УДК 515.2

ІТЕРАТИВНИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ НОРМАЛІ ДО КРИВОЇ

Білицька Н.В., к.т.н.,
Гетьман О.Г., к.т.н.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)

Для інтерполяції точкових каркасів обводів виробів складних форм найчастіше застосовуються криві другого порядку або криві Без'є третього порядку. Є відомі виконані дослідження з моделювання кривих, які задані дискретним набором точок, за допомогою апарата сплайн-апроксимації. Але ці методи призводять до високої дрібності обводу. Застосування апроксимаційних методик з деякою наперед заданою точністю знижує дрібність обводів. Конструювання складних кривих та поверхонь надає кращі результати при оцінці відхилень точок каркасу від геометричного об'єкту, що створюється, за нормаллю до кривої або поверхні. Але точне рішення цієї задачі потребує надзвичайно багато часу, оскільки призводить до розв'язування рівнянь високих ступенів декілька тисяч разів. В роботі пропонується ітеративний алгоритм побудови нормалі до плоскої кривої, що дозволяє не розв'язувати рівняння високих ступенів, а замінити цій процес розв'язуванням систем лінійних рівнянь та скоротити час конструювання складних обводів. Його практичне застосування продемонструвало достатньо швидку збіжність алгоритму на ділянках опуклості точкового каркасу. Наведена методика обчислення відхилень за нормаллю може бути застосована при конструюванні перерізів лопаток турбін, спряжених поверхонь сільськогосподарських знарядь та обводів летальних апаратів.

Ключові слова: конструювання складних кривих, дискретний набор точок, точковий каркас, обвід, поліном, ступінь полінома, моделювання кривих, інтерполяція, апарат сплайн-апроксимації, апроксимація, наближені методи, дрібність обводів, фіксована точка, нормаль, оцінка відхилень за нормаллю, найкоротша відстань, дотична, метод дотичних, метод Ньютона, перпендикуляр, центральні проекції, ітерація, ітеративний процес, збіжність ітеративного процесу, збіжність алгоритму, система рівнянь.

Постановка проблеми. При розв’язку задач конструювання складних кривих за точковим каркасом найкращі результати дають критерії оцінки відхилень за нормаллю до кривої. Але розв’язок цієї задачі класичними методами дуже громіздкий та потрібує дуже багато часу. Тому виникає необхідність пошуку наближених методів побудови нормалей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для інтерполяції точкових каркасів обводів виробів складних форм найчастіше застосовуються криві другого порядку або криві Без’є третього порядку [1]. Відомі виконані дослідження з моделювання кривих, які задані дискретним набором точок, за допомогою апарата сплайн-апроксимації [2]–[4]. Але ці методи призводять до високої дрібності обводу. Застосування апроксимаційних методик з деякою наперед заданою точністю знижує дрібність обводів. Щоб зменшити обчислювальні труднощі в цьому випадку потрібен ефективний алгоритм оцінки відхилень точок каркаса від кривої, що створюється.

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка наближеного ітеративного алгоритму визначення нормалі до кривої, що має стійку збіжність, не потребує багатьох ітерацій та значного часу розрахунків.

Основна частина. У процесі розв'язку практичних задач конструювання складних поверхонь часто виникає необхідність визначення найкоротшої відстані фіксованої точки до заданої кривої [5]. Пошук відстані від точки $\boldsymbol{M(x_M, y_M)}$ до кривої $\boldsymbol{y = f(x)}$ приводить до рівняння:

$$f'(x)(f(x) - y_M) + x - x_M = 0 \tag{1}$$

відносно абсциси точки кривої, що розташована найближче до точки $\boldsymbol{M}$. Розв’язок цього рівняння дозволяє визначити координату найближчої точки та встановити величину мінімальної відстані від точки $\boldsymbol{M}$ до кривої.

Алгоритм дуже простий, але навіть у тих випадках, коли задана крива описується, наприклад, поліномом шостого ступеня, його застосування призводить до рівняння одинадцятого ступеня та потребує нереально багато часу, коли задачу пошуку мінімальної відстані доводиться розв’язувати декілька тисяч разів. Тому при розв’язку практичних задач виникає необхідність у наближених методах пошуку найкоротшої відстані, які не потребують безпосереднього розв’язку рівняння (1). Розглянемо один з таких методів.

