УДК 514.18

# ПРОСТОРОВІ КРИВІ, У ЯКИХ РУХОМИМ АКСОЇДОМ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА Є ПЛОСКИЙ ПУЧОК

Кресан Т.А., к.т.н.
*ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут» (Україна),*
Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Несвідомін В.М., д.т.н.,
Бабка В.М., к.т.н.
*Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна),*
Федорина Т.П., к.п.н.
*ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут» (Україна)*

*Рух твердого тіла в просторі характеризується рухомим і нерухомим аксоїдами, якими є лінійчаті поверхні. Цей рух можна відтворити, якщо по нерухомому аксоїду обкочувати рухомий аксоїд. Лінією контакту в процесі обкочування є спільна прямолінійна твірна поверхонь. При обкочуванні рухомого аксоїда по нерухомому може відбуватися одночасне їх ковзання вздовж цієї прямої лінії контакту.*

*Рух тригранника Френе по просторовій напрямній кривій можна розглядати, як рух твердого тіла в просторі, закон переміщення якого залежить від диференціальних характеристик напрямної кривої – кривини і скруту у функції довжини дуги. Тригранник рухається поступально в напрямі орта дотичної і одночасно обертається навколо миттєвої осі обертання. Положення цієї осі в системі супровідного тригранника залежить від співвідношення кривини і скруту. Два рухи – поступальний в напрямі орта дотичної і обертальний навколо осі миттєвого обертання – можна замінити одним гвинтовим рухом навколо миттєвої осі обертання і ковзання, яка носить назву кінематичного гвинта.*

*В загальному випадку рухомим аксоїдом є коноїд. Можливі часткові випадки, коли рухомим аксоїдом є площина. Зокрема, це стосується плоских напрямних кривих. В цьому випадку ковзання відсутнє і миттєві осі кінематичного гвинта паралельні і розташовані у площині.*

*В статті розглянуто ще один частковий випадок, коли осі кінематичного гвинта розташовані у площині і мають спільну точку перетину, тобто утворюють пучок. Для цього випадку знайдено залежність між кривиною і скрутом напрямної просторової кривої, які є змінними величинами, та ще однієї сталої величини, яка має фізичний зміст. Наведено конкретний приклад для лінійної* *залежності кривини від довжини дуги напрямної кривої. Знайдено залежність скруту. За цими двома залежностями побудовано просторову криву, нерухомий та рухомий аксоїди. Побудовано також напрямний конус нерухомого аксоїда. Дослідженнями встановлено, що для розглянутої кривої і інших напрямних просторових кривих із знайденою залежністю між кривиною і скрутом рухомий аксоїд є близьким до прямої лінії.*

*Ключові слова: напрямна крива, кривина, скрут, тригранник Френе, миттєва вісь обертання і ковзання, рухомий і нерухомий аксоїди.*

***Постановка проблеми.*** Тригранник і формули Френе відіграють виключно велику роль в диференціальній геометрії, особливо в теорії просторових кривих [1]. Для визначення швидкості і прискорення точки при її русі по кривій використовується як нерухома, так і рухома система координат, в ролі якої виступає супровідний тригранник траєкторії. В багатьох питаннях механіки виявляється корисним розглядати рух твердого тіла по відношенню до системи координат, яка збігається із натуральним тригранником траєкторії однієї із точок тіла з використанням формул Френе [2]. Сам тригранник теж можна розглядати як тверде тіло, просторовий рух якого зумовлений кривиною і скрутом напрямної кривої, тобто траєкторії руху вершини тригранника.

***Аналіз останніх досліджень і публікацій.*** В праці [3] розглянуто рух літака в ролі твердого тіла з використанням тригранника Френе як рухомої системи координат. Особливості руху супровідного тригранника гвинтової лінії розглянуто в праці [4]. Характеристиками руху твердого тіла в просторі є нерухомий і рухомий аксоїди. В кінематичній геометрії аксоїди використовуються для утворення ротативних і спіроїдальних поверхонь [5, 6]. Кінематику тригранника Френе, що рухається по просторовій або плоскій напрямній кривій, розглянуто в праці [7].

***Формулювання цілей статті.*** Аналітично описати окремий клас просторових кривих, у яких рухомим аксоїдом є плоский пучок прямих ліній та розробити спосіб побудови нерухомого аксоїда.

