УДК 514.18

ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНІ УЯВНОГО ГІПЕРБОЛОЇДА ТА УТВОРЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Пилипака С.Ф., д.т.н.
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна),
Муквич М.М., к.т.н.[*]
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут» (Україна),
Захарова Т.М., к.т.н.
Сумський національний аграрний університет (Україна)

У роботі здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь на основі просторових ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного одно-порожнинного гіперболоїда, віднесеного до ізометричної сітки уявних координатних ліній. Параметричні рівняння уявного гіперболоїда отримано при обертанні уявної рівносторонньої гіперболи навколо її уявної осі на кут комплексної величини.

Використано розроблену авторами статті методику конструювання неперервних каркасів мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на уявних поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки уявних координатних ліній. Вибір поверхонь обертання зумовлений спрощенням аналітичних умов перетворення їх ортогональної сітки уявних координатних ліній до ізометричної, нескінченно мала чарунка якої є квадратом. Параметричні рівняння сімей ізотропних ліній отримано із умови рівності нулю лінійного елемента уявної поверхні обертання, віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній.

Використовуючи розроблений метод конструювання неперервних каркасів мінімальних поверхонь, показано, що на поверхні уявного гіперболоїда, віднесеного до ізометричної сітки уявних координатних ліній, можна знайти аналітичний опис чотирьох сімей уявних ізотропних ліній. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня і приєднана до неї, які є площинами. У статті знайдено аналітичний опис відповідних плоских ізометричних сіток для різних комплексних значень кута повороту уявної рівносторонньої гіперболи.

Запропонована авторами статті методика неперервного геометричного моделювання засобами комплексного аналізу має відомі переваги, зумовлені знаходженням параметричних рівнянь мінімальних поверхонь у вигляді елементарних функцій. Отриманий

[*] Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

аналітичний опис мінімальних поверхонь дозволяє враховувати їх диференціальні характеристики для оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм і архітектурних конструкцій.

Ключові слова: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, одно-порожнинний гіперболоїд, лінійний елемент поверхні, ізометрична сітка координатних ліній.

Постановка проблеми. Для проектування поверхонь технічних форм та періодичних структур різноманітних матеріалів можливе використання геометричних моделей на основі мінімальних поверхонь. Переваги використання мінімальних поверхонь при формоутворенні оболонок, які задовольняють задані архітектурні вимоги, було показано у монографії «Расчёт оболочек сложной формы» [1], опублікованої у 1990 році науковцями київської школи архітектурного проектування (КНУБА). Геометрична форма мінімальної поверхні, середня кривина у всіх точках якої дорівнює нулю, забезпечує рівномірний розподіл зусиль при взаємодії оболонки з середовищем [1, с. 152]. Зокрема, розробці методу «натягнутих сіток» та його алгоритмічній реалізації у прикладних задачах конструювання і згладжування геометричних моделей мінімальних поверхонь на основі дискретної множини реперних точок присвячено роботи професора Є.В. Попова та його учнів [2, 3].

Задача знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь, починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), реалізується за допомогою методів комплексного аналізу [4, с. 685]. Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснюють у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для знаходження параметричних рівнянь мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти аналітичний опис ізотропних ліній нульової довжини. Моделювання ізотропних ліній за допомогою фундаментальних сплайнів розглянуто у роботі [5]. Ряд робіт авторів статті присвячена задачі знаходження аналітичного опису ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній [6, 7]. При цьому потребує дослідження задача аналітичного опису ізотропних ліній, які належать уявним поверхням обертання, віднесеним до ізометричної сітки уявних координатних ліній.

Формулювання цілей статті. Знайти параметричні рівняння просторових ізотропних ліній, які лежать на уявній поверхні одно-порожнинного гіперболоїда, віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній. Використовуючи аналітичний опис ізотропних ліній визначити параметричні рівняння відповідних мінімальних поверхонь.

