

УДК 514.18 : 692.4 : 687.02

ПОБУДОВА ВИКРОЙКИ ПОВЕРХНІ ТЕНТОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Аушева Н.М., д.т.н.,

Демчишин А.А., к.т.н.

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

(Україна)

Автори роботи презентують результати досліджень побудови геометричної моделі викройки мембрани тентової конструкції, представленої у вигляді порції мінімальної поверхні на основі ізотропної кривої Безье в якості управляючого елемента. Мембрана тентової конструкції, форма якої від самого початку відповідає мінімальній поверхні, тобто такій, що вже зайняла рівноважний стан, має однаковий натяг в будь-якій точці.

Проведено аналіз трьох методів сплющення нерозгортних поверхонь та наведено досвід їх імплементації. Представлено порівняльні характеристики застосування методів сплющення для побудови викройки мембрани у вигляді наступних локальних кількісних показників: спотворення площі, спотворення кута, спотворення довжини k -ої граничної кривої. Додатково до локальних показників геометричної моделі викройки підраховано такі глобальні показники: середнє значення спотворення, стандартне відхилення спотворення, мінімальне та максимальне значення спотворення. Для наочного уявлення нормальності розподілу цих величин наведено функції густини їх ймовірності.

На основі результатів продемонстровано, який з алгоритмів сплющення є найбільш перспективним для побудови викроек тентових покриттів, як з точки зору компромісу між різними напруженнями, так і з точки зору стійкості чисельних методів. Показано, що напруження розтягу тенту уздовж утоку і основи можна знизити за рахунок їх переводу в напруження зсуву.

Висвітлено досвід, що було отримано при виготовленні макету тентової конструкції; припуск матеріалу для закріплення мембрани на несучій арматурі утворено на основі алгоритму побудови лінії еквідистанти до границі викройки.

Ключові слова: тентова конструкція, розкрій матеріалу, сплющення нерозгортних поверхонь, квазі-конформне відображення, квазі-ізометричне відображення, квазі-рівновелике відображення.

Постановка проблеми. Історія будівельної інженерії може розглядатись як безперервний рух в напрямку спорудження все більш граціозних об'єктів будівель. В цьому сенсі тентові конструкції (рис.1) є авангардом сучасної *галузі розрахунку та проектування*, маючи кілька переваг перед звичайними будівлями [1]. Визначною характеристикою тентових конструкцій є довгі прольоти даху, що не потребують проміжних несучих елементів, а вага самої покрівлі спричиняє мінімальне навантаження на фундамент.



Рис.1. Тентова конструкція зони відпочинку у центрі міста Roskilde, Denmark

Загальною практикою визначення просторової конфігурації мембрани тентової конструкції є використання чисельного методу *пошуку форми* [2,3]. Метод виходить з деякої початкової дискретної моделі поверхні, що проходить через наперед задану границю з несучих елементів конструкції. Обмеженість метода полягає в необхідності розрахунку стану рівноваги після кожної модифікації границі користувачем.

В роботі [4] запропонований спосіб побудови порції мінімальної поверхні, що проходить через криву Безьє, та надає можливість дизайнеру безпосередньо спостерігати за зміною порції при маніпуляції кожною з контрольних точок кривої. Результуюча поверхня, маючи недолік, що полягає в недостатній мірі передбачуваності її утворення по мірі віддалення від контролюючої кривої, володіє й незаперечною перевагою - відповідності критерію мінімальності (рис.2). Мембрана тентової конструкції, форма якої від самого початку відповідає мінімальній поверхні, тобто такій, що вже зайняла рівноважний стан, має однаковий натяг в будь-якій точці.

Процес побудови викройки мембрани починається з розрізання поверхні в CAD системі на складові частини, які відповідають стандартним ширинам рулонів матеріалу (1.3÷5 метрів [5]). Далі, кожна з частин поверхні відображається на площину за допомогою певного методу сплюснення (*англ. flattening*), та утворює плоску фігуру. Мінімальна поверхня, характеризується ненульовою Гаусовою кривиною, є нерозгортною, з чого випливає, що вона не може бути сплюснена без спотворення площ та кутів. Напруження, які не можуть бути компенсовані за рахунок еластичної деформації матеріалу, призводять до складок, провисань, розривів матеріалу. Таким чином, рівень напружень та їх рівномірність є основними критеріями за якими проводиться оцінка роботи алгоритмів сплюснення.

