УДК 514.18

АЛГОРИТМ ПРИСКОРЕННЯ МОДЕЛЮВАННЯ РЕГУЛЯРНИХ ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ, ЗАДАНИХ У ПАРАМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

Скочко В. І., к.т.н.*
Київський національний університет будівництва і архітектури (Україна)

В роботі пропонується новий підхід до побудови дискретних образів кривих і поверхонь, функції яких задані у параметричній формі. Принцип цього підходу полягає в тому, щоб розглядати задану криву або поверхню (геометричний об'єкт), як деяке фізичне тіло – стрижень або оболонку сталого перетину, зігнуті у форму просторової кривої або поверхні відповідно. Водночас вважається, що даному стрижню або оболонці надано деякого електричного заряду, в результаті чого він починає працювати, як провідник у середовищі діелектрика, притягуючи цей діелектрик з певною силою у кожній точні досліджуваної ділянки простору. Для того, щоб отримати дискретний образ досліджуваного геометричного об'єкту, слід побудувати поле механічних сил притяжіння досліджуваного графіку функції й прикласти до вузлів образу із наперед визначеною топологією вектори сил одержаного поля. В такому випадку графік функції виконуватиме роль умовного магніту, а відстань між окремими вузлами дискретного образу або крок його дискретизації по координатним осям зможуть бути відрегульовані відповідно до специфіки даного геометричного об'єкту й його призначення. Таким чином, з'являється можливість не просто визначати координати точки геометричного об'єкту, задаючи параметр варіювання, а цілком контрольовано згущувати крок дискретизації плоскої або просторової кривої чи поверхні саме у тих її ділянках, що потребують особливої уваги. Запропонований підхід дає можливість значно скоротити час побудови точок каркасу в разі використання градієнтних методів пошуку відповідних точок, оскільки виключає можливість того, що на одному із етапів при поступовому наближенні до геометричного об'єкту, крок градієнтного зміщення перевищить відстань до кривої, а напрямок спадання (чи зростання) векторного поля продовжить спрямовувати дану точку дискретного образу в хибному напрямку. Відтак, не лише зменшується ймовірність виникнення помилкових розв'язань й появи вироджених

* Науковий консультант – д.т.н., проф. Плоский В.О.

точок дискретного образу, але й значно скорочується час виконання розрахунків ітераційного числення, необхідного для побудови досліджуваного геометричного об'єкту.

Ключові слова: плоскі й просторові криві та поверхні, градієнтні методи пошуку, параметрична функція об'єкту.

Постановка проблеми. Параметричний спосіб запису кривих та поверхонь є найбільш простим і функціональним, оскільки, він дозволяє вдаватися до простих інтерполяційних чи екстраполяційних методик і принципів, що базуються на послідовному інтерполюванні по обраному параметру вздовж окремих координатних осей. Параметричний спосіб запису функції геометричного об'єкту є дуже зручним з практичної точки зору, особливо коли мова йде про опрацювання результатів експериментальних досліджень та виявлення в них певних закономірностей. Адже для особливо складних фізичних та фінансово-економічних багатопараметричних процесів параметричний метод опису досить просто узагальнюється й для багатовимірних випадків геометричного їх опису (наприклад за допомогою епюр Схоуте або Радіщева), а відтак дозволяє досягти наочності опису закономірностей із найменшими затратами часу. Однак у даній роботі обмежимося лише двовимірним та тривимірним випадками.

Отже, якщо мова йде про параметричну форму запису деякої кривої η на площині або у просторі, то їх рівняння виглядають відповідно наступним чином:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \quad (2)$$

де t – параметр варіювання.

Якщо ж мова йде про параметричну форму задання поверхні деякої поверхні Ω, то її рівняння виглядає так:

$$\begin{cases} x = f_1(u,v), \\ y = f_2(u,v), \\ z = f_3(u,v), \end{cases} \quad (3)$$

де u і v – параметри варіювання, що виділяють на поверхні Ω два сімейства кривих. Ці параметри називають криволінійними координатами на поверхні Ω.