Основна частина. У роботі [8] було показано, що поверхню гіперболоїда у загальному вигляді не можна віднести до ізометричної сітки координатних ліній. Тому не можна знайти аналітичний опис ізотропних ліній на цій поверхні. Назвемо «уявною гіперболою» плоску уявну криву, задану параметричними рівняннями:

$$\varphi(\tau) = a \cdot \mathrm{ch}\tau; \quad \psi(\tau) = a \cdot i \cdot \mathrm{sh}\,\tau, \tag{1}$$

де $\tau \in [0;\, 2\pi)$, $a > 0$ – параметр, i – уявна одиниця.

Розглянемо уявну поверхню, утворену при обертанні уявної кривої (1) навколо осі ψ на деякий кут, комплексна величина якого дорівнює: $(\alpha + \beta i) \cdot w$, де $\alpha, \beta \in R$; $w \in [0;\, 2\pi)$; i – уявна одиниця.

Параметричні рівняння уявної поверхні обертання, яку можна назвати «уявним одно-порожнинним гіперболоїдом», є функціями комплексної змінної і мають вигляд:

$$\begin{aligned} X(\tau; w) &= a \cdot \mathrm{ch}\tau \cdot \cos[(\alpha + \beta i)w]; \\ Y(\tau; w) &= a \cdot \mathrm{ch}\tau \cdot \sin[(\alpha + \beta i)w]; \\ Z(\tau; w) &= a \cdot i \cdot \mathrm{sh}\tau. \end{aligned} \tag{2}$$

Для віднесення уявної поверхні (2) до ізометричної сітки уявних координатних ліній та знаходження на її поверхні параметричних рівнянь ізотропних ліній використаємо методику, запропоновану авторами статті у роботі [6]. Аналітична залежність для переходу від ортогональної до ізометричної сітки координатних ліній уявної поверхні (2) має вигляд [6]:

$$t = \frac{1}{\alpha + \beta i} \cdot \int \frac{\sqrt{(\varphi_\tau')^2 + (\psi_\tau')^2}}{\varphi(\tau)} \cdot d\tau. \tag{3}$$

Підставивши вирази (1) у (3), після перетворень, отримаємо залежність:

$$t = \frac{1}{\alpha + \beta i} \cdot \int \frac{i}{\mathrm{ch}(\tau)} \cdot d\tau = \frac{2 \cdot i}{\alpha + \beta i} \cdot \mathrm{arctg}\left[\mathrm{th}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right] + C_1,$$

де C_1 – довільна стала інтегрування.

Нехай $C_1 = 0$, тоді із останньої рівності знайдемо умову переходу від ортогональної до ізометричної сітки координатних ліній для уявної поверхні (2):

$$\tau = 2 \cdot \mathrm{Arth}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2} t(-i \cdot \alpha + \beta)\right)\right]. \tag{4}$$

Підставивши вираз (4) у (1), після перетворень і спрощень, отримаємо параметричні рівняння поверхні обертання уявної рівносторонньої гіперболи, яку віднесено до ізометричної сітки уявних координатних ліній:

$$X(t;w)=\frac{a\cdot\cos[(\alpha+\beta i)\cdot w]}{\cos[(\beta-\alpha i)\cdot t]};\quad Y(t;w)=\frac{a\cdot\sin[(\alpha+\beta i)\cdot w]}{\cos[(\beta-\alpha i)\cdot t]};$$
$$Z(t;w)=a\cdot\operatorname{th}[(\alpha+\beta i)\cdot t], \tag{5}$$

де $a>0-$параметр; $t,\alpha,\beta\in R;\quad w\in[0;\ 2\pi)$.

Лінійний елемент уявної поверхні (5), віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній, має вигляд:

$$ds^2=a^2(\alpha+\beta i)^2\cdot\operatorname{sch}^2[(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t]\cdot\left(dw^2+dt^2\right). \tag{6}$$

Розклавши на множники вираз (6), отримаємо:

$$ds^2=a^2(\alpha+\beta i)^2\cdot\operatorname{sch}^2[(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t]\cdot(dw-i\cdot dt)(dw+i\cdot dt),$$

де $i-$уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$w=i\cdot t+C\quad\text{або}\quad w=-i\cdot t+C, \tag{7}$$

де $C-$довільна стала інтегрування.

