УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ОБРАЗІВ ПЛОСКИХ КРИВИХ З ЛАНКАМИ ОДНАКОВОЇ ДОВЖИНИ

Скочко В. І., к.т.н.*
Київський національний університет будівництва і архітектури (Україна)

При побудові дискретних образів кривих ліній на площині може виникнути потреба у тому, щоб відстані між суміжними точками цього образу були однаковими. В якості одного з варіантів вирішення даної задачі пропонується використання дискретних образів, подібних до реальних механічних систем із накладанням на їх вільні вузли спеціальних функціональних умов в процесі пошуку їх координат. Даний підхід базується на принципах пошуку умовних екстремумів функцій багатьох змінних.

Ключові слова: дискретний образ, умовний екстремум функції.

Постановка проблеми. Часто в процесі проектування технічних форм різноманітних об'єктів виникає потреба у побудові їх плоских перерізів, зокрема при визначенні траєкторій руху робочих механізмів й інструментів машин і обладнання, які пошарово здійснюють механічну обробку або формування різних матеріалів та заготовок, а також при 3D друці. В силу того, що характер роботи комп'ютерного обладнання, контролерів та механізмів, які задіяні у створенні технічних об'єктів, є дискретним, неперервним функціям форми цих об'єктів також властивий дискретний характер, а дані про відповідні форми зберігаються у вигляді векторів, або матриць. Окрім того, коли мова йде про технічні форми, що в процесі експлуатації мають піддаватися механічним впливам різної природи, ці форми, як правило, розраховуються на міцність та стійкість. Інженери та науковці прагнуть не допускати виникнення концентрації напружень на поверхнях результуючих об'єктів. Для цього слід забезпечувати максимальну однорідність поверхонь та їх плоских перерізів й уникати наявності випадкових точок спеціального типу (перегину, звороту, розгалуження ізольованих точок та ін.). В той же час, сталого кроку дискретизації по окремих осях стає вже недостатнім для досягнення даної мети.

Одним із можливих шляхів часткового вирішення даної проблеми є побудова дискретних образів плоских кривих (ДОПК) у кожному перерізі з заданням сталої відстані між суміжними точками.

* Науковий консультант – д.т.н., професор Плоский В.О.

Однак, в цьому випадку пошук координат точок дискретно представленої кривої стає досить непростою задачею, яка вимагає оперування натуральними параметрами кривої (довжиною, наприклад). Отже, пошук точних та наочних підходів до побудови ДОПК з ланками однакової довжини є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В публікаціях [1] та [2] було представлено два способи побудови ДОПК функцій, заданих в неявній формі. Один із цих способів передбачає задання на площині моделей, що інтерпретують деякі сітчасті структури (механічні стрижневі системи) та перебувають у стані статичної рівноваги під дією зовнішніх навантажень. Початкове формоутворення таких моделей відбувається у відповідності до статико-геометричного методу (СГМ) формування дискретних образів [5]. Рівняння рівноваги вільних вузлів моделі одержуються шляхом проекціювання векторів сил $\overline{\Im}_i$, що діють на вузол ззовні, та векторів внутрішніх зусиль відсічених стрижнів $\overline{R}_{i,j}$ на координатні осі. В найбільш універсальній та узагальненій формі ці рівняння для довільного i-го вузла виглядатимуть наступним чином:

$$\sum_{j=1}^{k}\left(s_j - s_i\right)\cdot \aleph_{i,j} + \Im_{s\,i} = 0 \tag{1}$$

тут s – узагальнююче позначення координат x та y; k – кількість незафіксованих вузлів конструкції, суміжних з i-м; $\aleph_{i,j}$ – параметри умовної жорсткості ланок, що виражаються відношеннями абсолютних величин поздовжніх зусиль у цих ланках $R_{i,j}$ до їх довжин $\delta_{i,j}$:

$$\aleph_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j} \tag{2}$$

Після одержання початкової форми в процесі вирішення системи рівнянь типу (1) відносно невідомих координат, здійснюється корегування параметрів $\aleph_{i,j}$ моделі шляхом складання та ітераційного розв’язання системи параметричних рівнянь стану усіх ланок [3, 4]. Ці рівняння у найбільш простій формі мають наступний вид:

