УДК 514.18

КОМПОЗИЦІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПЛОСКОЇ ДИСКРЕТНО ПОДАНОЇ КРИВОЇ

Лисенко К.Ю., аспірант*,
Найдиш А.В., д.т.н.,
Верещага В.М., д.т.н.,
Балюба І.Г., д.т.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

Надається тлумачення термінів вживаних у статті для більш чіткого зрозуміння відмінностей між традиційними методами інтерполяції та композиційною інтерполяцією.

Показано, що у традиційних методах інтерполяції точки вихідної ДПК віднесено до системи координат, в результаті чого, будь-яка поточна точка інтерполянта також визначається, як функція від аргументу, у тій самій системі координат.

І навпаки, вказується на те, що у композиційній інтерполяції вихідні-базисні точки задаються у системі координат, а положення будь-якої поточної точки визначається відносно базисних точок ДПК. Для того, щоб таке стало можливим здійснюється перехід від вихідної геометричної фігури до уніфікованої геометричної фігури, яка складається з геометричної та параметричної частин. Геометрична складова подається у вигляді композиційної БН-матриці точкової (абревіатура «БН» означає «Балюби-Найдиша»).

Параметрична складова подається у вигляді композиційної БН-матриці параметричної, елементами якої є БН-координати, що визначають положення поточної точки на інтерполяційній кривій відносно базисних точок. Добуток точкової і параметричної БН-матриць визначає композиційну БН-матрицю уніфікованої геометричної фігури.

Звертається увага та графічно показано, що значення поточної точки визначається як композиція часток базисних точок, а значення самих часток дорівнюють значенням БН-координат для відповідних базисних точок.

Показується, що розв'язок задач композиційним методом відбувається у просторі, а реалізація операцій над точками

* Науковий керівник – д.т.н., проф. Верещага В.М.

відбувається через виконання цих операцій над усіма їх координатами.

Вказується на те, що проведене дослідження є правдивим і для композиційної інтерполяції точок у кількості більшої ніж три.

Ключові слова: композиційна інтерполяція, Б-криві, БН-координати, уніфікована геометрична фігура.

Постановка проблеми. Для створення систем управління високотехнологічними суб'єктами господарювання потрібно розробляти нові методи геометричного моделювання. Розроблений метод композиційного геометричного моделювання дозволяє будувати, за модульним принципом, дозволяє враховувати необмежену скінчену кількість факторів на різних рівнях їхньої організації. Для підвищення якості створюваних композиційних моделей, виникла необхідність більш детального пояснення методу композиційної інтерполяції, яка є основою композиційного геометричного моделювання. Нова інтерпретація композиційної інтерполяції складає, певною мірою, проблему, яку і викладено у цій статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Композиційне геометричне моделювання (КГМ) створено на засадах точкового БН-числення [7]. У роботах [8] викладено основи КГМ, які було розвинуто у роботах [1, 2, 3], і у яких була застосована композиційна інтерполяція [4, 5, 6] у першому її розумінні. У даній статті подано нове її розуміння, яке виявилося певною проблемою.

Формулювання цілей статті. Подати нову інтерпретацію композиційної інтерполяції.

Основна частина. Виходячи з [10, 11], наведемо тлумачення термінів, які вживатимуться у цій статті.

1. Спосіб створення рівнянь – одноманітна основа для застосування методів алгебри та математичного аналізу щодо традиційних методів дослідження численних ліній та поверхонь, що є різними за формою та властивостями.

2. Рівняння – співвідношення вигляду $F(x, y) = 0$ для будь-яких дійсних чисел x та y, у якому $F(x, y)$ означає довільний вираз, що утримує x та y, та можливі параметри.

3. Параметри рівняння $F(x, y) = 0$ – зафіксовані значення a, b, c, … із множини довільно обраних дійсних чисел, що, окрім дійсних чисел x та y, є наявними у виразі $F(x, y)$.

4. Будь-які довільно обрані дійсні числа x_i та y_i задовільняють рівнянню $F(x, y) = 0$, коли $F(x_i, y_i) = 0$, і не задовільняють його коли $F(x_i, y_i) \neq 0$.

5. Рівняння лінії $F(x, y) = 0$ – є таким, що обов'язково віднесене до, довільно обраної, системи координат і координати x_i та y_i будь-якої поточної точки цієї лінії задовільняють рівнянню лінії $F(x_i, y_i) = 0$, а координати x_0, y_0 будь-якої довільної точки, що не належить цій лінії, призводять до нерівності $F(x_0, y_0) \neq 0$.

6. Функціональна залежність між змінними величинами встановлюється рівнянням $F(x, y) = 0$, тоді, коли будь-якому довільно заданому дійсному числу x, за наявності виразу $F(x, y)$, однозначно вираховується відповідне число y.