При підстановці виразу $w=i\cdot t+C$ у рівняння уявної поверхні (5) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної лінії, яка лежить на цій уявній поверхні обертання:

$$x(t)=\frac{a\cdot\cos[(\alpha+\beta i)(i\cdot t+C)]}{\cos[(\beta-\alpha i)\cdot t]};$$
$$y(t)=\frac{a\cdot\sin[(\alpha+\beta i)(i\cdot t+C)]}{\cos[(\beta-\alpha i)\cdot t]}; \tag{8}$$
$$z(t)=a\cdot\operatorname{th}[(\alpha+\beta i)\cdot t].$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у рівняннях (8) уведемо заміну: $t=u+i\cdot v$.

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (8), отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

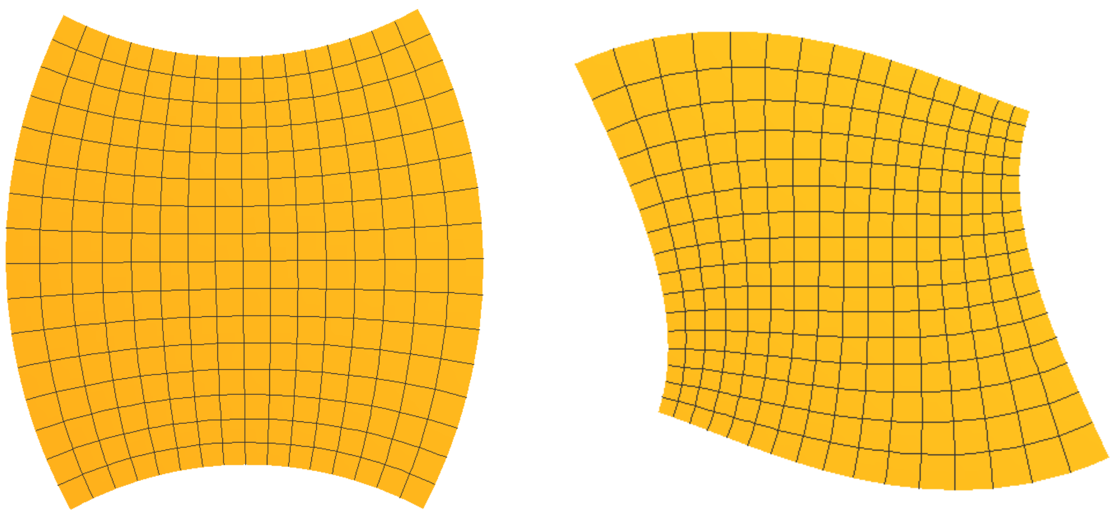
$$X(u,v)=a\cdot\frac{\cos[C\alpha-2(v\alpha+u\beta)]\cdot\operatorname{ch}(C\beta)+\operatorname{ch}[2u\alpha+(C-2v)\beta]\cdot\cos(C\alpha)}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\operatorname{ch}[2(u\alpha+v\beta)]};$$
$$Y(u,v)=2a\frac{\cos(v\alpha+u\beta)\operatorname{ch}[u\alpha+(C-v)\beta]\operatorname{ch}[u\alpha-v\beta]\sin[(C-v)\alpha-u\beta]}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\operatorname{ch}[2(u\alpha-v\beta)]}+$$
$$+2a\cdot\frac{\cos[(C-v)\alpha-u\beta]\cdot\sin(v\alpha+u\beta)\cdot\operatorname{sh}[u\alpha+(C-v)\beta]\cdot\operatorname{sh}[u\alpha-v\beta]}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\operatorname{ch}[2(u\alpha-v\beta)]}; \tag{9}$$
$$Z(u,v)=\frac{2\operatorname{sh}[2(u-2v)]}{\cos[2(2u+v)]+\operatorname{ch}[2(u-2v)]}$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^{*}(u,v) = -2a\frac{\cos(v\alpha+u\beta)\mathrm{sh}[u\alpha+(C-v)\beta]\mathrm{ch}[u\alpha-v\beta]\sin[(C-v)\alpha-u\beta]}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\mathrm{ch}[2(u\alpha-v\beta)]} -$$
$$-2a\cdot\frac{\cos[(C-v)\alpha-u\beta]\cdot\sin(v\alpha+u\beta)\cdot\mathrm{ch}[u\alpha+(C-v)\beta]\cdot\mathrm{sh}[u\alpha-v\beta]}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\mathrm{ch}[2(u\alpha-v\beta)]};$$
$$Y^{*}(u,v) = 2a\frac{\cos(v\alpha+u\beta)\mathrm{sh}[u\alpha+(C-v)\beta]\mathrm{ch}[u\alpha-v\beta]\cos[(C-v)\alpha-u\beta]}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\mathrm{ch}[2(u\alpha-v\beta)]} - \qquad (10)$$
$$-2a\cdot\frac{\sin[(C-v)\alpha-u\beta]\cdot\sin(v\alpha+u\beta)\cdot\mathrm{ch}[u\alpha+(C-v)\beta]\cdot\mathrm{sh}[u\alpha-v\beta]}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\mathrm{ch}[2(u\alpha-v\beta)]};$$
$$Z^{*}(u,v) = \frac{a\sin[2(v\alpha+u\beta)]}{\cos[2(v\alpha+u\beta)]+\mathrm{ch}[2(u\alpha-v\beta)]}.$$