1) для ланок, що з’єднують два вільні вузли (S_a і S_b):

$$\sum_{i=1}^{l-1}\delta_{a,i}^2\cdot\aleph_{a,i} + \chi\cdot\delta_{a,b}^2\cdot\aleph_{a,b} + \sum_{j=1}^{m-1}\delta_{b,j}^2\cdot\aleph_{b,j} - \left(\varphi_a + \varphi_b\right) + B_{a,b} = 0 \tag{3}$$

2) для ланок, що з’єднують вільний і зафіксований вузли (S_a і S_{fix}):

$$\sum_{i=1}^{l-1}\delta_{a,i}^2\cdot\aleph_{a,i} + \chi\cdot\delta_{a,fix}^2\cdot\aleph_{a,fix} - \varphi_a + \left(R_{x\,fix}\cdot x_{fix} + R_{y\,fix}\cdot y_{fix}\right) + B_{a,fix} = 0 \tag{4}$$

де l і m – кількість вузлів суміжних із a-м та b-м (або fix-м) вузлами; χ – константа, величина якої обумовлюється топологією моделі; φ_a і φ_b

– вузлові значення скалярного потенціалу (поля цільової функції); $R_{s\,fix}$ – проекції зусиль у ланках, що з'єднуються з зафіксованими вузлами; $B_{a,b}$ і $B_{a,fix}$ – загальні операційні константи інтегрування.

Процес корегування параметрів $\aleph_{i,j}$ здійснюється шляхом поетапної заміни поточних значень потенціалів φ_i (значень досліджуваної функції ς) на обумовлені постановкою задачі очікувані їх величини φ'_i. В результаті спільного розв'язання систем рівнянь типу (1), (3) та (4) одержуються шукані координати вільних вузлів та відповідні параметри $\aleph_{i,j}$. Якщо мова не йде про пошук деякої ізолінії скалярного поля, то очікуване значення потенціалу φ'_i має в усіх вільних вузлах моделі дорівнювати нулю й відповідати значенням досліджуваної функції ς в точках, що належать її графіку:

$$\varphi'_i = \varsigma(x_i, y_i) = 0 \quad (5)$$

.

В [5] було продемонстровано спосіб побудови дискретних кривих з рівними ланками для інтерпретації моделей з навантаженнями нормальними до кривої у кожній її точці на основі СГМ.

Формулювання цілей статті. Розробка способу побудови ДОПК із заданими довжинами ланок.

Основна частина. Перш за все, розглянемо природу рівнянь (3) та (4). Вони одержуються інтегруванням рівнянь (1) по координатах s_a і s_b (або s_{fix}) з подальшим додаванням проінтегрованих тотожностей та з урахуванням заміни коефіцієнтів при спільних для обох тотожностей довжинах $\delta_{a,b}$ (або $\delta_{a,fix}$). Інтегральне рівняння деякого окремого i-го вузла, згідно має наступний вигляд [6]:

$$\sum_{j=1}^{k} \delta_{i,j}^2 \cdot \aleph_{i,j} - \varphi_i + G_i = 0 \quad (6)$$

,

де G_i – константа інтегрування окремого i-го рівняння рівноваги.

Ліву частину рівняння (6) можна розглядати як локальну цільову функцію, мінімум якої визначається при її диференціюванні, а також одержанні й розв'язанні рівнянь типу (1). Тоді умову рівновіддаленості суміжних вузлів ДОПК можна ввести до рівняння (6) на основі наступного твердження: якщо координати кожного i-го вузла моделі, при умові належності графіку досліджуваної функції ς, водночас задовільнятимуть рівнянням кіл з центрами у двох суміжних (i-1)-му та (i+1)-му вузлах, а радіуси даних кіл (r_{i-1} та r_{i+1}) будуть однаковими й рівними L, то й уся побудована дискретна крива складатиметься з ланок однакової довжини L. Дане твердження проілюстроване на рисунку 1. Спираючись на це твердження, побудуємо функцію Лагранжа з множниками $\lambda_{i,i-1}$ та $\lambda_{i,i+1}$. Функція матиме вид [7]:

$$F_i = \sum_{j=1}^{k} \delta_{i,j}^2 \cdot \aleph_{i,j} - \varphi_i + \lambda_{i,i-1} \cdot f_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}) + \lambda_{i,i+1} \cdot f_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) + G_i \qquad (7)$$

,

де

$$f_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}) = (x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2 - L^2 \qquad (8)$$

,

$$f_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 - L^2 \qquad (9)$$

.

