УДК 519.632.4

ЗАСТОСУВАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ П.Л. ЧЕБИШОВА В МЕТОДІ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ

Вірченко Г.А., д.т.н.
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (*Україна*),
Маломуж Т.В., к.т.н.,
Старун Н.В., к.т.н.,
Тулученко Г.Я., д.т.н.
Херсонський національний технічний університет (*Україна*)

У роботі досліджується вплив взаємного розташування контуру розміщення точок колокації та контуру розміщення точкових джерел у методі точкових джерел (*у методі фундаментальних розв'язків за термінологією, яка прийнята в іноземній літературі*). *На практичних прикладах показано доцільність розміщення вказаних точок у вузлах, що є коренями поліномів П.Л. Чебишова першого роду, коли обидва контури є багатофокусними лемніскатами зі співпадаючими фокусами. За відрізок, на якому знаходяться корені поліномів П.Л. Чебишова обирається відрізок, що рівний довжині повторюваного сегмента лемніскати з урахуванням її симетрій. Повні набори точок формуються з урахуванням вказаних симетрій. Використання багатофокусних лемніскат в якості тестових кривих обумовлено теоремою Д. Гільберта про можливість наближення з заданою точністю однозв'язного замкнутого контуру багатофокусною лемніскатою. Показано, що обумовленість основної матриці методу точкових джерел у граничних задачах Діріхле для рівняння Лапласа значно покращується, коли співфокусні лемніскати мало віддалені одна від одної. При зростанні середньої відстані між ними переваги вказаного розміщення точок зникають. Порівняння проводиться з числами обумовленості систем, які отримують у випадку рівномірного* (*відносно полярного кута*) *розміщення точок колокації і точкових джерел на багатофокусних лемніскатах та колах відповідно. Таке розміщення точок є найбільш поширеним у сучасній обчислювальній практиці застосування методу точкових джерел. Проте рекомендоване при цьому застосування методу регуляризації за А.М. Тихоновим у граничних задачах із складною геометрією області не завжди приводить до очікуваних результатів. Тому пошуки доцільних способів розміщень точок колокації та точкових джерел в однойменному методі продовжують бути актуальною задачею для дослідників. Перспективним напрямком*

продовження досліджень є вивчення впливу запропонованого розміщення вказаних точок на рівновіддалених контурах, які не мають самоперетинів.

Ключові слова: метод точкових джерел, обумовленість матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, регуляризація, лемніската.

Постановка проблеми. На точність розв'язку граничної або крайової задачі, який отримують методом точкових джерел (МТД), впливає багато чинників, серед яких: спосіб розміщення точок колокації на границі області; спосіб розміщення фіктивних точкових джерел на контурі, який охоплює задану область; взаємне розташування границі області та охоплюючого контура тощо. Для розміщення точкових джерел у МТД використовують два найбільш розповсюджені підходи. За першим підходом границя області та контур точкових джерел обмежують подібні фігури [1, 3-4, 11]. Цей підхід був розповсюджений у початковий період існування МТД [8]. Надалі набув поширення підхід, коли точкові джерела рівномірно розміщують на колі, яке описане навколо заданої області [9-10, 14-15]. В обох випадках часто отримують погано обумовлену матрицю системи рівнянь, до якої застосовують метод регуляризації А.М. Тихонова. Загальновизнаного оптимального підходу до розміщення точок колокації та фіктивних точкових джерел наразі не існує.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Не зважаючи на те, що при початковому формулюванні основ МТД [1] йшлося про рівномірне розміщення точок колокації та фіктивних джерел при природній параметризації контурів, на яких знаходяться ці точки, до такого способу розміщення точок на практиці не звертаються через його трудомісткість. У самій монографії [1], яка присвячена МТД, обчислювальні приклади містять рівномірне розташування згаданих точок у розумінні рівномірної зміни їх полярних кутів.

У літературних джерелах граничні задачі розв'язуються методом точкових джерел для областей із простою геометрією в формі: прямокутників, еліпсів, двофокусних лемніскат [1, 3-4, 9-10, 14-15]. У роботі [11] розглядається область, яка обмежена 4-фокусною лемніскатою, фокуси якої знаходяться у вершинах квадрата.

Як відомо [5], Д. Гільбертом доведено, що для кусочно-гладкої замкненої без самоперетинів кривої на площині завжди знайдеться така система фокусів і такий радіус, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ відповідна лемніската пройде в ε-околі довільної точки заданої кривої. Таким чином, будь-який контур, що задовольняє описаним вище вимогам, може бути з заданою точністю наближений багатофокусною лемніскатою.

