УДК 514.18

АНАЛІЗ МОЖЛИВОСТЕЙ ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ ПОВЕРХОНЬ

Ботвіновська С.І., к.т.н.
Київський національний університет будівництва і архітектури (Україна)

Розвиток архітектури останніх десятиліть показав, що одним з факторів впізнаваності та прийняття архітектурного об'єкту суспільством є його форма, яка повинна відповідати економічним, ергономічним, геометричним, статичним, композиційним та іншим критеріям. Проведений аналіз робіт з формоутворення поверхонь в архітектурі та дизайні показав, що саме задачі архітектурного формоутворення і формоутворення дизайн-об'єктів тісно пов'язані з питаннями їх геометричного моделювання.

Можливість варіювання форми поверхні допоможе дизайнерам та архітекторам знайти естетичний вигляд об'єкта без втрати його функціонального призначення. При моделюванні кривих ліній та поверхонь у задачах прикладної геометрії дуже часто використовуються геометричні перетворення.

У представленій роботі розглядаються теоретичні питання можливого використання деяких геометричних перетворень у процесі моделювання дискретних каркасів поверхонь у дизайні. Аналізуються теоретичні можливості усунення недоліків параболічної інтерполяції. Представлено властивості проективного перетворення на прикладі перспективного перетворення площин у просторі та афінного перетворення при дискретному моделюванні поверхонь. Кожне з цих перетворень має свої особливості. Так, наприклад, при проективному перетворенні – проекціювальні площини та прямі можуть переходити у площини або прямі загального положення, при афінному перетворенні рівноважної сітки, сітка залишається рівноважною. Метою роботи є аналіз властивостей перспективного перетворення для подальшого його використання при дискретному моделюванні криволінійних поверхонь у дизайн-проектах.

Ключові слова: геометричне моделювання, геометричні перетворення, проективне перетворення, афінне перетворення.

Постановка проблеми. Сучасний стан розвитку технічної естетики, на фоні активного використання криволінійних об’єктів складної форми в архітектурі та дизайн-проектуванні потребує подальшого удосконалення наявних методів геометричного моделювання. Можливості геометричного моделювання дискретних каркасів поверхонь різноманітних архітектурних форм майже необмежені, але потребують додаткових досліджень. Аналіз геометричних задач, які зумовлені побудовою геометричних моделей пов’язано з можливістю використання тих або інших вихідних даних та врахуванням різноманітних властивостей об’єктів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Геометричні перетворення використовуються дуже часто при моделюванні кривих ліній та поверхонь у задачах прикладної геометрії. Найміцнішим апаратом для розв’язання багатьох задач прикладного характеру при моделювання криволінійних об’єктів складної фори є бираціональні (кремонові) перетворення [1-3]. Неодноразово доведено, що геометричне моделювання технічних об’єктів бажано виконувати на основі біраціональних перетворень, які дозволяють отримувати криві із заданими параметрами та властивостями [4]. Серед таких перетворень, найпростішими вважаються, з точки зору їх завдання, біраціональні перетворення з пучками кривих другого порядку [3], які дозволяють отримати технічні криві різних форм та з різними характеристиками.

Створювати геометричні моделі об’єктів, що зазнали деформаційних змін із можливістю зорового відстеження цих процесів дозволяють політочкові перетворення [5]. Іноземними авторами подібні питання розглядаються у роботі [10] для конструювання поверхонь архітектурних оболонок. Вважається, що саме геометрія визначає вибір геометричної форми поверхні, а інновації сприяють появі нових геометричних форм. Показано, що в архітектурному дизайні найчастіше використовується Евклідова геометрія, а проективна геометрія та перспектива набули значення у готичний період розвитку епохи Відродження і характеризують сучасну архітектуру криволінійних поверхонь [10].

Формулювання цілей статті. Метою роботи є аналіз властивостей перспективного перетворення для подальшого його використання при дискретному моделюванні криволінійних поверхонь в дизайні статико-геометричним методом.