7. Графік функції – лінія, що визначена рівнянням вигляду $y = f(x)$, яке відшукане відповідними перетвореннями з рівняння лінії $F(x, y) = 0$.

Отже, виходячи з наведених вище тлумачень термінів, які однаково стосуються аналітичної геометрії і композиційного геометричного моделювання, покажемо відмінність традиційних методів моделювання ліній та поверхонь від методів композиційного геометричного моделювання.

Нехай задано, у декартовій системі координат, три точки A_1, A_2, A_3 (рис. 1), які необхідно глобально інтерполювати, тобто визначити рівняння лінії, з обраного класу K функцій, алгебраїчний вираз якої, у загальному вигляді, запишемо $F(x, y)$.

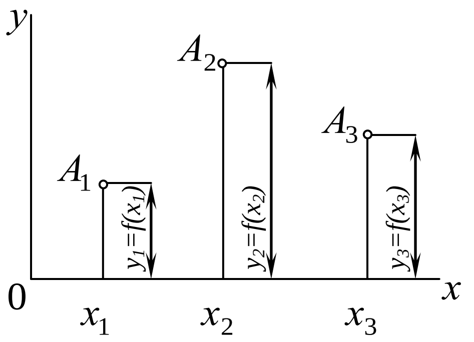

Рис. 1. Вихідні точки для визначення інтерполяційного рівняння лінії $F(x, y) = 0$.

Нехай якимось з традиційних методів інтерполяції відшукано рівняння лінії $F(x, y) = 0$, що інтерполює полюси A_1, A_2, A_3 і дозволяє однозначно вираховувати координати x_i та y_i поточної точки між вихідними полюсами.

Враховуючи тлумачення графіка функції, що наведені вгорі, знайдемо значення y, які відповідають значенням x_1, x_2, x_3 (рис. 1):

$$y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2);\ y_3 = f(x_3). \tag{1}$$

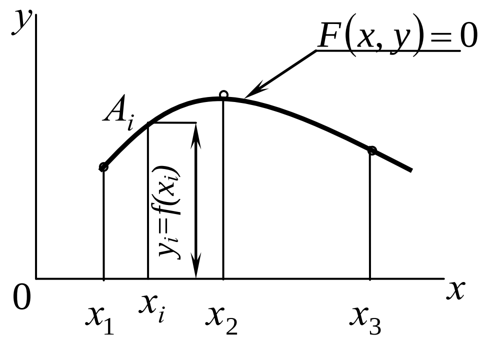

Рис. 2.Визначення поточної точки A_i за традиційним методом інтерполяції.

Тоді, графік функції і рівняння лінії $F(x,y)=0$, що відповідає результатам відшуканого інтерполянта, зобразимо на рис. 2, на якому індексом «*i*» позначено поточну точку інтерполяційної кривої $F(x,y)=0$.

Як бачимо, координата x_i поточної точки A_i обирається довільно у межах $x_1 \le x_i \le x_3$, а значення координати y_i вираховується як функція від x_i:

$$y_i = f(x_i). \tag{2}$$

Як бачимо, у традиційному методі інтерполяції і абсциса x_i, а також і ордината y_i з (2) визначені відносно системи координат Oxy.

І навпаки, композиційна інтерполяція має геть іншу філософію побудови інтерполянта – точкового рівняння Б-кривої, яке посилаючись на [3, 8, 9], має вигляд:

$$M = \sum_{i=1}^{3} A_i p_i \ , \tag{3}$$

де A_i для $i=\overline{1,3}$ – вихідні точки у відповідності до рис. 1; p_i – параметри – БН-координати, що визначають відносне взаємне розташування вихідних точок A_i (рис. 1).

Як вказувалось у роботі [9], для композиційної інтерполяції необхідно вихідну геометричну фігуру (ГФ) (рис. 1) поділити на дві складові:

– геометричну;
– параметричну.

Геометрична складова вихідної ГФ подається у вигляді композиційної БН-матриці точкової:

$$((A_1 \ \ A_2 \ \ A_3)). \tag{4}$$

Параметрична складова вихідної ГФ подається у вигляді композиційної БН-матриці параметричної:

$$((p_1 \ \ p_2 \ \ p_3)). \tag{5}$$

Таке поділення названо [9] уніфікацією вихідної ГФ, яке обов’язково передує композиційній інтерполяції.

Добуток композиційних матриць (4) та (5) визначить $M_Ф$ – композиційну матрицю ГФ:

$$M_{\Phi} = \left(\left(A_i\right)\right) \cdot \left(\left(p_i\right)\right) = \left(\left(A_i \cdot p_i\right)\right), \text{ для } i = \overline{1{,}3}. \qquad (6)$$

Розглянемо параметри p_i для $i = \overline{1{,}3}$ з (5). Як вказувалось у роботах [1, 2, 4, 5, 6, 7], вони є дробово-раціональними функціями уздовж параметру *U* або *V* і являють собою БН-координати, які:

- встановлюють взаємне розташування вихідних точок A_i уніфікованої геометричної фігури;
- забезпечують проходження Б-кривої через базисні точки;
- визначають положення поточної точки на Б-кривій відносно її базисних точок, а не відносно вихідної системи координат.