Параметричні рівняння (9) і (10) визначають одно-параметричні множини площин.

На рис.1 зображено плоскі ізометричні сітки мінімальних поверхонь, побудованих за рівняннями (9), при $a=1$; $C=0$ $u\in[-0{,}5;\ldots0{,}5]$; $v\in[-0{,}5;\ldots0{,}5]$.



а б

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за рівняннями (9): а) при $\alpha=0$; $\beta=1$; б) при $\alpha=1$; $\beta=1$

Вираз (6) можна розкласти на множники іншим способом:

$$ds^2 = a^2(\alpha+\beta i)^2\cdot\mathrm{sch}^2[(\alpha+\beta\cdot i)\cdot t]\cdot(dt-i\cdot dw)(dt+i\cdot dw).$$

Тоді з аналогічних міркувань можна знайти аналітичний опис двох сімей ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь, кожна з яких є площиною.

Висновки. На уявній поверхні обертання уявної гіперболи для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній, і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні є площинами.

Література

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В. Расчёт оболочек сложной формы. К.: Будівельник, 1990. 192 с.
2. Попов Е. В. Метод натянутых сеток в задачах геометрического моделирования: дис. … д-ра техн. наук : 05.01.01 / Нижегородский гос. архитектурно-строительный университет, 2001. 248 с.
3. Шалимов В. Н. Геометрическое моделирование тентовых тканевых конструкций: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т, 2012. 135 с.
4. Математическая энциклопедия / гл.ред. И.М. Виноградов. Москва: Изд–во «Советская энциклопедия», 1982. Т.3. С.683–690.
5. Аушева Н. М. Ізотропні фундаментальні сплайни. *Сучасні проблеми моделювання.* 2016. №6. С. 3–7.
6. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Аналітичні залежності утворення ізотропних ліній на уявних поверхнях обертання. *Сучасні проблеми моделювання*. 2018. №12. С. 126–131.
7. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні уявного катеноїда та конструювання мінімальних поверхонь. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2018. №3(66). Т.2. С. 159–163.
8. Несвидомин В.Н., Пилипака Т.С., Кремец Т.С. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности. *MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture.* Lublin – Rzeszov, 2014. Vol. 16, No 3. С. 58 – 65.

ОБРАЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ МНИМОГО ГИПЕРБОЛОИДА И КОНСТРУИРОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пилипака С.Ф., Муквич Н.Н., Захарова Т.Н.