При інтерполяції функцій однієї змінної переваги мають сітки, які створені на основі коренів поліномів П.Л. Чебишова першого роду [2, 12]. Поліноми П.Л. Чебишова відомі своєю властивістю найменше відхилятися від нуля на заданому проміжку, і відповідно, вносять найменший внесок у похибку інтерполяції.

Узагальненням поліномів П.Л. Чебишова на комплексній площині є поліноми Г. Фабера, які моужть застосовуватися для наближення замкнених контурів [6, 13].

Формулювання цілей статті. Дослідити вплив на обумовленість матриці системи в МТД розміщення вузлів колокації та фіктивних точкових джерел у вузлах, що співпадають із коренями многочленів П.Л. Чебишова першого роду на контурах із природною параметризацією.

Виклад основного матеріалу. Для дослідження виділимо області Ω, які обмежені m-фокусними лемніскатами ($m = 2; 3; 4$), фокуси яких знаходяться у вершинах правильних багатокутників:

$$\prod_{j=1}^{m} \sqrt{\left(x - c\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{m}\cdot(j-1)\right)\right)^2 + \left(y - c\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{m}\cdot(j-1)\right)\right)^2} = a^m, \qquad (1)$$

де $c, a \in R$; c – відстань від початку координат до фокуса.

У полярних координатах рівняння (1) має вигляд:

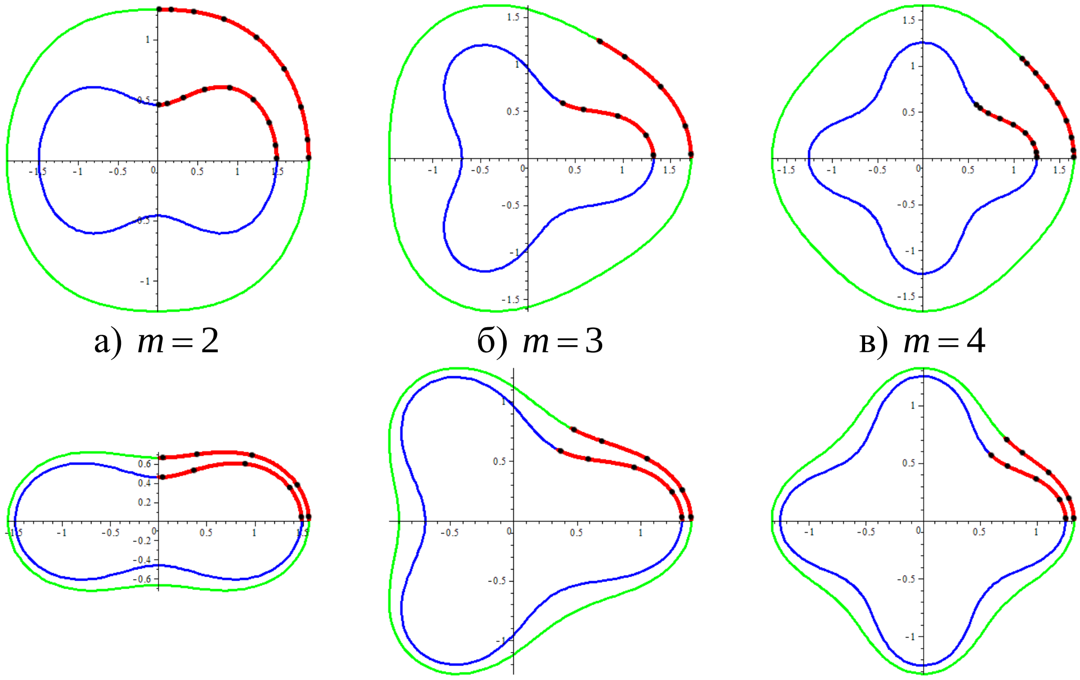
$$\rho = \sqrt[m]{c^m \cos m\varphi + \sqrt{a^{2m} - c^{2m}\sin^2 m\varphi}}\,. \qquad (2)$$

Вираз (2) дозволяє подати рівняння (1) у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \end{cases}. \qquad (3)$$

Враховуючи симетричність обраних для дослідження лемніскат, виділимо повторювані частини їх контурів (рис. 1). Для проведення обчислюваних розрахунків будемо використовувати такі параметри лемніскат:

1) $c = 1$; $a = 1{,}1$ – для лемніскат, які є границями областей Ω та контурами розміщення точок колокації;
2) $c = 1$; $a = 1{,}6$ – для лемніскат, які є першим варіантом контурів для розміщення фіктивних джерел (рис. 1, а) ... в));
3) $c = 1$; $a = 1{,}2$ – для лемніскат, які є другим варіантом контурів для розміщення фіктивних джерел (рис. 1, г) ... е)).