Тут треба розуміти, що до базисних точок відносяться ті, які обрано полюсами глобальної інтерполяції серед решти точок ДПК.

Б-крива, така крива положення поточної точки якої визначається відносно базисних точок.

У роботах [3, 8] було доведено, що поточна точка, будь-якої Б-кривої, формується як композиція часток базисних точок.

При цьому, розмір частки визначається значенням БН-координат p_i із (5), (6), сума яких завжди дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1. \qquad (7)$$

Як бачимо, елементи композиційної БН-матриці ГФ (6) є добутком точки A_i на БН-координату p_i. Що означає цей добуток? Як відомо, реалізація операцій над точками відбувається через здійснення операцій над її координатами. Тобто:

$$A_i \cdot p_i \rightarrow A_i(1) \cdot p_i;\; A_i(2) \cdot p_i;\; \ldots;\; A_i(n) \cdot p_i, \qquad (8)$$

де $A_i(1),\ A_i(2),\ \ldots,\ A_i(n)$ – відповідні координати точки A_i.

Іншими словами, якщо на основі композиційної БН-матриці (6) скласти точкове рівняння Б-кривої M, то воно виглядатиме:

$$M = \sum_{i=1}^{3} A_i p_i\ , \qquad (9)$$

то його реалізація здійснюється через відповідні координати рівняння:

$$M(1) = \sum_{i=1}^{3} A_i(1) \cdot p_i\ ;\ M(2) = \sum_{i=1}^{3} A_i(2) \cdot p_i\ ;\ \ldots\ ; M(n) = \sum_{i=1}^{3} A_i(n) \cdot p_i\ , \qquad (10)$$

де цифри у дужках *1, 2, 3, …, n* – вказують на номер відповідної координати.

Оскільки p_i єсть функції параметру *U*, то можемо записати:

$$p_i = f_i(U), \text{ де } 0 \le U \le 1, \qquad (11)$$

що означає для кожного поточного значення параметру *U* змінюється, відповідно, і значення параметру p_i в цілому. Однак, їх сума, у відповідності до (7), лишається сталою.

Тобто:

$$\sum_{i=1}^{3} f_i(U) = 1, \qquad (12)$$

де $0 \le U \le 1$ у вказаних межах приймає будь-яке значення із множини дійсних чисел.

Із всього сказаного випливає, що поточна точка M_0, будь-якої Б-кривої, єсть композицією від усіх її базисних точок (рис. 3).

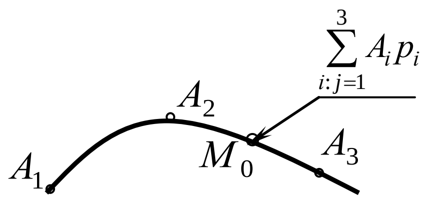

Рис. 3. Поточна точка M_0 як композиція базисних точок A_1, A_2, A_3.

Побудову поточної точки M_0 було розглянуто на прикладі композиційної інтерполяції трьох точок. Однак, така послідовність буде правдивою і для композиційної інтерполяції точок у кількості більшої ніж три. На рис. 3 параметр U для точки A_1 визначається $U_1 = \dfrac{x_1 - x_1}{x_3 - x_1} = 0$, для точки $A_3 \to U_3 = \dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1} = 1$.

Як бачимо, для традиційної інтерполяції (рис. 2) визначення поточної точки A_i, на графіку кривої $F(x, y) = 0$, відбувається відносно вихідної системи координат Oxy. І навпаки, у методі композиційної інтерполяції, положення поточної точки M_0 відшукується відносно базисних точок A_1, A_2, A_3 як сума часток кожної з них.

Висновки. Композиційна інтерполяція зменшує кількість параметрів у розв'язку задачі за рахунок виключення параметрів, що визначають положення вихідної геометричної фігури відносно системи координат. Однак, через базисні точки завжди можна визначити цей розв'язок відносно неї.

Композиційна інтерполяція завжди виконується у просторі з подальшим можливим її проектуванням на площини проекцій. Завдяки цьому, кількість координат, що визначають полюси інтерполяції, не обмежується, але має бути скінченою.

Наявність вказаних можливостей здешевлює композиційне геометричне моделювання і проведення комп'ютерних експериментів.

Література.

1. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Найдиш А.В. Застосування геометричних матриць для утворення точкових рівнянь Б-поверхонь. *Науковий вісник Таврійського державного*

агротехнологічного університету. Мелітополь, 2018. Вип. 8, Т.1, С. 153-160.
2. Адоньєв Є.О., Верещага В.М. Концептуальні засади використання композиційного методу геометричного моделювання при формуванні оптимального портфелю проектів з енергозбереження в навчальних закладах. *Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш.* Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. Вип. 9. С. 3-10.
3. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
4. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Встановлення взаємозв’язків між простими відношеннями трьох точок прямої та БН-координатами для геометричних фігур. *Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш.* Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018. Вип. 11. С. 3-7.
5. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для трьох точок. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси.* Х.: НТУ «ХПІ» 2016 р. №50 (1222).
6. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для чотирьох точок *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси.* Х.: НТУ «ХПІ», 2017. №16(1238).
7. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … д-ра. тех. наук. Макеевка: МИСИ,1995. 227 с.
8. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017.108 с.
9. Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Балюба І.Г. , Верещага В.М. Особливості композиційного геометричного моделюванн. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К., 2019. Вип. 95. С. 131-137.
10. Привалов И.И. Аналитическая геометрия: учебн. для вузов. М.: Наука, 1966, 272 с.
11. Рубцов М.О., Кравець В.І., Назарова О.П. Вища математика: навч. посібн.: у 2-х. ч., ч.1. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2015. 242 с.

КОМПОЗИЦИОННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПЛОСКОЙ ДИСКРЕТНО ЗАДАННОЙ КРИВОЙ

Лысенко К.Ю., Найдыш А.В., Верещага В.М., Балюба И.Г.

Предоставляется толкования терминов, употребляемых в статье, для более четкого понимания различий между традиционными методами интерполяции и композиционной интерполяцией.

Показано, что в традиционных методах интерполяции точки исходной ДПК отнесены к системе координат, в результате чего, любая текущая точка интерполянта также определяется, как функция от аргумента, в той же системе координат.

И наоборот, указывается на то, что в композиционной интерполяции исходные-базисные точки задаются в системе координат, а положение любой текущей точки определяется относительно базисных точек ДПК. Для того, чтобы такое стало возможным осуществляется переход от исходной геометрической фигуры к унифицированной геометрической фигуре, состоящей из геометрической и параметрической частей. Геометрическая составляющая представляется в виде композиционного БН-матрицы точечной (аббревиатура «БН» означает «Балюба-Найдиша»).

Параметрическая составляющая представляется в виде композиционной БН-матрицы параметрической, элементами которой являются БН-координаты, определяющие положение текущей точки на интерполяционной кривой относительно базисных точек. Произведение точечной и параметрической БН-матриц определяет композиционную БН-матрицу унифицированной геометрической фигуры.

Обращено внимание и графически показано, что значение текущей точки определяется как композиция частиц базисных точек, а значение самих частиц равны значениям БН-координат.

Показывается, что решение задач композиционным методом происходит в пространстве, а реализация операций над точками происходит через выполнение этих операций над всеми их координатами.

Указывается на то, что проведенное исследование является справедливым и для композиционной интерполяции большего количества точек.

Ключевые слова: композиционная интерполяция, Б-кривые, БН-координаты, унифицированная геометрическая фигура.

COMPOSITIVE INTERPOLATION OF PLANNED DISCRETE CURRENT CRUISES

Lysenko K., Naydysh A., Vereschaga V., Baluba I

Provides an interpretation of the terms used in the article for a clearer understanding of the differences between traditional interpolation methods and compositional interpolation.

It is shown that in traditional interpolation methods, the point of the original DPC is assigned to the coordinate system, which means that any current interpolator point is also defined as a function of the argument in the same coordinate system.

Conversely, it is indicated that in the compositional interpolation, the source-base points are given in the coordinate system, and the position of any current point is determined relative to the basic points of the DPK. In order to make this possible, the transition from the original geometric figure to a unified geometric figure, which consists of geometric and parametric parts, is carried out. The geometric component is presented in the form of a composite BN-matrix of a point (abbreviation "BN" means " Balyuba-Naydish").

The parametric component is presented in the form of a composite BN-matrix of parametric, whose elements are BN-coordinates, which determine the position of the current point on the interpolation curve relative to the basis points. The product of the point and parametric BN-matrices determines the compositional BN-matrix of a unified geometric figure.

It is pointed out and graphically shown that the value of the current point is defined as the composition of the particles of the base points, and the values of the particles themselves are equal to the value of the BN-coordinates.

It is shown that the solution of tasks by the compositional method takes place in space, and the implementation of operations over points occurs through the execution of these operations over all their coordinates.

It is indicated that the conducted research is true and for composite interpolation more than three points.

Key words: compositional interpolation, B-curves, BN-coordinates, unified geometric figure.