***Основна частина.*** При переміщенні тригранника Френе по просторовій кривій він одночасно здійснює два рухи: поступальний в напрямі орта дотичної $\bar{\tau}$ із швидкістю $V$ і обертальний навколо миттєвої осі обертання $\bar{\omega}$ з кутовою швидкістю $\omega$ (рис. 1,а). Віссю $\bar{\omega}$ обертання тригранника є вектор Дарбу [2], який розташований в спрямній площині супровідного тригранника і складає кут $\varphi$ із ортом дотичної $\bar{\tau}$. Від швидкості $V$ руху тригранника по напрямній кривій не залежить напрям вектора Дарбу в поточній точці, тому зручно прийняти *V=1 м/с*. Параметри вектора Дарбу залежать від значень кривини $k$ і скруту $\sigma$ кривої в точці $A$ розташування тригранника. Його проекція на орт $\bar{\tau}$ чисельно рівна скрутові $\sigma$, а на орт бінормалі $\bar{b}$ - кривині $k$. Звідси можна знайти модуль вектора $\bar{\omega}$ при *V=1 м/с*, тобто чисельне значення кутової швидкості $\omega$:

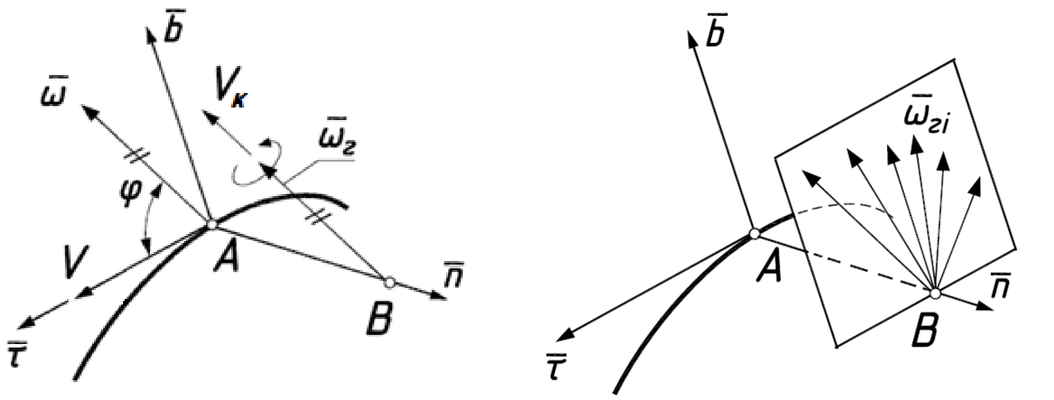
$$\left|\bar{\omega}\right| = \omega = \sqrt{k^2 + \sigma^2}\ . \qquad (1)$$

Поступальний і обертальний і рухи тригранника Френе можна замінити одним гвинтовим рухом. Він буде обертатися навколо нової осі з тією ж кутовою швидкістю $\omega$ і ковзати вздовж неї із новою швидкістю $V_к$ [7]:

$$V_к = \sigma / \sqrt{k^2 + \sigma^2}\ . \qquad (2)$$

Нова вісь називається миттєвою віссю обертання і ковзання $\bar{\omega}_г$ (рис. 1,а) або кінематичним гвинтом. Вона паралельна вектору Дарбу і зміщена вздовж головної нормалі $\bar{n}$ тригранника на відстань [7]:

$$AB = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}. \qquad (3)$$




а б

Рис. 1. До визначення розташування кінематичного гвинта тригранника в його системі:

а) розташування миттєвої осі обертання $\bar{\omega}_г$ і осі кінематичного гвинта $\bar{\omega}_г$ в поточній точці кривої;

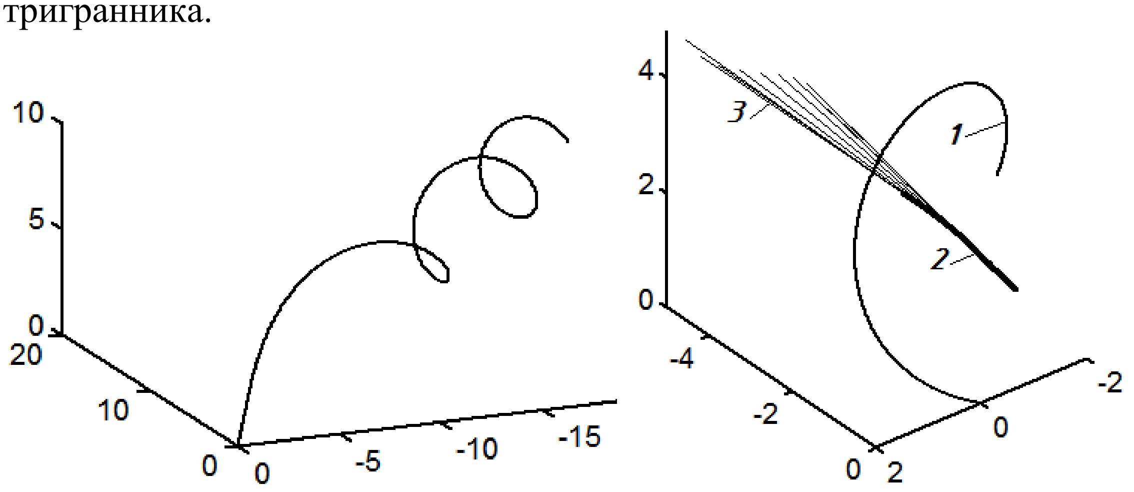
б) геометричне місце осей кінематичного гвинта $\bar{\omega}_{гі}$ тригранника при його русі по напрямній кривій