В основу алгоритму положено дві обставини:

а) як один з методів розв'язку рівняння (1) може бути застосовано метод дотичних (або метод Ньютона);

б) як правило, найкоротша відстань від точки до кривої визначається по нормалі, яка проведена від заданої точки до кривої.

Ці два факти дозволяють сформулювати наближений алгоритм визначення найкоротшої відстані, основна ідея якого описана нижче.

З точки М у довільному напрямку проводиться пряма, яка перетинає криву $\boldsymbol{y = f(x)}$ у деякої точці $\boldsymbol{O_1}$. У цій точці до кривої проводиться дотична $\boldsymbol{l_1}$, на яку з точки $\boldsymbol{M}$ будується перпендикуляр $\boldsymbol{h_1}$, що перетинає криву $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точці $\boldsymbol{O_2}$. Над точкою $\boldsymbol{O_2}$ виконуються ті ж операції, що й над точкою $\boldsymbol{O_1}$ й так далі.

Наведений алгоритм є особливим різновидом метода дотичних для розв'язку рівняння (1) і зводиться до розв'язку рівнянь більш низьких порядків, ніж рівняння (1).

Але дуже важливо отримати алгоритм, що не потребує розв'язку рівнянь ступеня вище першого, що гарантувало би невеликий час його роботи. Для розробки такого алгоритму бажано не застосовувати процедури визначення точок $\boldsymbol{O_1, O_2,\dots}$ перетину перпендикулярів із кривої, замість чого визначити їх центральні проекції з точки $\boldsymbol{M}$ на відповідні дотичні.

Наведемо розроблений алгоритм пошуку найкоротшої відстані від точки до кривої із застосуванням вказаного спрощення.

Задана точка $\boldsymbol{M(x_M, y_M)}$ та крива $\boldsymbol{y = f(x)}$, необхідно з точки $\boldsymbol{M}$ провести нормаль до кривої. Для цього з точки $\boldsymbol{M}$ проводимо пряму, що паралельна осі ординат до перетину з кривою (рис.1). З точки перетину $\boldsymbol{M'_1(x_M, f(x_M))}$ проводимо дотичну $\boldsymbol{l_1}$ до кривої, з точки $\boldsymbol{M}$ будуємо перпендикуляр $\boldsymbol{h_1}$ на цю дотичну, точку перетину позначимо $\boldsymbol{O_1(x_1, y_1)}$. Далі через точку $\boldsymbol{O_1}$ знову проводимо пряму, що паралельна осі ординат, до перетину з кривою. В отриманій точці $\boldsymbol{M'_2(x_1, f(x_1))}$ перетину будуємо дотичну $\boldsymbol{l_2}$ до кривої й в результаті перетину перпендикуляру $\boldsymbol{h_2}$, що опущений з точці $\boldsymbol{M}$, та дотичної $\boldsymbol{l_2}$ отримуємо точку $\boldsymbol{O_2(x_2, y_2)}$. Аналогічно виконуються подальші кроки алгоритму. При цьому першим наближенням нормалі є відрізок $\boldsymbol{MO_1}$, другим – $\boldsymbol{MO_2}$, і так далі.

На *(к+1)*-му кроці координати точки $\boldsymbol{O_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})}$ визначаються розв'язком системи двох лінійних рівнянь:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

$$y = y_M - \frac{(x - x_M)}{f'(x_k)},$$

яке має вигляд:

$$x_{k+1} = \frac{(f'(x_k))^2 x_k + y_M f'(x_k) - f(x_k) f'(x_k) + x_M}{1 + (f'(x_k))^2},$$
$$y_{k+1} = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k). \quad (2)$$