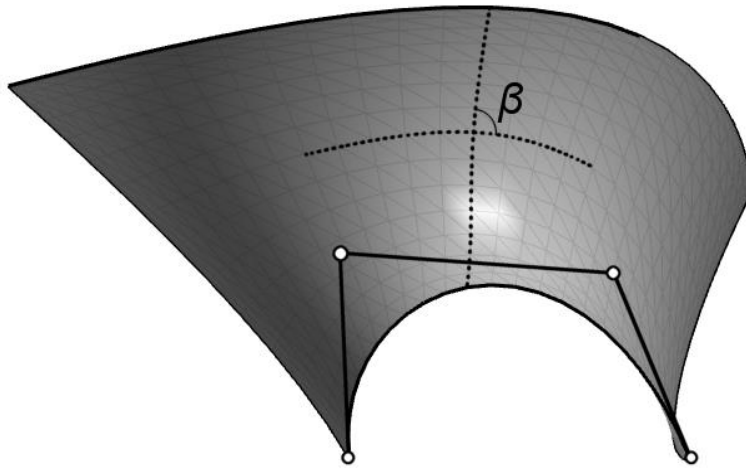


Рис.2. Утворення порції мінімальної поверхні, що контролюється кубічною кривою Безьє

Побудова викройки мембрани є актуальним предметом досліджень, насамперед, тому, що форма границі кожної зі сплюснених деталей визначає розподіл напружень вздовж мембрани, та строк служби всієї тентової конструкції в зборі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Мембрани сучасних тентових конструкцій [5] виготовляються з: тканин з покриттям, тканин з відкритими комірками, або плівок. Деформація розтягу тканини, складається з реакції на напруження вздовж ниток утоку і основи, що розташовані перпендикулярно одна одній, та реакції на напруження зсуву. Ці дві деформації, як правило [6], вважаються не пов'язаними, і розглядаються окремо.

Межі пластичної деформації залежать від матеріалу волокон. Орієнтовні значення [7,8] складають 2% вздовж утоку, 5% - вздовж основи, кут деформації зсуву обмежено позицією, в якій волокна блокують одне одного - 48%. Таким чином, пластична деформація зсуву є основою при використанні тканини в тентових конструкціях.

Задачею алгоритмів сплющення є розрахунок бієктивного відображення U , яке зберігає певні геометричні властивості вихідної поверхні якомога точніше [9]. Найбільш поширеними є алгоритми конформного відображення [10] (такого, що зберігає кути), рівновеликого (площі) [11], ізометричного (довжини) [12], або в певній мірі комбінацію цих властивостей [13]. Для нерозгортних поверхонь вимога “якомога точнішого збереження певної геометричної властивості” реалізується у вигляді мінімізації спотворення, а до назв алгоритмів додається приставка “квазі” (лат. “мов би”).

Формулювання цілей статті. Метою роботи є побудова трьох геометричних моделей викройки мембрани тентової конструкції з використанням алгоритмів квазі-конформного, квазі-ізометричного, квазі-рівновеликого сплющення нерозгортних поверхонь, порівняння моделей між собою, та перевірка адекватності найліпшої геометричної моделі при переході до макету.

Основна частина. Нехай K - поверхня мембрани $\{\{v_i\}_{i=1}^n, T = \{T_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})\}_{i=1}^m\}$, де $\{v_i\}_{i=1}^n$ множина вершин потужності n ($n \geq 3$), T множина трикутників потужності m , що складається з трійок вершин, E - множина ребер.

Нехай U представляє функцію сплющення (рис.3). Позначимо відображення трикутника T_i функцією U як T_i^U . Нехай $A(T_i)$ та $A(T_i^U)$ представляють орієнтовану площу трикутників T_i та T_i^U поверхні мембрани K та її викройки K^U .

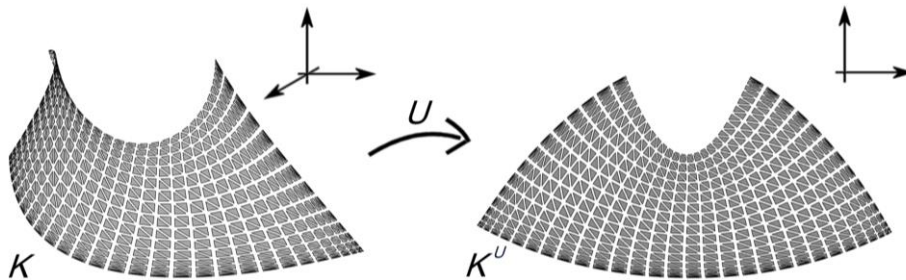


Рис.3. Поділення геометричної моделі поверхні і викройки на скінченні елементи

Керуючись інформацією з проаналізованих публікацій, нами було проведено імплементацію алгоритмів *Least Squares Conformal Mapping*, *As-Rigid-As-Possible* та *Fletcher-Reeves-Polak-Ribiere* А у наступній інтерпретації:

LSCM (квазі-конформне перетворення):

$$\sum \left| \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right|^2 A(T) \rightarrow \min .$$