Однак, параметрична форма запису функції геометричного об'єкту має один суттєвий недолік, пов'язаний з неможливістю регулювати положення точок дискретного образу (каркасу) даного об'єкту при його візуалізації засобами чисельного комп'ютерного моделювання. Наприклад, досить складно досягти сталого чи заданого кроку дискретизації кінцевого дискретного образу, оскільки в більшості випадків рівняння систем (1) – (3) мають високу нелінійність й розв'язання їх відносно параметрів t, u, і v може виявитися практично неможливою задачею.

В той же час, для вирішення практичних фізичних задач, наприклад, механіки, тепломасообміну або гідроаеродинаміки, необхідно контролювати регулярність та встановлювати топологічні особливості дискретного образу геометричного об'єкту. Для цього бажано, щоб форма запису рівняння цього об'єкту була явною або неявною відповідно:

1) для плоских кривих:

$$y = f(x), \tag{4}$$

або: $$F(x, y) = 0; \tag{5}$$

2) для просторових кривих можливий лише випадок їх задання, як ліній перетину функцій поверхонь у явній чи неявній формі (окрім вище продемонстрованої параметричної форми), тобто:

$$\begin{cases} x = f_1(y,z), \\ y = f_2(x,z); \end{cases} \text{чи, } \begin{cases} y = f_1(x,z), \\ z = f_2(x,y); \end{cases} \text{чи } \begin{cases} x = f_1(y,z), \\ z = f_2(x,y); \end{cases} \text{чи ін.;} \tag{6}$$

або: $$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0; \end{cases} \tag{7}$$

3) для поверхонь:

$$z = f(x,y), \text{ чи, } y = f(x,z), \text{ чи } x = f(y,z), \text{ чи ін.;} \tag{8}$$

або: $$F(x,y,z) = 0. \tag{9}$$

Перетворюючи вище наведені рівняння з (4) в (5), з (6) в (7), та з (8) в (9), ми отримуємо скалярні поля й їх суперпозиції, які й використовуються у градієнтних методах або методах звуження зони пошуку для визначення координат точок дискретного образу.

Спільним недоліком використання градієнтних методів пошуку та методів звуження на основі одержаних неявних функцій й їх суперпозицій є висока ймовірність того, що при пошуку точок, які належать геометричному об'єктові, зокрема в процесі наближення до цього об'єкта зі сталим дискретним кроком, алгоритм може «промахнутися» й продовжити прокладати маршрут чи зону звуження пошуку в хибній зоні, не розуміючи, що відбулася помилка. При цьому, лише втручання користувача чи активація відповідного інтелектуального алгоритму зможе змінити (розвернути) напрямок або уточнити зону звуження пошуку. Однак, додаткове людське втручання спричиняє збільшення трудовитрат і не завжди може дати позитивний ефект, оскільки користувач також може неодноразово допускати помилки, не до кінця розуміючи характер векторного поля в досліджуваній області. Це в свою чергу призводить до надмірних трудовитрат, що не гарантують позитивного очікуваного результату.

Відтак, стає очевидною потреба у такій реконструкції скалярного й, як наслідок, векторного полів, при якій характер цих полів буде більш передбачуваним й сприятиме спрощенню та більшій надійності роботи пошукових алгоритмів, націлених на відтворення дискретних каркасів досліджуваних геометричних об'єктів.

Аналіз останніх досліджень. Найбільш доцільно будувати скалярне плоске або просторове поля, що використовуватимуться при подальшому пошуку точок досліджуваного геометричного об'єкту, на основі параметричних рівняннях цього об'єкту. Маючи відповідну функцію, що визначатиме деяке поле, можна побудувати векторне градієнтне поле, за допомого якого можуть бути визначені й при необхідності відкориговані координати вузлів дискретного образу даного об'єкту. Одержане векторне поле вказуватиме напрямок найшвидшого підйому або спуску по траєкторіям нормальним до поверхонь сталого потенціалу. Градієнтне поле $\bar{\mathbf{V}}$ для неявної форми функції матиме такий вид [1]:

$$\bar{\mathbf{V}} = \nabla F, \tag{10}$$

де ∇ – оператор Гамільтона, що для дво- та тривимірного випадків відповідно має наступні форми (11) і (12):

$$\nabla = (\partial/\partial x)\cdot \bar{\mathbf{e}}_x + (\partial/\partial y)\cdot \bar{\mathbf{e}}_y, \tag{11}$$

$$\nabla = (\partial/\partial x)\cdot \bar{\mathbf{e}}_x + (\partial/\partial y)\cdot \bar{\mathbf{e}}_y + (\partial/\partial z)\cdot \bar{\mathbf{e}}_z. \tag{12}$$

В першу чергу розглянемо випадок явної й неявної форм задання кривої на площині (4) і (5). Ці, функції виділяють зі скалярного поля

$$U(x, y) = F(x, y) = const, \tag{13}$$

ізолінію, що відповідає сталому нульовому значенню функції (5). Якщо вважати градієнтне поле $\bar{\mathbf{V}}$ полем фізичних сили, що штовхають невагому точку по силових лініях поля $U(x,y)$, то, у випадку, якщо початкове положення точки дозволяє спрямувати її до нульової ізолінії, її рух поступово наближатиме її до графіку функції (5). Для цього можна скористатися одним із алгоритмів градієнтного спуску (підйому). Найпростішим із них є алгоритм оснований на побудові поля одиничних векторів [2, 3], напрямок яких в кожній точці співпадає з напрямком градієнтного поля. Одиничний вектор градієнта $\bar{\mathbf{v}}$ записують у такій формі:

$$\bar{\mathbf{v}} = v_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + v_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_y , \tag{14}$$

де складові даного вектора визначатимуться за формулою:

$$v_x = (\partial U / \partial x) / [(\partial U / \partial x)^2 + (\partial U / \partial y)^2]^{1/2} , \tag{15}$$

$$v_y = (\partial U / \partial y) / [(\partial U / \partial x)^2 + (\partial U / \partial y)^2]^{1/2} . \tag{16}$$

На кожному кроці пошуку вище згаданий алгоритм використовує одну й ту ж формулу для уточнення координат точки, що рухається до досліджуваної кривої (5) по силових лініях поля (13):

$$s^{(i)} = s^{(i-1)} + \lambda \cdot v_s^{(i-1)}, \ (s = x, y \, ; \ i = \overline{1, n}) , \tag{17}$$

де: s – узагальнене позначення координат, i – номер поточного кроку пошуку, n – кількість кроків пошуку, а λ – довжина одноразового переміщення точки, значення якого відраховується в напрямку вектору градієнта на кожному кроці спуску (чи підйому).

Формулювання цілей статті. Визначення алгоритму побудови таких скалярного й векторного полів впливу на точки дискретного образу досліджуваної функції, які прискорять процес пошуку координат вершин (точок) цього образу й його подальше корегування, при умові, що відповідна функція задана у параметричній формі.

Основна частина. У разі використання алгоритму (17) для пошуку дискретного образу досліджуваної кривої, необхідний постійний контроль перебігу процесу пошуку кожної точки її образу, оскільки рух уздовж силових ліній не гарантує точного потрапляння на графік функції (5) у зв’язку зі сталим кроком пошуку, який (як зазначалося вище) може на останніх етапах наближення перевищити відстань до шуканої кривої. Після перевищення даної відстані алгоритм продовжить рухати точку у напрямку спадання або зростання градієнту. Справа в тому, що даний алгоритм розроблений здебільшого для пошуку екстремумів функції, які з топографічної точки зору представляють собою «вершини» або «западини». А тому, якщо крок λ достатньо малий у порівнянні з розмірами досліджуваної області, даний алгоритм, незалежно від того максимум чи мінімум необхідно відшукати, в більшості випадків через деякий час знаходить відповідний екстремум, оскільки вектор градієнту завжди вказує на ціль пошуку в досліджуваній області. Іншими словами, специфіка впливу градієнтного поля не дає алгоритму віддалятися від шуканого екстремума.