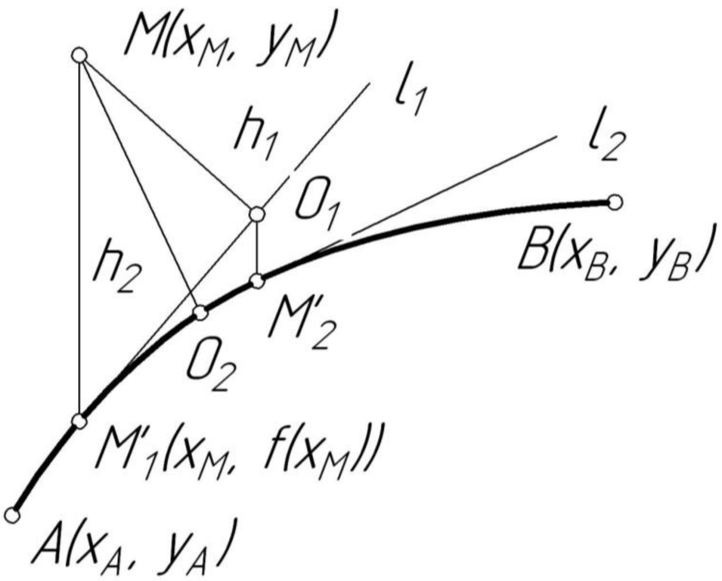

Рис. 1. Ітеративний алгоритм побудови нормалі до кривої

Процес пошуку нормалі продовжується до тих пір, поки кут $\boldsymbol{O_k M O_{k+1}}$ між перпендикулярами $\boldsymbol{h_k}$ та $\boldsymbol{h_{k+1}}$, які отримані на *к*-м та *(к+1)*-му кроках не стане меншим наперед заданого значення $\propto_0$.

Цей кут визначається за формулою:

$$\propto = \arccos[\frac{(x_k - x_M)(x_{k+1} - x_M) + (y_k - y_M)(y_{k+1} - y_M)}{((x_k - x_M)^2 + (y_k - y_M)^2)((x_{k+1} - x_M)^2 + (y_{k+1} - y_M)^2)}.$$

Якщо $\propto < \propto_0$, то шукана відстань дорівнює

$$s = \sqrt{(x_{k+1} - x_M)^2 + (y_{k+1} - y_M)^2}.$$

Для того, щоб описаний алгоритм можна було застосовувати до розв'язку практичних задач конструювання, слід визначити, в яких випадках послідовність точок $\boldsymbol{O_1}$**,** $\boldsymbol{O_2}$**,…** сходиться к точці кривої, що найближче до точці $\boldsymbol{M}$.

Розглянемо рекурентне співвідношення (2) і припустимо, що послідовність точок $\boldsymbol{O_1}$**,** $\boldsymbol{O_2}$**,…** сходиться до деякої точки $\boldsymbol{O(x_0, y_0)}$. Нехай, крім того, функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ має на всьому відрізку $[\boldsymbol{x_A}, \boldsymbol{x_B}]$

неперервну першу похідну ***f'(x)*** (це допущення справедливо для більшості класів апроксимуючих функцій). Тоді справедливі співвідношення:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0\,, \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = y_0,$$

або

$$x_0 = \frac{(f'(x_0))^2 x_0 + y_M f(x_0) - f(x_0) f'(x_0) + x_M}{1 + (f'(x_0))^2}, \tag{3}$$

$$y_0 = f(x_0). \tag{4}$$

З рівняння (4) слідує, що гранична точка ***O(x₀, y₀)*** належить кривій ***y = f(x)***. Перетворимо рівняння (3).

Маємо:

$$x_M = x_0 + \left(y_M - f(x_0)\right) f'(x_0) = 0\,.$$

Таким чином, координати точки O задовольняють рівнянню (1). Згідно доведеному, якщо на кривій ***y = f(x)*** існує тільки одна точка, що розташована найближче до точки ***M***, абсциса якої належить інтервалу [x_A, x_B], то для ітераційного процесу, який описано рівняннями (2) та сходиться, цей процес також сходиться до основи ***O***(x_0, y_0) шуканої нормалі.

Висновки. Застосування на практиці запропонованого алгоритму визначення найкоротшої відстані від точки до кривої показало, що він достатньо швидко сходиться на ділянках опуклості та потребує невеликої кількості ітерацій.