В работе получено аналитическое описание минимальных поверхностей на основе пространственных изотропных линий, которые лежат на поверхности мнимого однополостного гиперболоида, отнесенного к изометрической сети мнимых координатных линий. Параметрические уравнения мнимого *гиперболоида получены при вращении мнимой равносторонней гиперболы вокруг ее оси на угол комплексной величины.*

Использовано разработанную авторами статьи методику конструирования непрерывных каркасов минимальных поверхностей с помощью изотропных линий, которые лежат на мнимых поверхностях вращения, отнесенных к изометрической сети мнимых координатных линий. Выбор поверхностей вращения обусловлен упрощением аналитических условий преобразования их ортогональной сети мнимых координатных линий к изометрической, бесконечно малая ячейка которой представляет собой квадрат. Параметрические уравнения семейства изотропных линий найдены из условия равенства нулю линейного элемента мнимой поверхности вращения, отнесенной к изометрической сети мнимых координатных линий.

Используя разработанный метод конструирования непрерывных каркасов минимальных поверхностей, показано, что на поверхности мнимого гиперболоида, отнесенного к изометрической сети мнимых координатных линий, можно найти аналитическое описание четырех семейств мнимых изотропных линий. Каждой изотропной линии соответствует минимальная поверхность и присоединенная к ней, которые являются плоскостями. В статье найдено аналитическое описание соответствующих плоских изометрических сеток для различных комплексных значений угла поворота мнимой равносторонней гиперболы.

Предложенная авторами статьи методика непрерывного геометрического моделирования имеет известные преимущества, обусловленные нахождением параметрических уравнений минимальных поверхностей в виде элементарных функций. Такое аналитическое описание минимальных поверхностей позволяет учитывать их дифференциальные характеристики для оптимизации инженерных методов проектирования поверхностей технических форм и архитектурных конструкций.

Ключевые слова: изотропная линия, минимальная поверхность, однополостный гиперболоид, линейный элемент поверхности, изометрическая сеть координатных линий.

DEFINITION OF ISOTROPY LINES PARAMETRIC EQUATIONS ON THE IMAGINARY HYPERBOLOID SURFACE AND DESIGN OF MINIMAL SURFACES

Pylypaka S., Mukvich M., Zakharova T.

An analytical description of minimal surfaces based on spatial *isotropic lines that lie on the surface of an imaginary hyperboloid of one sheet related to an isometric network of imaginary coordinate lines was obtained. Parametric equations of an imaginary hyperboloid are obtained by rotating an imaginary equilateral hyperbola around its axis by an angle of a complex value.*

The method developed by the authors for constructing continuous frames of minimal surfaces using isotropic lines that lie on imaginary surfaces of revolution related to an isometric network of imaginary coordinate lines is used. The choice of rotation surfaces is due to the simplification of the analytical conditions for the transformation of their orthogonal network of imaginary coordinate lines to an isometric one, the infinitely small cell of which is a square. The parametric equations of the family of isotropic lines are found from the condition that the linear element is equal to zero of the imaginary surface of revolution related to an isometric network of imaginary coordinate lines.

Using the developed method for constructing continuous frames of minimal surfaces, it was shown that on the surface of an imaginary hyperboloid related to an isometric network of imaginary coordinate lines, one can find an analytical description of four families of imaginary isotropic lines. Each isotropic line corresponds to a minimal surface and attached to it, which are planes. The article found an analytical description of the corresponding flat isometric grids for various complex values of the angle of rotation of an imaginary equilateral hyperbola.

The method of continuous geometric modeling proposed by the authors of the article has known advantages due to the finding of the parametric equations of minimal surfaces in the form of elementary functions. Such an analytical description of minimal surfaces allows one to take into account their differential characteristics for optimization of engineering methods for designing surfaces of technical forms and architectural structures.

Key words: isotropic line, minimal surface, hyperboloid of one sheet, linear surface element, isometric grid of coordinate lines.