ARAP (квазі-ізометричне перетворення):

$$\sum_{\{i,j\} \in E} \left\| (v_j^U - v_i^U) - M_{ij}(v_j - v_i) \right\|^2 \rightarrow \min, \quad M_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{ij} & \sin \theta_{ij} \\ \sin \theta_{ij} & \cos \theta_{ij} \end{pmatrix}.$$

FRPR A (квазі-рівновелике перетворення):

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m P(A(T_i^U))(A(T_i^U) - A(T_i))^2 \rightarrow \min, \quad P(A(T_i^U)) = \begin{cases} 1, & A(T_i^U) > 0 \\ 0, & A(T_i^U) \leq 0 \end{cases}.$$

Алгоритми *LSCM* та *ARAP* зводять вирішення задачі мінімізації спотворення метрики до вирішення системи лінійних рівнянь, записаних у вигляді великої розрідженої матриці. Мінімізацію функціонала площі A було проведено з використанням методу нелінійної оптимізації Fletcher-Reeves-Polak-Ribiere.

Кожний з перелічених алгоритмів сплюснення було застосовано до поверхні з роботи [4]. Відповідні викройки наведені на рис. 4, 5.

Локальні показники перетворення

Скінченні елементи геометричної моделі викройки було оцінено виходячи з наступних кількісних показників:

ξ_i - спотворення площі скінченного елемента, що дорівнює відношенню площі елемента T_i поверхні до площі елемента T_i^U викройки:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 - A(T_i)/A(T_i^U), & A(T_i^U) \leq A(T_i) \\ -1 + A(T_i^U)/A(T_i), & A(T_i^U) > A(T_i) \end{cases}, \quad -\infty < \xi_i < \infty.$$

Функція ξ є симетричною відносно нуля, приймаючи від'ємні значення, якщо елемент поверхні було стиснуто внаслідок перетворення, та додатні, якщо елемент площі було розтягнуто, що має сенс при підрахунку суми таких значень.

φ_i - спотворення кута i -го скінченного елемента поверхні між криволінійними координатних лініями (рис. 2), що відповідає різниці кута β_{T_i} поверхні та кута $\beta_{T_i^U}$ викройки:

$$\varphi_i = \text{Abs}(\beta_{T_i} - \beta_{T_i^U}), \quad -\pi < \varphi_i < \pi.$$

λ - спотворення довжини k -ої граничної кривої, що дорівнює відношенню довжини кривої b_k прообразу до довжини кривої b_k^U образу:

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - L(b_k)/L(b_k^U), & L(b_k^U) \leq L(b_k) \\ -1 + L(b_k^U)/L(b_k), & L(b_k^U) > L(b_k) \end{cases}, \quad -\infty < \lambda_k < \infty, \quad k = 1..4.$$