Маючи функцію Лагранжа (7) з введеними в неї умовами (8) та (9), знайдемо умовні екстремуми цієї функції, визначивши часткові похідні по x_i, y_i, $\lambda_{i,i\text{-}1}$ та $\lambda_{i,i+1}$ й, прирівнявши одержані похідні до нуля. Одержимо уточнені рівняння статичної рівноваги вільних вузлів моделі (для скорочення замінимо дві тотожності з x та y на одну рівність із s):

$$\sum_{j=1}^{k} \left(s_j - s_i\right) \cdot \aleph_{i,j} + \wp_{s\,i} = 0 \qquad (10)$$

,

$$(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2 - L^2 = 0 \qquad (11)$$

,

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 - L^2 = 0 \qquad (12)$$

,

де

$$\wp_{s\,i} = \Im_{s\,i} - 2 \cdot \left[\lambda_{i,i-1} \cdot (s_{i-1} - s_i) + \lambda_{i,i+1} \cdot (s_{i+1} - s_i) \right] \qquad (13)$$

.

Як видно з рисунку 1, можливі випадки, коли рівняння типу (10) – (12) визначатимуть положення усіх вільних вузлів моделі, що мають належати кривій досліджуваної функції ς, окрім 1-го (першого) й n-го (останнього) вузлів, оскільки ці два вузли мають задовольняти умові належності лише по одному колу, описаному навколо 2-го й (n-1)-го вільних вузлів відповідно. В цих випадках, для 1-го й n-го вузлів функції Лагранжа матимуть наступну спрощену форму:

$$F_1 = \sum_{j=1}^{k} \delta_{1,j}^2 \cdot \aleph_{1,j} - \varphi_1 + \lambda_{1,2} \cdot f_2(x_2, y_2) + G_2 \qquad (14)$$

,

де

$$f_2(x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L^2 \qquad (15)$$

;

$$F_n = \sum_{j=1}^{k} \delta_{n,j}^2 \cdot \aleph_{n,j} - \varphi_n + \lambda_{n,n-1} \cdot f_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) + G_n \qquad (16)$$

,

де

$$f_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) = (x_{n-1} - x_n)^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 - L^2 \qquad (17)$$

.

Рівняння рівноваги цих вузлів виглядатимуть наступним чином:

$$\sum_{j=1}^{k}\left(s_j - s_2\right)\cdot \aleph_{2,j} + \wp_{s2} = 0, \tag{18}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L^2 = 0, \tag{19}$$

де

$$\wp_{s2} = \Im_{s2} - 2\cdot\lambda_{1,2}\cdot(s_2 - s_1); \tag{20}$$

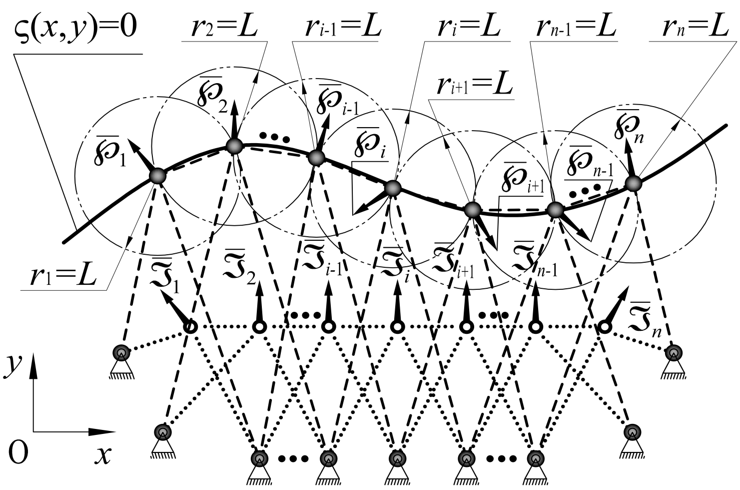
$$\sum_{j=1}^{k}\left(s_j - s_n\right)\cdot \aleph_{n,j} + \wp_{sn} = 0, \tag{21}$$

$$(x_{n-1} - x_n)^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 - L^2 = 0, \tag{22}$$

