

УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ДИВЕРГЕНЦІЇ В ТОЧКАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОГО НЕВПОРЯДКОВАНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Черняк В.І., к.т.н.

Кременецький лісотехнічний коледж (Україна)

В роботі розглядається спосіб визначення дивергенції в точках дискретного векторного поля, заданого на невпорядкованій множині точок в просторах довільної вимірності.

Ключові слова: дивергенція, дискретне векторне поле, триангуляція.

Постановка проблеми. Дивергенція ($\text{div } \mathbf{a}$) — скалярне поле, яке характеризує густину джерел даного векторного поля \mathbf{a} . Дивергенція показує продукується ($\text{div } \mathbf{a} > 0$) чи поглинається ($\text{div } \mathbf{a} < 0$) векторне поле в даній точці та визначає інтенсивність (густину) цих процесів (1).

Дивергенцією векторного поля \mathbf{a} в тривимірному просторі називається скалярна величина [2]:

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz}. \quad (1)$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Якщо векторне поле задане на прямокутній сітці, то засоби MATLAB в двовимірному просторі для заданої точки визначають дивергенцію векторного поля за формулою:

$$\text{div } \mathbf{a}_5 = \frac{a_{6x} - a_{4x}}{x_2 - x_1} + \frac{a_{8y} - a_{2y}}{y_2 - y_1}, \quad (2)$$

де $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_9$ — значення векторного поля \mathbf{a} у відповідних вузлах сітки (рис. 1).

Тестування показало адекватність цього методу тільки при заданні векторного поля на рівномірній регулярній сітці.

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка способу визначення дивергенції дискретного векторного поля, заданого на невпорядкованій множині точок, в просторі довільної вимірності.



Рис. 1. Фрагмент векторного поля в двовимірному просторі, заданого на прямокутній рівномірній сітці

Основна частина. В даній праці розроблено два способи визначення дивергенції векторного поля в заданій точці.

1 спосіб. Градієнт скалярного поля в даній у класичній теорії точці визначається за формулою [2]:

$$\mathit{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (3)$$

Порівнянні формул (1) і (3) показує, що перша координата градієнта скалярного поля a_x є першою складовою дивергенції векторного поля \mathbf{a} , друга координата градієнта скалярного поля a_y є другою складовою дивергенції векторного поля \mathbf{a} , і т. д. Звідси випливає – визначення дивергенції векторного поля \mathbf{a} зводиться до визначення координат градієнтів скалярних полів, які є відповідними координатами векторного поля.

Градієнт скалярного поля визначаємо за методом, описаним в праці [3].

2 спосіб ґрунтується на тому, що координати заданого векторного поля інтерполюються поверхнею другого порядку, після чого визначається дивергенція в шуканій точці за формулою (2).

Алгоритм визначення дивергенції в точці $\mathbf{a5}$ (рис. 1) дискретного непорядкованого векторного поля в двовимірному просторі буде складатися з таких дій.

1. Апроксимуємо кожену координату векторного поля поверхнею другого порядку.

2. Проводимо через задану точку дві прямі лінії паралельно до осей координат.

3. Будуємо на цих осях точки $\mathbf{a2}$, $\mathbf{a4}$, $\mathbf{a6}$ та $\mathbf{a8}$ (рис. 1) рівновіддалені від точки $\mathbf{a5}$.

4. Визначаємо значення координат векторного поля у вказаних вище точках.

5. Визначаємо дивергенцію поля $\mathit{div} \mathbf{a}$ формулою (1).

Протестуємо і порівняємо авторські способи визначення дивергенції і спосіб, реалізований в системі комп'ютерної математики MATLAB. Для цього отримані за трьома способами значення будемо порівнювати із значеннями дивергенції, одержаними за аналітичними

рівняннями. Для кожного поля вихідні дані будемо задавати в двох варіантах: на прямокутній рівномірній сітці $[-2:0.2:4]$ (в таб. 1 похибка – чисельник) і на нерівномірній сітці $[-2:0.2:4]+\text{rand}/100$ (в таб. 1 похибка – знаменник), де **rand** – генератор випадкових чисел від 0 до 1. Похибку обрахунків будемо визначати як відношення різниці дивергенцій (обчисленої $\text{div } \mathbf{a}_D$ і аналітичної $\text{div } \mathbf{a}_A$) до величини аналітичної дивергенції:

$$\Delta = \frac{|\Delta \text{div } \mathbf{a}|}{\text{div } \mathbf{a}_A} = \frac{|\text{div } \mathbf{a}_A - \text{div } \mathbf{a}_D|}{\text{div } \mathbf{a}_A} 100\% . \quad (4)$$

Загальне значення похибки визначається як середнє арифметичне похибок у всіх точках сітки.