Саме ця властивість даного алгоритму вказує на шлях побудови такого векторного поля впливу, яке, при умові проходження графіку функції (5) у межах досліджуваної області, завжди спрямовуватиме точки дискретного образу цієї функції у напрямку її неперервного аналогу. Для того, щоб вектори градієнтного поля завжди вказували у напрямку шуканого графіку досліджуваної функції (5) необхідно, щоб з топографічної точки зору її графік (ізолінія скалярного поля) представляв собою «впадину» (постійної глибини) або «хребет» (однакової висоти). Даної мети можна досягти наступним шляхом. Перш за все необхідно забезпечити умову того, щоб абсолютні значення поля (13) у точках, які належать шуканому графіку (ізолінії) функції (5), були найбільшими. Для цього скористаємось принципом задання потенціального поля напруженості електростатичного поля, створеного зарядженими об'єктами [4].

Якщо об'єкт представляє собою поверхню, то поле її електростатичного потенціалу, при умові, що щільність її поверхневого заряду описується функцією

$$\sigma = f(x, y, z), \tag{18}$$

визначатиметься наступним інтегралом по поверхні:

$$\varphi = [1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon)] \cdot \int_S (\sigma/r)\, dS\ , \tag{19}$$

де r – відстань від елементарного поверхневого заряду σdS до досліджуваної точки поля. Інтегрування відбувається по поверхні (фрагменту поверхні), що містить заряд.

Якщо ж об'єкт представляє собою об'ємне тіло, то поле його електростатичного потенціалу, при умові, що щільність його об'ємного заряду описується функцією:

$$\rho = f(x, y, z), \tag{20}$$

визначатиметься наступним об'ємним інтегралом:

$$\varphi = [1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon)] \cdot \int_V (\rho/r)\, dV\ , \tag{21}$$

де r – відстань від елементарного об'ємного заряду ρdV до досліджуваної точки поля. Інтегрування відбувається по об'єму середовища (об'єкту), що містить заряд. У формулах (19) та (21): ε – електрична стала, ε_0 – відносна діелектрична проникність середовища, у якому перебуває заряджений об'єкт.

Користуючись аналогічним принципом, можна сказати, що поле електростатичного потенціалу кривої, при умові, що щільність її криволінійно-розподіленого заряду описується функцією:

$$\zeta = f(x, y) \text{ (для плоскої кривої), або}$$
$$\zeta = f(x, y, z) \text{ (для просторової кривої)} \tag{22}$$

визначатиметься наступним криволінійним інтегралом:

$$\varphi = [1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon)] \cdot \int_L (\zeta/r)\, dL\ , \tag{23}$$

де r – відстань від елементарного криволінійно-розподіленого заряду ζdL до досліджуваної точки поля. Інтегрування відбувається по ділянці кривої, що містить заряд.

Якщо говорити про двовимірний випадок, то вираз (23) представляє собою визначення інтегралу вздовж шляху (кривої) L, записаного в явній формі (4), у скалярному полі

$$u = \zeta / r \ . \qquad (24)$$

Якщо крива L записана у неявній формі (5), вирішення даної задачі значно ускладняється. У випадку, коли рівняння кривої все ж можливо привести до явної форми (4), то, беручи до уваги, що в такому випадку елементарна довжина ділянки кривої dL визначається, як

$$dL = [1 + (\partial y / \partial x)^2]^{1/2} dx = [1 + (\partial f(x) / \partial x)^2]^{1/2} dx \ , \qquad (25)$$