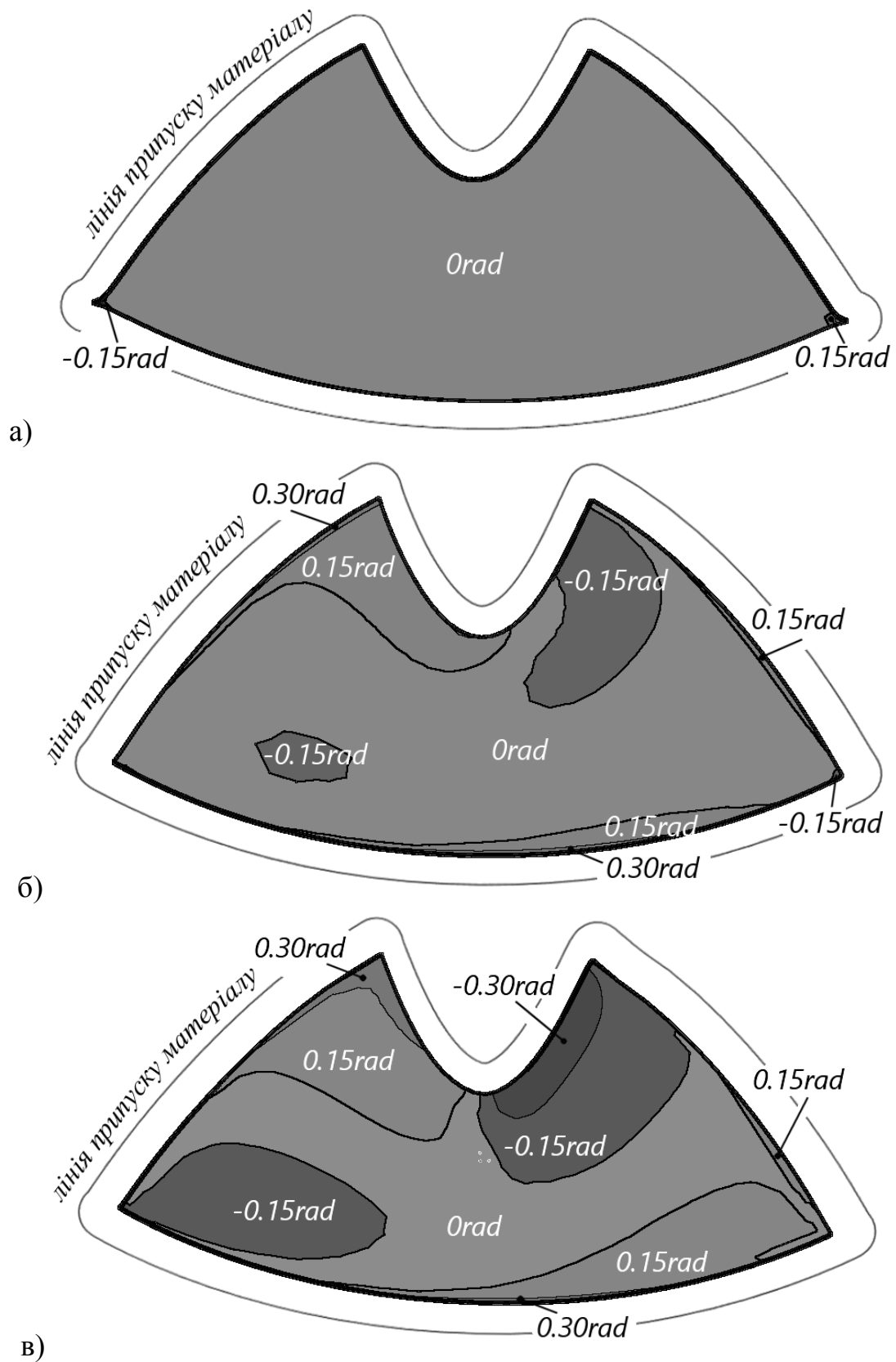


Рис.4. Викройки мембрани з візуалізацією ізоліній функції φ_i , побудовані на основі мінімізації порушення умови: а) конформності; б) ізометричності; в) рівновеликості