Таблиця 1

Похибки визначення дивергенції

	Рівняння поля та її дивергенції	Похибка (засоби MATLAB)	Похибка (перший спосіб)	Похибка (другий спосіб)
1	$\mathbf{a} = (x, y)$ $\text{div } \mathbf{a} = 2$	0	0	0
		10.57	0	0
2	$\mathbf{a} = (2x+y, x+4y)$ $\text{div } \mathbf{a} = 6$	0	0	0
		5.95	0	0
3	$\mathbf{a} = (x^2, y^2)$ $\text{div } \mathbf{a} = 2x + 2y$	9.55	3.99	0
		14.48	13.73	0
4	$\mathbf{a} = (1-\cos(2x-y), 2y^3)$ $\text{div } \mathbf{a} = 2\sin(2x-y) + 6y^2$	33.49	27.71	12.12
		36.35	29.76	11.41
5	$\mathbf{a} = (\sin(x), \sin(y))$ $\text{div } \mathbf{a} = \cos(x) + \cos(y)$	2.1199	4.3840	1.815
		2.4300	2.1497	2.268
6	$\mathbf{a} = (1-\cos(2x-y), 2y^3, z)$ $\text{div } \mathbf{a} = 2\sin(2x-y) + 6y^2 + 1$	9.5181	11.2334	2.0422
		44.9747	16.2458	1.3698
7	$\mathbf{a} = (x, y, z)$ $\text{div } \mathbf{a} = 3$	0	0	0.8745
		24.8544	0	0
8	$\mathbf{a} = (x^2, y^2, (x+z)^3)$ $\text{div } \mathbf{a} = 2x + 2y + 3(x+z)^2$	1.2429	1.0126	0.5055
		25.4921	3.3360	0.0455
9	$\mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2)$ $\text{div } \mathbf{a} = 2x + 2y + 2z$	0.8343	0.6723	2,6589
		26.6247	1.6366	0
10	$\mathbf{a} = (x, y, z, q)$ $\text{div } \mathbf{a} = 4$	0	0	3.2347
		14.5467	0	0
11	$\mathbf{a} = (x^2, 2y^3, (z-q)^2, q)$ $\text{div } \mathbf{a} = 2x + 6y^2 + 2(z-q) + 1$	10.6523	1.5071	0.3911
		22,6589	3.5435	0.2606

Висновки. Запропоновано способи визначення дивергенції дискретно представленого невпорядкованого векторного поля в просторах довільної вимірності. Подальші дослідження будуть

спрямовані на розробку алгоритмів визначення параметрів та характеристик дискретних неупорядкованих векторних полів.

Література

1. Дивергенція (математика) [Електроний ресурс]. Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Дивергенція_\(математика\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/Дивергенція_(математика)).
2. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А.Гольдфайн – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 132 с.
3. Черняк В.І. Визначення градієнта скалярного поля, заданого на плоскій неупорядкованій множині точок / В.І.Черняк // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В.Найдиш. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6. – С. 135-139.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ В ТОЧКАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОГО НЕУПОРЯДОЧЕННОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Черняк В.И.

В работе рассматривается способ определения дивергенции дискретного векторного поля, заданного на неупорядоченном множестве точек в пространствах произвольной размерности.

Ключевые слова: дивергенция, дискретное векторное поле, триангуляция.

DEFINITION OF DIVERGENCE PRESENTED IN POINTS OF DISCRETELY DISORDERED VECTOR FIELDS

Chernyak V.

In this paper considers a method definition divergence of discrete vector field, defined on the set of unordered points in spaces of arbitrary dimension.

Keywords: divergence, discrete vector field, triangulation.