та замінюючи у виразі (23) константи $1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon)$ на єдиний коефіцієнт k, ми одержимо наступний криволінійний інтеграл, який виражатиме значення скалярного потенціалу φ_M в точці $M(x_M, y_M)$ від умовно зарядженого за законом (22) фрагмента кривої L між точками $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$:

$$\varphi_M = k \int_L \frac{\zeta}{r} dL = k \int_{x_A}^{x_B} \frac{\zeta(x, f(x))}{[(x_M - x)^2 + (y_M - f(x))^2]^{1/2}} \cdot [1 + (\partial f(x) / \partial x)^2]^{1/2} dx \ . \qquad (26)$$

Для визначення скалярного потенціалу φ_M при інтегруванні по координаті y, ми одержимо аналогічний за формою вираз:

$$\varphi_M = k \int_{y_A}^{y_B} \frac{\zeta(f(y), y)}{[(x_M - f(y))^2 + (y_M - y)^2]^{1/2}} \cdot [1 + (\partial f(y) / \partial y)^2]^{1/2} dy \ . \qquad (27)$$

В разі, якщо крива задана у параметричній формі (1), її криволінійний інтеграл у скалярному полі (24), з урахуванням того, що елементарна довжина ділянки кривої dL визначатиметься, як

$$dL = [(\partial y / \partial t)^2 + (\partial x / \partial t)^2]^{1/2} dt = [(\partial f_1(t) / \partial t)^2 + (\partial f_2(t) / \partial t)^2]^{1/2} dt \ , \qquad (28)$$

величина скалярного потенціалу φ_M становитиме:

$$\varphi_M = k \int_{t_A}^{t_B} \frac{\zeta(f_1(t), f_2(t))}{[(x_M - f_1(t))^2 + (y_M - f_2(t))^2]^{1/2}} \cdot [(\partial f_1(t) / \partial t)^2 + (\partial f_2(t) / \partial t)^2]^{1/2} dt \ . \qquad (29)$$

На основі поля скалярного потенціалу φ, можна побудувати градієнтне векторне поле $\bar{\mathbf{V}}$ у формі (10), що в фізичному сенсі представляє собою поле напруженості електростатичного поля:

$$\bar{\mathbf{V}} = \nabla \varphi_M = V_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + V_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_y = (\partial \varphi_M / \partial x_M) \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + (\partial \varphi_M / \partial y_M) \cdot \bar{\mathbf{e}}_y \ . \qquad (30)$$

Однак, і це поле може виявитися непридатним для використання у градієнтних алгоритмах типу (17), оскільки його форма не гарантує, що того, що його вектори завжди вказуватимуть у напрямку графіку досліджуваної функції (1), (4) або (5), особливо в випадку, коли крива замкнена чи має петлі. Натомість, можлива ще одна реконструкція поля скалярного потенціалу φ на основі його градієнтного поля $\bar{\mathbf{V}}$. У електростатиці існує поняття пондеромоторних (механічних) сил $\bar{\mathbf{f}}$, які діють з боку поля напруженості $\bar{\mathbf{V}}$ на оточуючі діелектрики (матеріали, що не є провідниками). Згідно з [2] сила $\bar{\mathbf{f}}$ визначається формулою:

$$\bar{\mathbf{f}} = [\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1)/2] \cdot \nabla |\bar{\mathbf{V}}|^2 , \quad (31)$$

де:

$$|\bar{\mathbf{V}}| = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} = [(\partial\varphi_M / \partial x_M)^2 + (\partial\varphi_M / \partial y_M)^2]^{1/2} , \quad (32)$$

або:

$$\bar{\mathbf{f}} = [\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1)/2] \cdot \nabla [(\partial\varphi_M / \partial x_M)^2 + (\partial\varphi_M / \partial y_M)^2] = [\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1)/2] \cdot \nabla \psi . \quad (33)$$