Під час руху тригранника по кривій всі величини (1), (2), (3) є змінними і залежать від точки на кривій, тобто від довжини дуги $s$. Маючи натуральні рівняння $k=k(s)$ і $\sigma=\sigma(s)$, можна побудувати графіки їх зміни. Якщо поставити умову, щоб відстань $AB=L$ була сталою, то із (3) можна знайти взаємозв’язок між кривиною і скрутом:

$$\sigma = \sqrt{\frac{k}{L}\left(1 - Lk\right)}. \qquad (4)$$

Якщо крива задана натуральними рівняннями $k=k(s)$ і (4), то множина осей кінематичного гвинта буде розташована в площині, що проходить через точку $B$ і паралельна спрямній площині (рис. 1,б). Напрям і величина $i$-го вектора $\overline{\omega}_{гi}$ залежатиме від значення кривини і скруту кривої в $i$-тій точці. Множина прямолінійних твірних, паралельних цим векторам, утворює рухомий аксоїд. Таким чином, для кривої із заданим взаємозв'язком (4) між натуральними рівняннями кривини і скруту, рухомим аксоїдом тригранника буде плоский пучок прямих, розташованих у площині, паралельній до спрямної, яка знаходиться на сталій відстані $L$ від неї. Площина, в якій розташований пучок, жорстко закріплена в триграннику і рухається разом із ним, тому аксоїд називається рухомим. Для побудови нерухомого аксоїда потрібно в кожній точці кривої спроекціювати положення осі кінематичного гвинта із системи рухомого тригранника на нерухому систему координат. Це робиться за допомогою дев'яти напрямних косинусів, які задають положення рухомого супровідного тригранника в нерухомій системі координат.

Для прикладу ми взяли лінійну залежність кривини: $k=as$. Скрут знайшли за формулою (4). На рис. 2,а чисельними методами за залежностями кривини і скруту побудовано криву та на рис. 2,б – фрагмент цієї кривої і відповідний нерухомий аксоїд її супровідного тригранника.




а б

Рис. 2. Просторова крива, задана натуральними рівняннями кривини

$k=as$ і скруту $\sigma = \sqrt{\frac{a}{L}(1 - Las)s}$ :

а) фрагмент кривої при $s=0\ldots50$ ($a=0{,}01$ і $L=2$);

б) фрагмент кривої при $s=40\ldots50$ (позначено цифрою 1) і нерухомий аксоїд, яким є лінійчата поверхня

Цифрою 1 на рис. 2,б позначено фрагмент кривої. Цифрою 2 – геометричне місце точки *B* після переходу від її положення в системі тригранника до нерухомої системи координат, цифрою 3 – множина положень осі кінематичного гвинта в нерухомій системі координат, тобто нерухомий аксоїд. Як видно із рисунка, множина осей кінематичного гвинта в нерухомому аксоїді мають незначний кут відхилення одна від одної.

На рис. 3,а побудовано рухомий аксоїд для кривої, зображеної на рис. 2,а. На рис. 3,б побудовано напрямний конус нерухомого аксоїда. Він знаходиться, як множина одиничних напрямних векторів кінематичного гвинта, спроекційованих на нерухому систему координат. При суміщенні вершин рухомого аксоїда і напрямного конуса нерухомого аксоїда вони можуть перекочуватися один по одному без ковзання, при цьому їх дотик відбуватиметься по відповідних твірних. Для побудови нерухомого аксоїда потрібно кожну твірну напрямного конуса, отриманого для конкретного значення довжини дуги *s* кривої, перенести паралельно самій собі в точку *B*, яка відповідає цьому ж значенню дуги *s* і знайдена в нерухомій системі за допомогою дев’яти напрямних косинусів.