а) $m=2$ б) $m=3$ в) $m=4$

г) $m=2$ д) $m=3$ е) $m=4$

Рис. 1. Контури розміщення точок колокації та фіктивних джерел

Методом точкових джерел будемо розв'язувати задачу Діріхле для рівняння Лапласа.

Фундаментальні розв'язки для рівняння Лапласа мають вигляд [1]:

$$g(r;R_j)=\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-x_j^R\right)^2+\left(y-y_j^R\right)^2}}, \tag{4}$$

де $R_j\left(x_j^R;y_j^R\right)$ – фіктивні точкові джерела; $j=\overline{1;N}$; $r(x;y)\in\Omega$.

На виділених частинах лемніскат будемо розміщувати точки колокації або фіктивних джерел у точках, які є коренями поліномів П.Л. Чебишова першого роду на відрізках $\left[0;l_{lem}\right]$, де l_{lem} – довжина відповідного виділеного сегмента лемніскати. Декартові координати шуканих точок встановлюємо в результаті розв'язання рівнянь:

$$\int_0^u\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2}\,d\varphi=t_*, \tag{5}$$

де вирази x та y визначаються формулами (2-3); t_* – значення поточного кореня полінома П.Л. Чебишова першого роду на відрізку $\left[0;l_{lem}\right]$; u – шукане значення полярного кута.

Очевидно, що розв'язання рівняння (5), як і обчислення довжини відповідного сегмента лемніскати, можна виконати тільки наближеними методами.

На виділених сегментах кривих сформуємо множини точок колокації $r_i\left(x_i^r; y_i^r\right)$ та фіктивних джерел $R_j\left(x_j^R; y_j^R\right)$ у кількостях 5, 7 та 9 точок. На інших сегментах кривих відповідні точки утворюються з урахуванням симетрії контуру розміщення.

Матриця системи *A* для задачі Діріхле для рівняння Лапласа, яка розв'язується МТД, має вигляд [1]:

$$A=\left(a_{i\,j}\right)=\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x_i^r-x_j^R\right)^2+\left(y_i^r-y_j^R\right)^2}}\right). \qquad (6)$$

Дослідимо обумовленість блоків матриць виду (6), які пов'язані з точками колокації та фіктивних джерел на виділених сегментах кривих (табл. 1, табл. 2). Результати досліджень на якісному рівні повністю співпадають із результатами дослідження матриці (6) для повного набору вузлів з урахуванням симетрії контурів. Останні не наводимо через їх громіздкість.

Будемо розглядати такі попарні способи розміщення точок колокації та фіктивних джерел:

1) точки колокації та фіктивних джерел розміщені у вузлах, які співпадають із коренями поліномів П.Л. Чебишова, на двох лемніскатах;
2) точки колокації розміщені на лемніскаті, а фіктивні джерела розміщені на колі; обидві множини точок розміщені у вузлах, які співпадають із коренями поліномів П.Л. Чебишова, на сегментах відповідних кривих;
3) точки колокації розміщені на лемніскаті, а фіктивні джерела розміщені на колі; обидві множини точок рівномірно розміщені на сегментах відповідних кривих.

Коло, на якому розміщуються фіктивні джерела, має радіус:

$$R=\sqrt[m]{c^m+a^m}\,,$$

де *a* та *c* – параметри зовнішньої лемніскати.

Таблиця 1

Числа обумовленості блоку матриці A для контурів із рис. 1, а) ... в)

Контур точок колокації	Спосіб розміщення точок	Кількість вузлів на сегменті кривої		
		5	7	9
2-фокусна лемніската	1)	19,2	334,4	$5{,}9\cdot 10^3$
	2)	118,6	$4{,}4\cdot 10^3$	$1{,}9\cdot 10^5$
	3)	431,5	$5{,}6\cdot 10^4$	$2{,}2\cdot 10^6$
3-фокусна лемніската	1)	334,6	$4{,}4\cdot 10^3$	$2{,}5\cdot 10^4$
	2)	183,7	$1{,}4\cdot 10^4$	$2{,}0\cdot 10^6$
	3)	426,4	$4{,}1\cdot 10^5$	$9{,}4\cdot 10^5$
4-фокусна лемніската	1)	509,7	$1{,}4\cdot 10^4$	$4{,}0\cdot 10^5$
	2)	881,9	$1{,}5\cdot 10^4$	$3{,}4\cdot 10^5$
	3)	1011,9	$2{,}2\cdot 10^4$	$5{,}2\cdot 10^5$