Особливість цього поля полягає у тому, що сила $\bar{\mathbf{f}}$ завжди напрямлена в сторону зростання абсолютної величини вектора $\bar{\mathbf{V}}$, незалежно від напрямку останнього. Іншими словами, сила $\bar{\mathbf{f}}$ змушує притягуватися частки оточуючого середовища до кривої, як до магніту. В той же час, із загальної теорії поля [5, 6] та теорії електричного струму [11] відомо, що поверхня зарядженого об'єкту (поверхні, плоскої чи просторової кривої) є еквіпотенціальною, тобто, поверхнею зі сталим електростатичним потенціалом. А значить, з топографічної точки зору, хребет чи западина утворені функцією φ у точках, що належать графіку функції (1), (4) або (5), мають сталу висоту або глибину. Очевидно, що шуканою функцією потенціального поля є підградієнтна функція ψ виразу (33):

$$\psi = (\partial\varphi_M / \partial x_M)^2 + (\partial\varphi_M / \partial y_M)^2 . \quad (34)$$

Векторне градієнтне поле саме цієї функції дозволяє завжди спрямовувати вектор спуску градієнтних алгоритмів типу (17) у напрямку шуканої кривої функції (1), (4) або (5). Відповідне градієнтне поле, замінюючи константи $\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1)/2$ на єдиний коєфіцієнт g, можна записати так:

$$\bar{\mathbf{f}} = g \cdot \nabla\psi = f_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + f_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_y . \quad (35)$$

Після побудови поля (35) його можна з легкістю перетворити на одиничне градієнтне поле типу (14), що матиме вид:

$$\bar{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + \mathfrak{I}_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_y , \quad (36)$$

де складові даного вектора $\bar{\mathfrak{I}}$ визначатимуться за формулою:

$$\mathfrak{I}_x = (\partial\psi / \partial x_M) / [(\partial\psi / \partial x_M)^2 + (\partial\psi / \partial y_M)^2]^{1/2} = f_x / [f_x^2 + f_y^2]^{1/2} , \quad (37)$$

$$\mathfrak{I}_y = (\partial\psi / \partial y_M) / [(\partial\psi / \partial x_M)^2 + (\partial\psi / \partial y_M)^2]^{1/2} = f_y / [f_x^2 + f_y^2]^{1/2} . \quad (38)$$

Якщо мова йде про просторову криву, задану параметрично у формі (2), то поля φ_M, ψ, $\bar{\mathbf{f}}$ та $\bar{\mathfrak{I}}$ матимуть наступну форму:

$$\varphi_M = k \int_{t_A}^{t_B} \frac{\zeta(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \cdot [(\partial f_1(t)/\partial t)^2 + (\partial f_2(t)/\partial t)^2 + (\partial f_3(t)/\partial t)^2]^{1/2} dt}{[(x_M - f_1(t))^2 + (y_M - f_2(t))^2 + (z_M - f_3(t))^2]^{1/2}} ; \quad (39)$$

$$\psi = (\partial\varphi_M / \partial x_M)^2 + (\partial\varphi_M / \partial y_M)^2 + (\partial\varphi_M / \partial z_M)^2 ; \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = g \cdot \nabla\psi = f_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + f_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_y + f_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_z ; \quad (41)$$

$$\bar{\Im} = \Im_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + \Im_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_y + \Im_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_z \text{ , де:} \qquad (42)$$

$$\Im_x = f_x \big/ [f_x^2 + f_y^2 + f_z^2]^{1/2} \text{ ,} \qquad (43)$$

$$\Im_y = f_y \big/ [f_x^2 + f_y^2 + f_z^2]^{1/2} \text{ ,} \qquad (44)$$

$$\Im_z = f_z \big/ [f_x^2 + f_y^2 + f_z^2]^{1/2} \text{ .} \qquad (45)$$

Спираючись на усі вище наведені перетворення, можна сформулювати алгоритм побудови векторного поля впливу на точки шуканого дискретного образу досліджуваного геометричного об’єкту:

1) Приводимо параметричне рівняння геометричного об’єкту до неявної форми скалярного поля потенціалу φ_M, при умові, що даний об’єкт умовно заряджено з функцією розподілу заряду ζ або σ.

2) Будуємо функцію скалярного поля квадратів напруженості ψ умовно зарядженого геометричного об’єкту.

3) Визначаємо градієнтне поле механічних сил притяжіння $\bar{\mathbf{f}}$ до умовно зарядженого геометричного об’єкту.