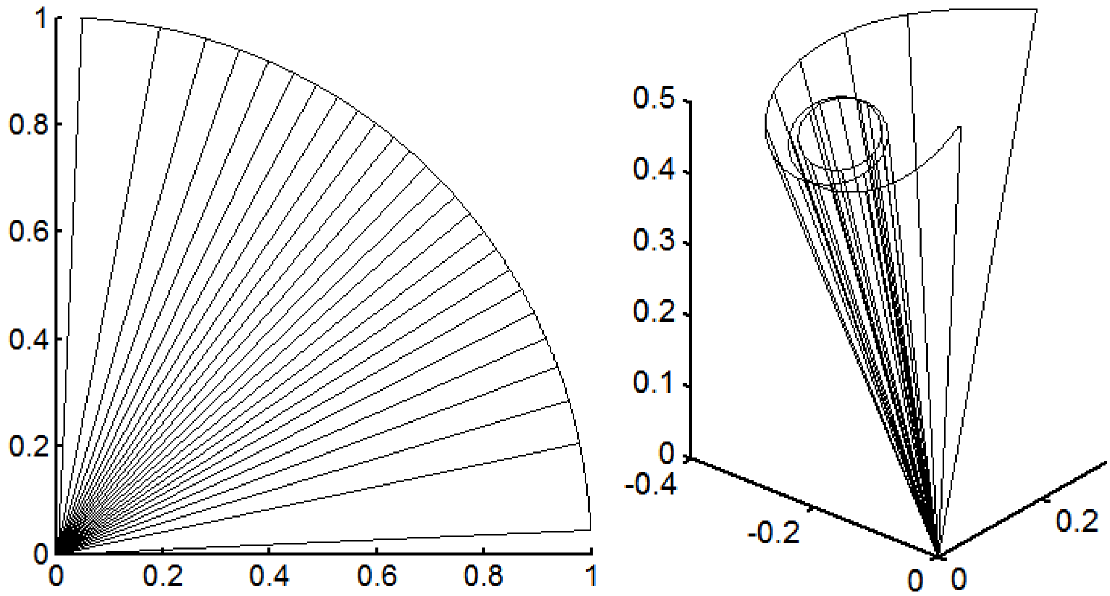



Рис. 3. До побудови аксоїдів тригранника Френе просторової кривої:
а) рухомий аксоїд; б) напрямний конус нерухомого аксоїда

При обкочуванні рухомого аксоїда по нерухомому із кутовою швидкістю (1) він додатково ковзатиме вздовж лінії контакту із лінійною швидкістю (2). Дослідження показали, що для різних просторових кривих, у яких кривина і скрут зв’язані залежністю (4), існування кривої можливе тільки для обмежених значень довжини дуги *s*, зумовлене наявністю у виразі (4) квадратного кореня.

***Висновки.*** Існує клас просторових кривих, для яких рухомим аксоїдом супровідного тригранника Френе є плоский пучок положень осей кінематичного гвинта. Кривина і скрут таких кривих є змінними і зв'язані між собою певною залежністю. Криві дійсні при обмежених значеннях довжини власної дуги і подібні до гвинтової лінії. Залежність справедлива і для сталих кривини і скруту, тобто для гвинтової лінії, але при цьому плоский пучок рухомого аксоїда і нерухомий аксоїд вироджуються у пряму лінію.

***Література***


1. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия. Л.: КУБУЧ, 1934. 332 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. В двух томах. Т. 1: Статика и кинематика. 8-е изд. М.: Наука, 1982. 352 с.
3. Лурье А.И. Аналитическая механіка. М.: ФМ, 1961. 823 с.
4. Лойцянский Л.Г. , Лурье А.И Курс теоретической механики. В двух томах. Т. 1: Статика и кинематика. М.: ГИТТЛ, 1954. 379 с.
5. Ядгаров Д.Я., Шоломов И.Х. Применение дифференциальных уравнений к конструированию ротативных поверхностей с аксоидами торс-торс. Исслед. в области теории дифференциальных уравнений и теории приближений. Ташкент, 1982. С. 96 – 100.
6. Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л. Исследование и визуализация ротативных и спироидальных поверхностей. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.* Вип. 4. *Прикл. геометрія та інж. графіка.* Т. 49. Мелітополь: ТДАТУ, 2011. С.33–41.
7. Панчук К.Л. Элементы кинематической геометрии кривой линии. Омский научный вестник. Омск: ОГТУ, 2005. № 2 (31). С. 68 – 69.


## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ, У КОТОРЫХ ПОДВИЖНЫМ АКСОИДОМ СОПРОВОЖДАЮЩЕГО ТРЕХГРАННИКА ЯВЛЯЕТСЯ ПЛОСКИЙ ПУЧОК

Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Несвидомин В.Н.,
Бабка В.Н., Федорина Т.П.