де

$$\wp_{sn} = \Im_{sn} - 2\cdot\lambda_{n,n-1}\cdot(s_{n-1} - s_n). \tag{23}$$

Складаючи рівняння типу (10) – (13), (18) і (19) та (21) і (22) для кожного вільного вузла моделі, одержимо систему з $(4\times(n-2) + 2\times2) = 4\times(n-1)$ рівнянь (де n – кількість вільних вузлів). Розв'язуючи цю систему відносно невідомих координат та параметрів λ, отримаємо шукану форму ДОПК функції ς.



Умовні позначення: ——— – неперервний графік функції ς; – – – – – шуканий дискретний образ графіка функції ς; ·········· – дискретний образ, одержаний у першому наближенні; ○ і ● – вільні вузли дискретного образу в початковій та шуканій формах відповідно; – зафіксовані вузли дискретного образу.

Рис.1. Принцип побудови ДОПК з ланками однакової довжини

Висновки. Запропонований підхід можна успішно використовувати для моделювання дискретних образів функцій, записаних як у явній формі, так і неявній. Окрім того, даний підхід є досить гнучким, оскільки передбачає побудову не лише класичних моделей багатоланкових ниток, але й складних (в тому числі непланарних) моделей сітчастих структур, що інтерпретують характер роботи реальних механічних стрижневих систем, зокрема плоских безмоментних ферм, рам тощо.

Література

1 Скочко В. І. Дискретна візуалізація плоских кривих, заданих функціями в неявній формі / В. І. Скочко // Містобудування та територіальне планування. – К. : КНУБА, 2017. – Вип. 64. – С. 372-383.
2 Скочко В. І. Формоутворення каркасів технічних форм, заданих на площині неявними функціями / В. І. Скочко // Підводні технології. – К. : КНУБА, 2017. – Вип. 7. – С. 3-17.
3 Скочко В. І. Рівняння параметрів стану та положення в'язей сітчастих структур / В. І. Скочко, Л. О. Скочко // Основи і фундаменти. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 34. – с 47-57.
4 Скочко В. І. Рівняння параметрів стану та положення в'язі, що сполучає вільний та закріплений вузли сітчастої структури / В. І. Скочко // Містобудування та територіальне планування. – К. : КНУБА, 2014. – С. 521-527.
5 Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1 / [С. М. Ковальов, М. С. Ігумен, С. И. Пустюльга, В. Є. Михайленко и др.]; за ред. В. Є. Михайленка. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.
6 Kulikov P. The Principles of Discrete Modeling of Rod Constructions of Architectural Objects / P. Kulikov, O. Ploskiy, V. Skochko // Motrol: Commission of Motorization and Energetics in Agriculture / Polish Academy of Sciences. – Lublin-Rzeszow, 2014. – vol. 16 (8). – С.3-10.
7 Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев; под ред. Г. Гроше, В. Циглера. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 976 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОБРАЗОВ ПЛОСКИХ КРИВЫХ СО ЗВЕНЬЯМИ ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ

Скочко В.И.

При построении дискретных образов кривых линий на плоскости может возникнуть потребность в том, чтобы расстояния между смежными точками этого образа были одинаковыми. В качестве одного из вариантов решения данной задачи предлагается использование дискретных образов, подобных

реальным механическим системам с наложением на их свободные узлы специальных функциональных условий в процессе поиска их координат. Данный подход основывается на принципах поиска условных экстремумов функций многих переменных.

Ключевые слова: дискретный образ, условный экстремум функции.

MODELING OF DISCRETE IMAGES OF PLANE CURVES WITH CONSTANT LENGTH OF LINKS

Skochko V.

When constructing discrete images of curved lines on a plane, there may be a need for the distances between consecutive points of this image to be the same. One of the variants of solving this problem is the use of discrete images similar to real mechanical systems with special functional conditions applied to their free nodes in the process of finding their coordinates. This approach is based on the principles of searching for conditional extrema of functions of several variables.

Key words: discrete image, conditional extremum of a function.