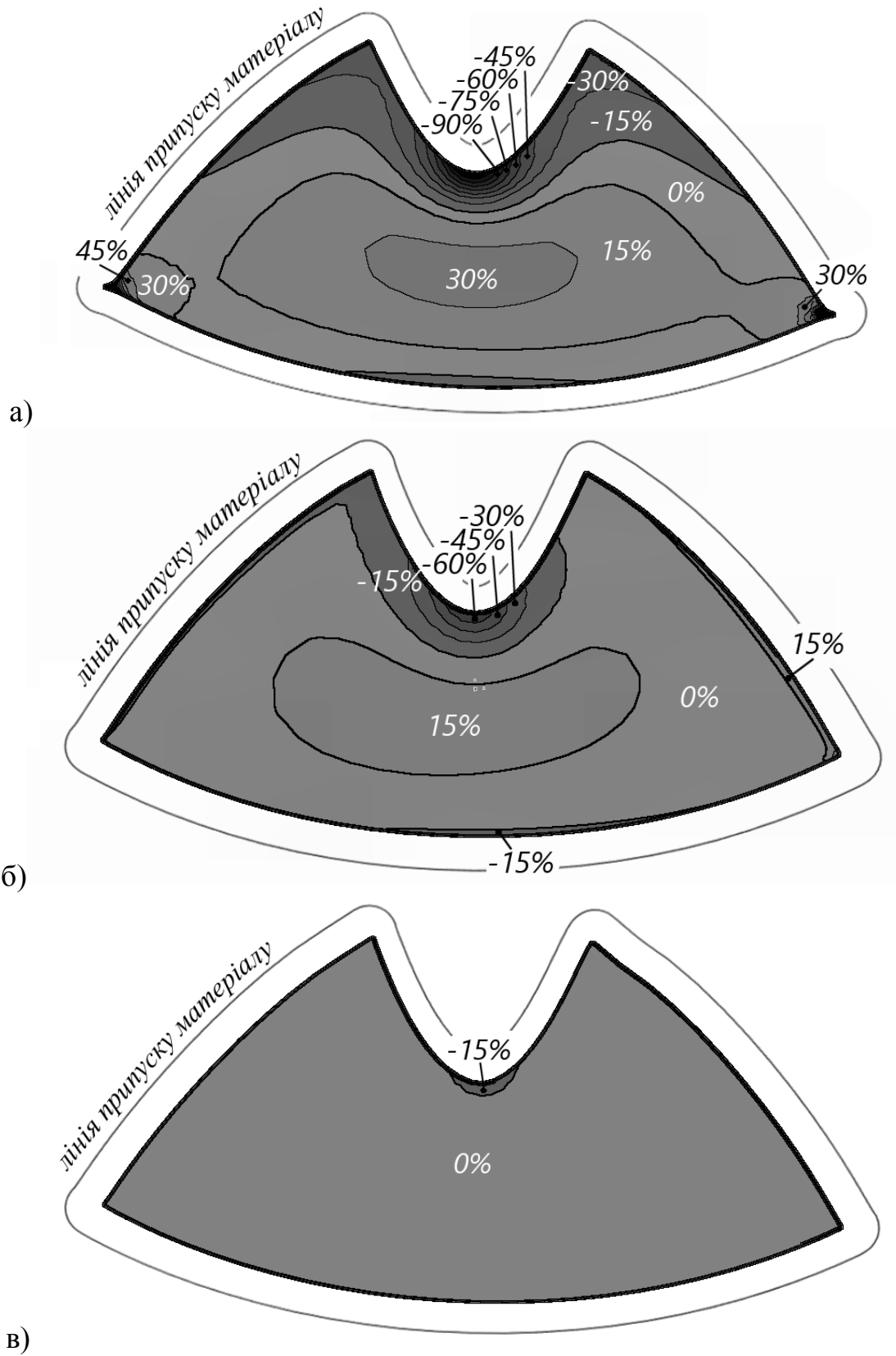


Рис.5. Викройки мембрани з візуалізацією ізоліній функції ξ_i , побудовані на основі мінімізації порушення умови:
 а) конформності; б) ізометричності; в) рівновеликості

Глобальні показники перетворення

Додатково до локальних показників геометричної моделі викройки були підраховані наступні глобальні показники [14]:

$\bar{\xi}$ - середнє значення величини ξ , який відображає міру центральної тенденції спотворення площі вздовж всієї поверхні.

ξ_{σ} - стандартне відхилення величини ξ , яке демонструє на скільки в середньому відхиляються конкретні значення критерію від свого середнього значення. Величина ξ_{σ} характеризує рівномірність натягу мембрани, виготовленої у відповідності до викройки.

ξ_{\min} , ξ_{\max} - мінімальне та максимальне значення величини ξ , що показують границі області значень спотворення елементів поверхні. Успіх безпосереднього використання цих двох критеріїв для оцінки викройки є обмеженим, оскільки їх значення відповідають викидам вибірки. З іншого боку, ξ_{\min} та ξ_{\max} дають характеристику стійкості чисельного методу алгоритму перетворення.

Аналіз розподілу величин

Для наочного уявлення нормальності розподілу величини ξ_i та φ_i було побудовано функції густини їх ймовірності, що представлені на рис. 6,7. Як видно з гістограм, ймовірність величин для алгоритму *LSCM* вкладається в межі 3σ , в той час, як графіки ймовірності величин для алгоритмів *ARAP* та *FRPR A* демонструють асиметричність та стовщення хвостів.

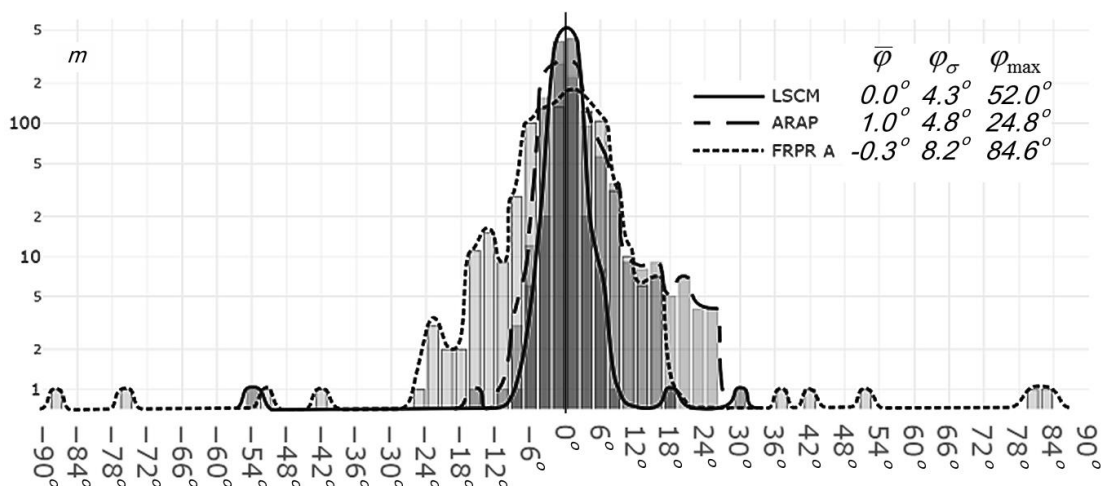


Рис.6. Гістограма значень спотворення кута між криволінійними координатними лініями, подана за логарифмічною шкалою