*Движение твердого тела в пространстве характеризуется подвижным и неподвижным аксоидами, которыми являются линейчатые поверхности. Это движение можно воспроизвести, если по неподвижному аксоиду обкатывать подвижной аксоид. Линией контакта в процессе обкатывания является общая прямолинейная образующая поверхностей. При обкатывании подвижного аксоида по*

*неподвижному может происходить одновременное их скольжение вдоль этой прямой линии контакта.*

*Движение трехгранника Френе по пространственной направляющей кривой можно рассматривать как движение твердого тела в пространстве, закон перемещения которого зависит от дифференциальных характеристик направляющей кривой - кривизны и кручения в функции длины дуги. Трехгранник движется поступательно в направлении орта касательной и одновременно вращается вокруг мгновенной оси вращения. Положения этой оси в системе сопровождающего трехгранника зависит от соотношения кривизны и кручения. Два движения - поступательное в направлении орта касательной и вращательное вокруг оси мгновенного вращения - можно заменить одним винтовым движением вокруг мгновенной оси вращения и скольжения, которая носит название кинематического винта.*

*В общем случае подвижным аксоидом является коноид. Возможны частные случаи, когда подвижным аксоидом является плоскость. В частности, это касается плоских направляющих кривых. В этом случае скольжение отсутствует и мгновенные оси кинематического винта параллельны и расположены в одной плоскости.*

*В статье рассмотрены еще один частный случай, когда оси кинематического винта расположены в одной плоскости и имеют общую точку пересечения, то есть образуют пучок. Для этого случая найдена зависимость между кривизной и кручением направляющей пространственной кривой, которые являются переменными величинами, и еще одной постоянной величины, имеющей физический смысл. Приведен конкретный пример для линейной зависимости кривизны от длины дуги направляющей кривой. Найдено зависимость кручения. По этим двум зависимостям построено пространственную кривую, неподвижный и подвижный аксоиды. Построен также направляющий конус неподвижного аксоида. Исследованиями установлено, что для рассматриваемой кривой и других направляющих пространственных кривых с найденными зависимостями между кривизной и кручением подвижной аксоид близок к прямой линии.*

*Ключевые слова: направляющая кривая, кривизна, кручение, трехгранник Френе, мгновенная ось вращения и скольжения, подвижный и неподвижный аксоиды.*

# SPATIAL CURVES, AT WHICH MOVABLE AXOID OF THE ACCOMPANYING TREE-EDGE OF FRENET IS A FLAT BUNCH

Kresan T., Pylypaka S., Nesvidomin V., Babka V., Fedorina T.

*The motion of a solid body in space is characterized by moving and stationary axoids, which are ruled surfaces. This movement can be reproduced, if a movable axoid is run in along a fixed axoid. The contact line in the process of rolling is the general rectilinear generatrix of the surfaces. When the rolling axoid is rolled on a fixed one, they can simultaneously slide along this straight line of contact.*

*The motion of the three-edge of Frenet along a spatial guide curve can be viewed as a motion of a rigid body in space, the law of movement of which depends on the differential characteristics of the guide curve — curvature and torsion as a function of the arc length. The trihedron moves progressively in the direction of the ort of the tangent and simultaneously rotates around the instantaneous axis of rotation. The positions of this axis in the system of the accompanying three-edge depend on the ratio of curvature and torsion. Two movements - translational in the direction of the ort of the tangent and rotational around the axis of instantaneous rotation - can be replaced by one screw movement around the instantaneous axis of rotation and slip, which is called the kinematic screw.*

*In general, the moving axoid is a conoid. Special cases are possible when the moving axoid is a plane. In particular, this applies to flat guide curves. In this case, there is no sliding and the instantaneous axes of the kinematic screw are parallel and located in the same plane.*

*The article discusses another special case where the axes of the kinematic screw are located in the same plane and have a common point of intersection, that is, they form a bundle. For this case, a relationship has been found between the curvature and torsion of the guiding spatial curve, which are variables, and another constant value that has a physical meaning. A specific example is given for the linear dependence of the curvature on the arc length of the guide curve. The dependence of torsion is found. For these two dependencies, a spatial curve, a fixed and moving axoid is constructed. The guide cone of the fixed axoid is also constructed. Studies have established that for the curve under consideration and other guiding spatial curves with the found dependencies between the curvature and torsion of the moving axoid, it is close to a straight line.*

*Key words: guide curve, curvature, torsion, three-edge of Frenet, instantaneous axis of rotation and slip, immovable and movable axoids.*