4) Будуємо одиничне градієнтне поле $\bar{\Im}$ на основі поля сил $\bar{\mathbf{f}}$.

5) Використовуємо поле $\bar{\Im}$ у градієнтних алгоритмах типу (17) для пошуку координат дискретного образу досліджуваної функції.

Даний алгоритм цілком застосовний і для відтворення дискретних образів параметрично заданих у формі (3) функцій поверхонь. Якщо поверхню задано параметрично у формі (3), а досліджувана ділянка самої поверхні обмежена криволінійними координатними лініями u_A і u_B та v_C і v_D, то поле φ_M має бути побудоване за наступною формулою [7, 8]:

$$\varphi_M = k \int_{u_A}^{u_B} \int_{v_C}^{v_D} \frac{\sigma(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)) \cdot [E \cdot G - F^2]^{1/2} du dv}{[(x_M - f_1(u,v))^2 + (y_M - f_2(u,v))^2 + (z_M - f_3(u,v))^2]^{1/2}} \text{ ,} \qquad (46)$$

де елементи першої квадратичної форми E, G та F визначаються за формулами [1]:

$$E = (\partial x / \partial u)^2 + (\partial y / \partial u)^2 + (\partial z / \partial u)^2 \text{,} \qquad (47)$$

$$F = (\partial x / \partial u) \cdot (\partial x / \partial v) + (\partial y / \partial u) \cdot (\partial y / \partial v) + (\partial z / \partial u) \cdot (\partial z / \partial v) \text{,} \qquad (48)$$

$$G = (\partial x / \partial v)^2 + (\partial y / \partial v)^2 + (\partial z / \partial v)^2 \text{.} \qquad (49)$$

Поля ψ, $\bar{\mathbf{f}}$ та $\bar{\Im}$ для параметрично заданої поверхні матимуть форму аналогічну (40), (41) та (42) – (45) відповідно.

Векторне поле $\bar{\Im}$ може бути використане для пошуку точок графіку досліджуваної функції, при чому як на основі градієнтних методів, так і на основі підходу із застосування параметричних рівнянь стану ланок інтерпретаційних сітчастих структур [9, 10].

Висновки. Продемонстрований алгоритм дозволяє побудувати скалярне й векторне поля, характер впливу яких на точки дискретного образу первинної досліджуваної функції дозволяє не просто визначати координати цих точок, задаючи параметр варіювання, але й цілком контрольовано згущувати крок дискретизації плоскої або просторової кривої чи поверхні саме у тих її ділянках, що потребують особливої уваги. Окрім того, використання одержаних полів у градієнтних або інших алгоритмах може значно прискорювати процес моделювання дискретного образу досліджуваного геометричного об'єкту за рахунок зменшення ймовірності виникнення помилок пошуку координат, що прискорить час роботи обчислювального обладнання та знизить трудовитрати, спричинені людським втручанням для корегування роботи алгоритмів.

Література

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. под ред. Г. Гроше, и В. Циглера. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 976 с.
2. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 238 с., ил.
3. Скочко В.І. Пошук містків холоду у вузлах будівельної конструкції на основі спеціальних інтерполяційних функцій. Енергозбереження в буд. та архітектурі. Київ: КНУБА, 2013. Вип. 4. С. 259–264.
4. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике: для инженеров и студентов. Изд. 7-е, испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 944 с., илл.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. Изд 7-е, испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 512 с.
6. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. Изд. 2-е. М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1951. 480 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 456 с.
8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 576 с.
9. Скочко В. І. Практичні аспекти дослідження та корегування сітчастих структур, побудованих шляхом геометричного формоутворення. *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. – К. : КНУБА, 2018. Вип. 51. С. 498-506.
10. Скочко В. І. Моделювання дискретних образів плоских кривих з ланками однакової довжини. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь : Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018. Вип. 12. С. 132-137.
11. Тамм И. Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов.

Изд. 11-е, испр. и доп. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 616 с.