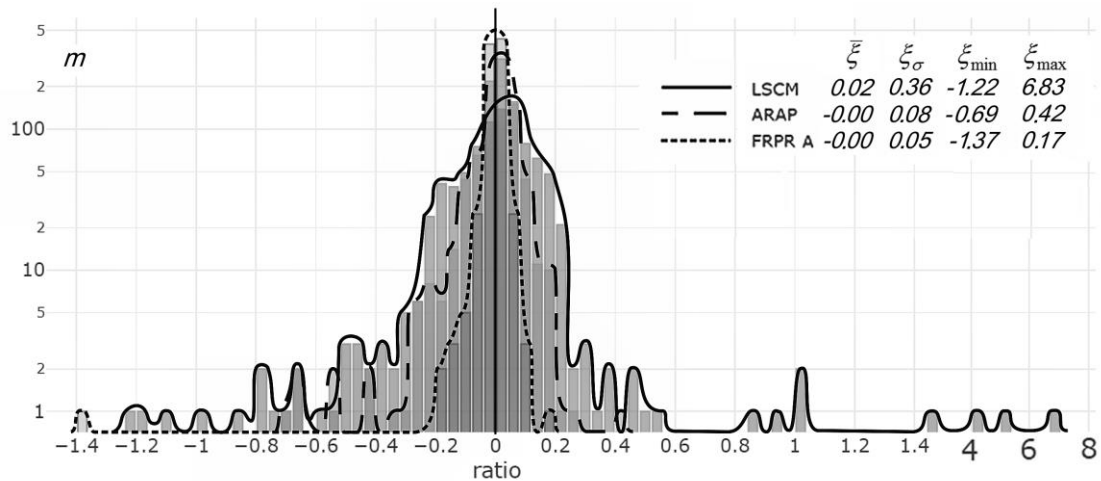


Рис.7. Гістограма значень спотворення *площі* елементів, подана за логарифмічною шкалою

Таблиця 1

Дані спотворення довжин граничних кривих поверхні

Алгоритм перетворення	LSCM	LSCM → ARAP	LSCM → FRPR A
Критерій оцінки			
Спотворення кривої №1 ^{*1} , %	- 17.6	- 17.9	- 15.5
Спотворення кривої №2 ^{*1} , %	- 1.8	- 1.9	- 1.9
Спотворення кривої №3 ^{*1} , %	1.9	- 1.9	- 2.1
Спотворення кривої №4 ^{*1} , %	- 1.7	- 2.2	- 2.4

^{*1} Від'ємне значення вказує на зменшення довжини після перетворення

Побудова макету тентової конструкції

Спорудження макету конструкції є важливою передумовою монтажу її повномасштабного втілення, що дає можливість на етапі процесу креслення перевірити правильність вибору конструкційних елементів, та способів їх встановлення і закріплення, оцінити трудомісткість робіт.

Орієнтацію поверхні тенту в просторі було проведено виходячи з наступного ряду вимог [15]:

- естетичність конструкції;
- границя мембрани повинна проектуватись на площину без самоперетинів для полегшення процесу конструювання оснащення;
- корисний простір під мембраною повинен бути максимальним з метою ефективного використання конструкції;
- порція поверхні повинна бути вигнутою в бік землі для збігання водяних опадів у заздалегідь спланованих місцях.

Каркас макету складено з чотирьох підпiрних стiнок (рис.8), якi було встановлено на жорстку основу, та зв'язано мiж собою з використанням полiмерної сiтки.

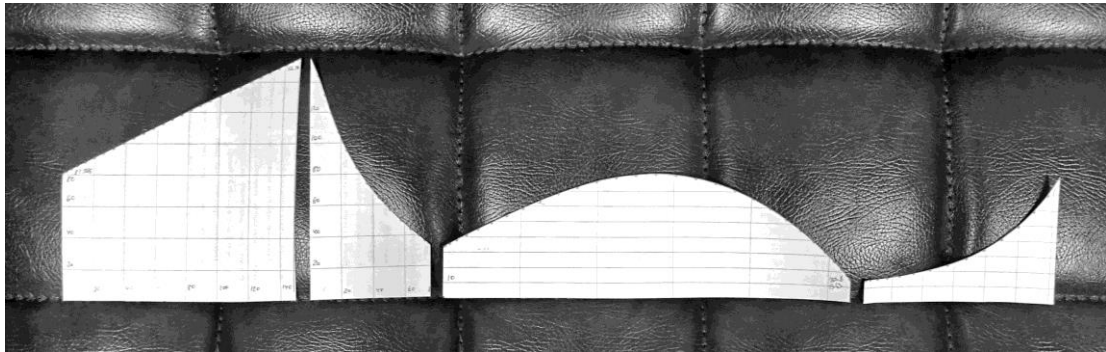


Рис.8. Бiчні елементи оснащення макету тентової конструкцiї

В якостi матерiалу мембрани макету було обрано латексну резину. Резина є iзотропним матерiалом, що характеризується високим рiвнем пружної деформацiї [16]. Викройку деталi побудовано алгоритмом *ARAP*, та зменшено масштабуванням на 10% для створення попереднього натягу мембрани. Припуск на пiдгин матерiалу сформовано за рахунок побудови еквiдистанти до лiнii границi викройки.

