому при підстановці виразів (9) у параметричні рівняння уявного циліндра (7) отримаємо параметричні рівняння двох сімей уявних ізотропних ліній нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу $t = i \cdot w + C$ у рівняння (7) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння ізотропної лінії, яка лежить на поверхні уявного циліндра:

$$x(w) = r \cdot \cos[(a+bi) \cdot w];$$
$$y(w) = r \cdot \sin[(a+bi) \cdot w]; \quad z(w) = (a+bi) \cdot r \cdot (i \cdot w + C). \tag{10}$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у рівняннях (10) уведемо заміну: $w = u + i \cdot v.$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (10), отримаємо рівняння мінімальної поверхні ($C -$довільна стала):

$$X(u,v) = r \cdot \cos(au - bv) \cdot \mathrm{ch}(bu + av);$$
$$Y(u,v) = r \cdot \sin(au - bv) \cdot \mathrm{ch}(bu + av); \; Z(u,v) = r(-bu - av + ac); \tag{11}$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u,v) = -r \cdot \sin(au - bv) \cdot \mathrm{sh}(bu + av);$$
$$Y^*(u,v) = -r \cdot \cos(au - bv) \cdot \mathrm{sh}(bu + av); \; Z^*(u,v) = r \cdot (au - bv + bc). \tag{12}$$

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (11) і (12) відповідно, при $a = 1;\; b = 2;\; r = 1;\; C = 0;\; u \in [-0{,}9;\ldots 0{,}9]; \quad v \in [-0{,}9;\ldots 0{,}9].$

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (11) та приєднаної поверхні (12) дорівнюють:

$$E = G = (a^2 + b^2) \cdot r^2 \cdot \mathrm{ch}(bu + av); \; F = 0.$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (11) дорівнюють:

$$L = -N = (a^2 - b^2) \cdot r; \quad M = -2abr.$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (12) дорівнюють:

$$L^* = -N^* = 2abr; \quad M^* = (a^2 - b^2) \cdot r.$$

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм побудованих поверхонь (11) та (12), перетворюють вираз середньої кривини H для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

Вираз (8) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = (a+bi)^2 \cdot r^2 \cdot (dw - i \cdot dt)(dw + i \cdot dt).$$

а б

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих на основі ізотропної лінії (10):
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (11);
б) відсік приєднаної мінім. поверхні, побудованої за рівняннями (12)

Тоді з аналогічних міркувань можна знайти аналітичний опис двох сімей ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь, які мають спільні метричні властивості та властивості кривини із мінімальними поверхнями (12), (13).

Висновки. На поверхні уявного циліндра для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній, і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

Література

1. Гуляев В.И. Расчёт оболочек сложной формы [Текст] / В.И. Гуля-ев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, В.В. Гайдайчук. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Математическая энциклопедия [Текст] / [гл. ред. И. М. Виногра-дов]. – Т. 3. – М.: «Сов. энциклопедия», 1982. – С. 683–690.
3. Han Lu. An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems [Електроний ресурс] / Lu Han, Shunai Che // Advanced Materials. – 2018. – Vol. 30. – Issue 17. – P. 1705708. Available at: https://doi.org/10.1002/adma.201705708
4. Аушева Н.М. Конструювання поверхонь та ортогональних сіток на основі ізотропного параметричного многочлена Лагранжа

[Електроний ресурс] / Н.М. Аушева // Містобудування та територіальне планування. – К.: КНУБА, 2016. – № 59. – С. 16-22. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/MTP_2016_59_7
5. Пилипака С.Ф. Конструирование минимальных поверхностей с помощью изотропных кривых, лежащих на поверхности тора [Текст] / С.Ф. Пилипака, Н.Н. Муквич // MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture». – Vol. 18, No 3. – Lublin – Rzeszov, 2016. – С. 101 – 110.
6. Пилипака С.Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №6. – С. 91–95.
7. Фиников С. П. Теория поверхностей [Текст] / С. П. Фиников. – М. – Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ НА МНИМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н.

Определены аналитические зависимости образования пространственных изотропных линий, лежащих на мнимых поверхностях вращения, отнесённых к изометрической сети мнимых координатных линий. Получены параметрические уравнения изотропных линий и минимальных поверхностей, построенных на основании мнимого цилиндра.

Ключевые слова: изотропная линия, минимальная поверхность, линейный элемент поверхности, средняя кривизна поверхности.

ANALYTICAL CONDITIONS FOR THE FORMATION OF ISOTROPIC LINES ON THE IMAGINARY SURFACES OF REVOLUTION

Pylypaka S., Mukvich M.

The article analyzes the dependence of the formation of spatial isotropic lines that lie on the imaginary surfaces of rotation, which are assigned to the isometric grid of imaginary coordinate lines. Parametric equations of isotropic lines and minimal surfaces constructed on the basis of an imaginary cylinder are found.

Key words: isotropic line, minimal surface, linear surface element, mean curvature of surface.