АЛГОРИТМ УСКОРЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ КАРКАСОВ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Скочко В.И.

В работе предлагается новый подход к построению дискретных образов кривых и поверхностей, функции которых заданы в параметрической форме. Принцип этого подхода заключается в том, чтобы рассматривать заданную кривую или поверхность (геометрический объект), как некоторое физическое тело – стержень или оболочку постоянного сечения, согнутое в форму пространственной кривой или поверхности соответственно. В то же время считается, что данному стержню или оболочке дано некоторый электрический заряд, в результате чего он начинает работать, как проводник в среде диэлектрика, притягивая этот диэлектрик с определенной силой в каждой точные исследуемого участка пространства. Для того, чтобы получить дискретный образ изучаемого геометрического объекта, следует построить поле механических сил притяжения исследуемого графика функции и приложить к узлам образа с заранее определенной топологией векторы сил полученного поля. В таком случае график функции будет выполнять роль условного магнита, а расстояние между отдельными узлами дискретного образа или шаг его дискретизации по координатным осям смогут быть отрегулированы в соответствии со спецификой данного геометрического объекта и его назначения. Таким образом, появляется возможность не просто определять координаты точек геометрического объекта, задавая параметр варьирования, а вполне контролируемо сгущать шаг дискретизации плоской или пространственной кривой или поверхности именно в тех ее участках, которые требуют особого внимания. Предложенный подход позволяет значительно сократить время построения точек каркаса при использовании градиентных методов поиска соответствующих точек, поскольку исключает возможность того, что на одном из этапов при постепенном приближении к геометрическому объекту, шаг градиентного смещения превысит расстояние до кривой, а направление спуска (или подъёма) векторного поля продолжит отодвигать данную точку дискретного образа от исследуемого геометрического объекта. Следовательно, не только уменьшается вероятность возникновения ложных решений и появления вырожденных точек дискретного образа, но и значительно сокращается время выполнения расчетов итерационного исчисления, необходимого для построения исследуемого геометрического

объекта.

Ключевые слова: плоские и пространственные кривые и поверхности, градиентные методы поиска, параметрическая функция объекта.

ALGORITHM FOR ACCELERATING THE SIMULATION OF REGULAR DISCRETE FRAMES OF CURVES AND SURFACES DEFINED IN PARAMETRIC FORM

Skochko V.

This paper proposes a new approach to the construction of discrete images of curves and surfaces, the functions of which are given in parametric form. The principle of this approach is to treat a given curve or surface (geometric object) as some physical body — a rod or shell of constant cross section, bent into the shape of a spatial curve or surface, respectively. At the same time, it is considered that a given electric charge is given to a these rod or shell, as a result of which it begins to work as a conductor in a dielectric environment, attracting this dielectric with a certain force in each exact portion of space under investigation. In order to obtain a discrete image of the studied geometric object, one should construct the field of mechanical forces of attraction of the studied graph of the function and attach to the nodes of the image with a predetermined topology the vectors of the obtained field. In this case, the function graph will play the role of a conditional magnet, and the distance between the individual nodes of the discrete image or its discretization step along the coordinate axes can be adjusted in accordance with the specifics of the given geometric object and its purpose. Thus, it is possible not only to determine the coordinates of points of a geometric object, setting the variation parameter, but to control the discretization step of a flat or spatial curve or surface precisely in those areas that require special attention. The proposed approach allows to significantly reduce the time of constructing the frame points using gradient methods for finding the corresponding points, since it eliminates the possibility that at one of the stages, when gradually approaching a geometric object, the step of the gradient displacement exceeds the distance to the curve, and the direction of descent (or ascent) the fields will continue to move the given point of the discrete image from the studied geometric object. Consequently, not only decreases the probability of false decisions and the emergence of degenerate points of a discrete image, but also significantly reduces the time for performing calculations of the iterative calculus necessary to build the geometric object under investigation.

Keywords: flat and spatial curves and surfaces, gradient search methods, parametric function of the object.