Література

1. Шепель В.П., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Гриценко І.А. Моделювання перегину кубічної кривої Без'є за трикутником дотичних її дуги. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* Вип. 4. Т. 48, «Актуальні проблеми геометричного моделювання»: матеріали XII міжнародної науково-практичної конференції. Мелітополь: ТДАТУ, 2010, С. 22-29.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.. Сплайны в вычислительной математике. М., "Наука", 1976. 248 с.
3. Бурова И.Г., Демьянович Ю.К., Евдокимова Т.О. Сплайн-всплески и их реализации. СПб., СПбГУ, 2018. 414 с.
4. Роженко А.И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. Новосибирск, ИВМиМГ СО РАН, 2005. 244 с.
5. Білицька Н.В., Гетьман О.Г. Моделювання складних кривих за точковим каркасом при оцінюванні відхилень за нормаллю.

Сучасні проблеми моделювання: збірник наук праць. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім.. Б.Хмельницького, 2017. № 8. С. 16-20.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛИ К КРИВОЙ

Біліцька Н.В., Гетьман О.Г.

Для интерполяции точечных каркасов обводов изделий сложных форм чаще всего используются кривые второго порядка или кривые Безье третьего порядка. Известны проведенные исследования по моделированию кривых, заданных дискретным набором точек, с помощью сплайн-аппроксимации. Но эти методы приводят к высокой дробности обвода. Использование аппроксимационных методик с некоторою наперед заданною точностью снижает дробность обводов. Конструирование сложных кривых и поверхностей дает лучшие результаты при оценке отклонений точек каркаса от создаваемого геометрического объекта по нормали к кривой или поверхности. Однако точное решение этой задачи требует недопустимо много времени, поскольку приводит к решению уравнений высоких степеней несколько тысяч раз. В работе предлагается итерационный алгоритм построения нормали к плоской кривой, который позволяет избежать решения уравнений высоких порядков, а заменить этот процесс решением систем линейных уравнений, что сокращает время конструирования сложных обводов. Его практическое применение продемонстрировало достаточно быструю сходимость алгоритма на участках выпуклости точечного каркаса. Приведенная методика вычисления отклонений по нормали может быть использована при конструировании сечений лопаток турбин, сопряженных поверхностей сельскохозяйственных орудий и обводов летательных аппаратов.

Ключевые слова: конструирование сложных кривых, дискретный набор точек, точечный каркас, обвод, полином, степень полинома, моделирования кривых, интерполяция, аппарат сплайн-аппроксимации, аппроксимация, приближенные методы, дробность обвода, фиксированная точка, нормаль, оценка отклонений по нормали, ближайшее расстояние, касательная, метод касательных, метод Ньютона, перпендикуляр, центральная проекция, итерация, сходимость алгоритма, система уравнений, итерационный процесс.

ITERATION ALGORITHM OF DETERMINATION OF NORMAL TO CURVE

Bilytska N., Hetman A.

For interpolation of point frameworks of circumferences of wares of difficult forms curves are more frequent than all used the second order or curves of Bezier of the third order. The conducted researches are known on the design of curves, set the discrete set of points, by spline-approximation. But these methods result in the high shot of circumference. The use of approximation methods with some in advance set exactness reduces the shot of circumferences. Constructing of difficult curves and surfaces gives the best results at the estimation of rejections of points of framework from the created geometric on a normal to the curve or surface. However much the exact solution of this task requires impermissible much time, as brings a few thousand over one times to the decision of equalizations of high degrees.

The iteration algorithm of construction of normal is in-process offered to the flat curve, which allows to avoid the decision of equalizations of high orders, and to replace this process the decision of the systems of linear equalizations, that abbreviates time of constructing of difficult circumferences. His practical application showed rapid enough convergence of algorithm on the areas of bulge of point framework. The resulted method of calculation of rejections on a normal can be used for constructing of sections of shoulder-blades of turbines, attended surfaces of agricultural instruments and circumferences of aircrafts.

Keywords: constructing of difficult curves, discrete set of points, point framework, circumference, polynomial, degree of polynomial, designs of curves, interpolation, vehicle of spline-approximation, approximation, close methods, shot of circumference, fixed point, normal, estimation of rejections on a normal, nearest distance, tangent, method of tangents, method of Newton, perpendicular, central projection, iteration, convergence of algorithm, system of equalizations, iteration process.