Таблиця 2

Числа обумовленості блоку матриці A для контурів із рис. 1, г) ... е)

Контур точок колокації	Спосіб розміщення точок	Кількість вузлів на сегменті кривої		
		5	7	9
2-фокусна лемніската	1)	6,0	22,0	82,9
	2)	82,4	$2{,}5\cdot 10^3$	$7{,}7\cdot 10^4$
	3)	284,9	$1{,}6\cdot 10^4$	$9{,}2\cdot 10^5$
3-фокусна лемніската	1)	12,8	65,6	341,9
	2)	175,9	$3{,}7\cdot 10^3$	$8{,}9\cdot 10^4$
	3)	238,3	$6{,}9\cdot 10^3$	$2{,}2\cdot 10^5$
4-фокусна лемніската	1)	22,8	143,5	917,1
	2)	179,5	$4{,}0\cdot 10^3$	$9{,}2\cdot 10^4$
	3)	197,4	$4{,}9\cdot 10^3$	$1{,}2\cdot 10^5$

Висновки. Використання коренів поліномів П.Л. Чебишова в методі точкових джерел є доцільним, коли процес розв'язання задачі не пов'язаний з обмеженнями в часі. Також є виправданим застосування контурів для розміщення точкових джерел, які обмежують області подібні до заданої області. Обидва прийоми дозволяють суттєво знизити число обумовленості матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка виникає при розв'язанні задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом точкових джерел.

По мірі віддалення контуру фіктивних джерел від контуру точок колокації переваги розміщення точок у вузлах поліномів П.Л. Чебишова зникають. Враховуючи простоту програмної реалізації, поширення набув рівномірний розподіл точок та використання кола в якості контуру фіктивних джерел. Для протидії суттєвому погіршенню обумовленості основної системи методу точкових джерел загально прийнятою рекомендацією є застосування методу регуляризації А.М. Тихонова.

Логічним є продовження досліджень для інших видів граничних умов та диференціальних операторів.

Література

1. Алексидзе М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. Москва. Наука. 1991. 351 с.
2. Данилов Ю. А. Многочлены Чебышева. Минск: Вышэйшая школа. 1984. 157 с.
3. Князев С.Ю., Щербакова Е.Е. Решение задач теплои массопереноса с помощью метода точечных источников поля. Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2006. № 4. С. 43-47.
4. Князев С.Ю., Щербакова Е.Е. Применение обобщенного метода точечных источников для решения краевых задач математической физики. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2017. № 2 (89). С.12-22.
5. Ракчеева Т.А. Критерии и сходимость фокусной аппроксимации. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2013. Т. 5, № 3, С. 379-394
6. Суетин П.К. (1964) Основные свойства многочленов Фабера. Успехи математических наук. 1964. Т.19, В. 4 (118), С.125-154.
7. Alves Carlos J. S., Martins Nuno F. M. The Direct Method of Fundamental Solutions and the Inverse Kirsch-Kress Method for the Reconstruction of Elastic Inclusions or Cavities. *Journal of Integral Equations and Applications*. 2009. V 21. P.153-178.
8. Fairweather Graeme, Karageorghis Andreas (1998) The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*. 1998. V.9. P.69–95.
9. Golberg M.A. The Method of Fundamental Solutions for Potential, Helmholtz and Diffusion Problems. *Boundary Integral Methods – Numerical and Mathematical Aspects*. Southampton: WIT Press, 1998. P.103-176.

10. Golberg M.A., Chen C.S. The Method of Fundamental Solutions for Poisson's Equation. Transactions on Modelling and Simulation. 1994. V.8. P.299-307.
11. Kołodziej J.A., Grabski J.K. Application of the Method of Fundamental Solutions and the Radial Basis Functions for Laminar Flow and Heat Transfer in Internally Corrugated Tubes. Proceedings of the 10th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics (HEFAT2014) (USA, Florida, Orlando, July 14 – 16, 2014), Orlando, 2014. P. 456-465.
12. Mason J.C., Handscomb D.C. Chebyshev Polinomials. Florida, Boca Raton: CRC Press LLC, 2003. 335 p.
13. Papamichae N., Soares M.J., Stylianopoulos N.S. A Numerical Method for the Computation of Faber Polinomials for Starlike Domains. *Journal of Numerical Analysis*, 1993. V.13. P.181-193.
14. Shigeta Takemi, Young D.L. Method Fundamental Solution with Optimal Regularization Techniques for Cauchy Problem of Laplace Equation with Singular Points. *Journal of Computational Physics*, 2009. V.228, N.6. P.1903-1915.
15. Wang Hui, Qin Qinghua Some Problems with the Method Fundamental Solution Using Radial Basis Functions. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2007. V.20, N/1. P.21-29.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ П.Л. ЧЕБЫШЕВА В МЕТОДЕ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Вирченко Г.А., Маломуж Т.В., Старун Н.В., Тулученко Г.Я.