Алгоритм побудови еквiдистанти починається з представлення границi викройки у виглядi полiлiнii (рис.9). Далi, кожен з вiдрiзкiв змiщується паралельно на вiдстань L , а промiжки, що утворились, заповнюються сегментами кола радiусу L з центром у вихiднiй точцi дотику вiдрiзкiв. На останньому етапi, петлi, або так званi «ластiвчинi хвости», що сформувались пiсля змiщення увiгнутих частин границi, видаляються на основi критерiю величини площi фiгури, що обмежено петлею. Для цього алгоритм рекурсивно розбиває замкнену полiлiнiю на суб-петлi, що входять до її складу, додаючи до кожної з них точку дотику. Найбiльша за абсолютним значенням площi суб-петля стає результируючою лiнiєю, вiльною вiд самоперетинiв.

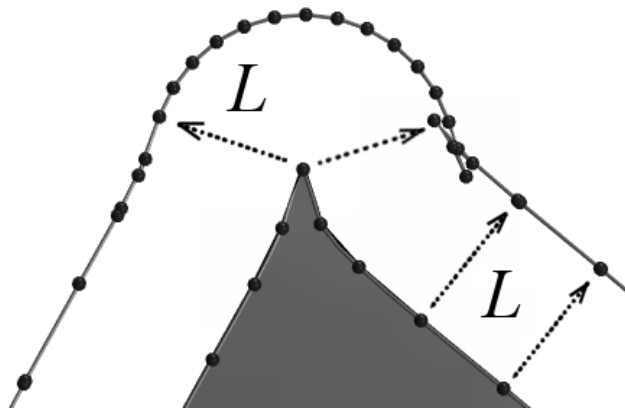


Рис.9. Побудова лiнii вiдрiзу матерiалу з врахуванням припуску

Встановлена мембрана продемонструвала суб'єктивно рівномірний натяг вздовж всієї поверхні за рахунок розподілу матеріалу всередині своєї границі (рис.10). Отриманий результат добре узгоджується з характеристиками геометричної моделі.



Рис.10. Макет тентової конструкції в масштабі 1:200

Висновки. Співставлення карт ізоліній характеристик ξ та φ (рис.4,5) з даними спотворення довжин граничних кривих λ (табл. 1) вказує на:

- недостатню інформативність характеристики спотворення площі (площа елемента поверхні може лишатися незмінною одночасно зі спотворенням довжини ребра та деформації кута);
- всі розглянуті алгоритми продемонстрували майже однакові результати деформації довжин граничних кривих (з різницею в межах $\pm 3\%$). Зменшення довжини ребра геометричної моделі поверхні не вплинуло на результати.

Використання *ARAP* алгоритму сплющення є найбільш перспективним для побудови викроек тентових покриттів, як з точки зору компромісу між рівномірністю напружень, так і з точки зору стійкості чисельних методів. Показано, що напруження розтягу тенту уздовж утоку і основи можна знизити за рахунок їх переводу в напруження зсуву.

При подальших дослідженнях необхідно провести *K-S тест* на нормальність розподілу значень критеріїв оцінки, що дасть можливість робити висновки застосовності статистичних методів аналізу даних. До оцінок результатів сплющення слід додати *метрику k-найближчих сусідів*.

Література

1. Fabric Architecture. IFAI, 2007. N. 4, V. 19. 64 p.
2. Шалимов В. Н. Геометрическое моделирование тентовых тканевых конструкций : автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Н.Новгород, 2012. 20 с.
3. Gale S., Lewis W. J. Patterning of tensile fabric structures with a discrete element model using dynamic relaxation. *Comp's and Structures*. V. 169. 2016. P. 112-121.
4. Демчишин А. А., Аушева Н.М. Геометричне моделювання поверхонь тентових конструкцій. *Збірник наукових праць. Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2018. Вип.12. С.68-74.
5. Beccarelli P. Biaxial Testing for Fabrics and Foilsю. *Springer International Publishing*, 2015. P. 9–33.
6. Zhang Y, Zhang Q., Lv. H. Mechanical properties of polyvinylchloride-coated fabrics processed with Prestraint® technology. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 31(23), 2012. P. 1670–1684.
7. Alshahrani H., Mohan R., Hojjati M. Experimental Investigation of In-Plane Shear Deformation of Out-of-Autoclave *Prepreg*. *International Journal of Composite Materials*, 2015. Vol. 5, No. 4. P. 81–87.
8. Pargana J., Lloyd-Smith D., Izzuddin B.. Advanced material model for coated fabrics used in tensioned fabric structures. *Engineering Structures*. 2007. P. 1323–1336.
9. Lee L. P. The Nomenclature and Classification of Map Projections. *Empire Survey Review*. 1944. No 51, Vol VII. P.190-200.
10. Levy B., S. Petitjean, N. Ray, J. Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Transactions on Graphics*. 2002. Volume 21, Issue 3. P.362-371.
11. Fischl B., Sereno M.I., Dale A.M.. Cortical surface-based analysis: II: inflation, flattening, and a surface-based coordinate system. *Neuroimage* 9 (2), 1999. P. 195–207.
12. Igarashi T., Igarashi Y. Implementing As-Rigid-As-Possible Shape Manipulation and Surface Flattening. *Journal of Graphics, GPU, and Game Tools*. 2009. V. 14, N. 1. P.17–30.
13. Liu L., Zhang L., Xu Y., Gotsman C., Gortler S. J. A local/global approach to mesh parameterization. In *Proc. Symposium on Geometry Processing*, 2008. P. 1495-1504.
14. Сліпченко В.Г., Козоріз В.В., Сидоренко Ю.В.. Теорія ймовірностей. К.: НТУУ «КПІ», 1999. 108 с.
15. ДБН В.2.6-220:2017. Покриття будівель і споруд. – Київ : Міністерство регіонального розвитку, будівництва та житлово-комунального господарства України, 2017. – 43 с.