В работе исследуется влияние взаимного расположения контура размещения точек коллокации и контура размещения точечных источников в методе точечных источников (*в методе фундаментальных решений согласно терминологии, принятой в иностранной литературе*). *На практических примерах показана целесообразность размещения указанных точек в узлах, которые являются корнями многочленов П.Л. Чебышева первого рода, когда оба контура представлены многофокусными лемнискатами с совпадающими фокусами. За отрезок, на котором находятся корни многочленов П.Л. Чебышева, выбирается отрезок, равный длине повторяющегося сегмента лемнискаты с учетом ее симметрий. Полные наборы точек формируются с учетом указанных симметрий. Использование многофокусных лемнискат в виде тестовых кривых обусловлено теоремой Д. Гильберта о возможности приближения с заданной точностью односвязного замкнутого контура* *многофокусной лемнискатой. Показано, что обусловленность основной матрицы системы метода точечных источников в граничных задачах Дирихле для уравнения Лапласа существенно улучшается, когда софокусные лемнискаты мало удалены одна от другой. При увеличении среднего расстояния между ними преимущества указанного размещения точек исчезают. Сравнение проводится с числами обусловленности систем, которые получают в случае равномерного (относительно полярного угла) размещения точек коллокации и точечных источников на многофокусных лемнискатах и окружностях соответственно. Такое размещение точек является наиболее распространенным в современной вычислительной практике применения метода точечных источников. Но рекомендуемое при этом использование метода регуляризации А.Н. Тихонова в граничных задачах со сложной геометрией области не всегда приводит к ожидаемым результатам. Поэтому поиски целесообразных способов размещения точек коллокации и точечных источников в одноименном методе продолжают быть актуальной задачей для исследователей. Перспективным направлением продолжения исследований является изучение влияния предложенного размещения указанных точек на равноудаленных контурах, которые не имеют самопересечений.*

Ключевые слова: метод точечных источников, обусловленность системы линейных алгебраических уравнений, регуляризация, лемниската.

THE USING OF P.L. CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN THE FUNDAMENTAL SOLUTIONS METHOD

Virchenko G., Malomuzh T., Starun N., Tuluchenko G.

The paper examines the influence of the mutual location of the contour for the collocation points and the contour for the point sources in the point source method (in the method of fundamental solutions according to the terminology adopted in foreign literature).

Practical examples show the feasibility of placing these points at nodes that are the roots of the P.L. Chebyshov polynomials of the first kind, when both contours are multifocal lemniscates with coinciding focuses.

For the segment on which the roots of P.L. Chebyshov polynomials are located selects a segment equal to the length of the repeating segment of the lemniscate, taking into account its symmetries. Full sets of points are

formed taking into account the specified symmetries.

The use of multifocal lemniscates in the form of test curves is due to D. Hilbert's theorem on the possibility of approaching with a given accuracy a simply connected closed contour by a multifocal lemniscate.

It is shown that the conditionality of the main matrix of the system of the point source method in the Dirichlet boundary value problems for the Laplace equation is significantly improved when the confocal lemniscates are little removed from one another.

With an increase in the average distance between them, the advantages of this location of points disappear.

The comparison is carried out with the condition numbers of the systems, which are obtained in the case of a uniform (relative to the polar angle) placement of the collocation points and point sources on the multifocus lemniscates and circles, respectively.

This placement of points is the most common in modern computational practice of applying of the method of fundamental solutions.

However, the use of the regularization method by A.M. Tikhonov in boundary problems with a complex geometry of the region does not always lead to the expected results.

Therefore, the search for expedient ways of placing the collocation points and point sources in the method of the same name continues to be an urgent task for researchers.

A promising direction for further research is the study of the effect of the proposed placement of these points on equidistant contours that do not have self-intersections.

Key words: the method of fundamental solutions, the condition of matrix for the systems of linear algebraic equations, regularization, lemniscate.