16. Rubber chemistry. Tampere University of technology, Virtual Education in Rubber Technology, Leonardo da Vinci program. – 2007. 94 p.

ПОСТРОЕНИЕ ВЫКРОЙКИ ПОВЕРХНОСТИ ТЕНТОВОЙ КОНСТРУКЦИИ

Аушева Н.М., Демчишин А.А.

Авторы работы представляют результаты исследований построения геометрической модели выкройки мембраны тентовой конструкции, представленной в виде порции минимальной поверхности на основе изотропной кривой Безье в качестве управляющего элемента. Мембрана тентовой конструкции, форма которой изначально соответствует минимальной поверхности, то есть такой, что уже заняла равновесное состояние, имеет одинаковое натяжение в каждой точке.

Проведен анализ трех методов уплощения неразвертываемых поверхностей и приведен опыт их реализации. Представлены сравнительные характеристики применения методов уплощения для построения выкройки мембраны в виде следующих локальных количественных показателей: искажение площади, искажения угла, искажения длины k -ой граничной кривой. Дополнительно к локальным показателям геометрической модели выкройки подсчитаны такие глобальные показатели: среднее значение искажения, стандартное отклонение искажения, минимальное и максимальное значение искажения. Для наглядного представления нормальности распределения этих величин приведены функции плотности их вероятности.

На основе результатов продемонстрировано, какой из алгоритмов уплощения является наиболее перспективным для построения выкроек тентовых покрытий, как с точки зрения компромисса между напряжениями, так и с точки зрения устойчивости численных методов. Показано, что напряжения растяжения тента вдоль утка и основы можно снизить за счет их перевода в напряжение сдвига.

Освещен опыт, полученный при изготовлении макета тентовой конструкции; припуск материала для закрепления мембраны на несущей арматуре создан на основе алгоритма построения линии эквидистанты к границе выкройки.

Ключевые слова: тентовая конструкция, раскрой материала, уплощение неразвертываемых поверхностей, квази-конформное

отображение, квази-изометрическое отображение, квази-равновеликое отображение.

PATTERNING OF A TENSILE FABRIC STRUCTURE

Ausheva N., Demchyshyn A.

The authors present the results of research carried out upon the construction of a geometric model of a pattern of a tensile fabric structure (TFS). TFS is presented in the form of a patch of the minimum surface based on an isotropic Bezier curve used as a control element. The membrane of the structure has uniform tension in each point if its shape initially corresponds to the minimum surface.

The analysis of three methods of undevelopable surfaces flattening is carried out and experience of their implementation is outlined. Comparative characteristics of the flattening methods of TFS pattern are presented in the form of the following local quantitative indicators: area distortion, angle distortion, length distortion of the k -th boundary curve. In addition to the local indicators of the geometric model of the pattern, the following global indicators are calculated: the mean value of the distortion, the standard deviation of the distortion, and the minimum and maximum values of the distortion. The probability density functions are given serving for visual representation of normality of distribution of these quantities.

It is demonstrated which of the three flattening algorithms is the most promising for construction of the TFS patterns, both from the point of view of a compromise between stresses and from the point of view of the stability of numerical methods. It is shown that tensile stress of the pattern along the weft and warp can be reduced by its migration into shear stress.

The experience gained during the manufacturing process of TFS scale model is highlighted; the material allowance needed to fix the membrane to the supporting elements is created using the algorithm that calculates equidistant line to the border of the pattern.

Keywords: tensile fabric structure, material patterning, flattening of undevelopable surfaces, quasi-conformal mapping, quasi-isometric mapping, quasi-athalic mapping.