Основна частина. Одним з найпоширеніших способі утворення кривих ліній та поверхонь є отримання нової кривої або поверхні шляхом перетворення вже відомих геометричних образів [1, 9]. Статико-геометричний метод може бути наочним узагальнюючим методом для розв’язання більшості задач формування дискретних каркасів поверхонь. Дискретний каркас будь-якої поверхні може буди представлений як такий, що сформований цим методом [9].

Основою узагальнення статико-геометричного методу формування дискретних образів у тривимірному точковому просторі може бути заміна одних параметрів дискретної сітки певними функціями від інших. При цьому, в основі заміни координат вузлів дискретної сітки функціями лежать геометричні перетворення різної природи (алгебраїчні і трансцендентні перетворення, активне перетворення координат). Кожне з цих перетворень має особливості, які можна використати при наданні образу, що формується, певних властивостей геометричного, естетичного або іншого характеру.

Розглянемо можливість використання проективного перетворення на прикладі перспективного та афінного перетворення в дискретному геометричному моделюванні поверхонь дизайну.

Проективні перетворення є підгрупою біраціональних перетворень в якій зберігається рівність порядків поверхонь-образів та поверхонь-прообразів [1, 3]. Проективні перетворення розглядаються у проективному просторі, який утворюється при доповненні евклідового простору невласними елементами. Такий підхід дозволяє не розрізняти поняття власних і невласних елементів. Група проективних перетворень як підгрупа біраціональних перетворень у декартовій системі координат визначається дрібно-лінійними функціями, які мають вигляд многочленів першого ступеня [4, 9]:

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}; \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}};$$
$$z' = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \tag{1}$$

де a_{ij} – коефіцієнти перетворення.

Точкам площини $a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0$ відповідають невласні точки тривимірного простору. Оскільки формули (1) є лінійними, то пряма перетворюється на пряму, а площина на площину. Взагалі, порядок і клас кривої або поверхні є інваріантами проективного простору [9]. Особливим випадком проективного перетворення є перетворення перспективне, у тому випадку, якщо всі прямі, які проходять через відповідні точки простору перетинаються у спільному центрі проекціювання.

Перспективну відповідність між точками тривимірного простору можна задани центром перетворення, площиною подвійних точок і парою відповідних точок на одному промені [9].

Проективні перетворення та їх властивості достатньо детально описано у будь-якому підручнику з проективної геометрії [4, 9].

Важливою властивістю перспективного перетворення є те, що воно дозволяє перетворювати перетинні прямі (або площини) на паралельні прямі (або площини), невласні точки кривих (або поверхонь) можна перетворити на власні або навпаки.

Розглянемо синтетичне уявлення перспективного перетворення у тривимірному точковому просторі двох перетинних площин на дві паралельні площини.

На рис. 1 представлено апарат перспективного перетворення, який задано: центром S і площиною Γ подвійних точок. Задано дві площини Σ і Δ загального положення, які перетинаються по прямій $a // \Gamma$. Необхідно задати пару відповідних точок A і A'_∞ так, щоб площини Σ і Δ перетворились на паралельні. Для спрощення рис. 1 площини Γ, Σ і Δ задано фронтально-проекціювальними. Лінія a, перетину площин Σ і Δ, після перетворення повинна стати невласною прямою a'_∞, тоді довільна точка A на прямій a повинна перетворитись на невласну точку A'_∞ на промені SA. Пара відповідних точок A і A'_∞ доповнює задання перспективного перетворення.

Для побудови довільної точки M' (образу), що відповідає довільній точці M (прообразу), необхідно провести пряму AM до перетину у точці $K \equiv K'$ з площиною Γ подвійних точок. Далі, необхідно побудувати пряму $d' // SA'$, відповідну прямій AM, і на ній знайти точку M' як точку перетину прямої d' з променем SM. Оскільки пряма a перетворюється на невласну пряму a'_∞, то перетворені площини Σ' і Δ' стануть паралельними (рис. 1).

Описана властивість доводить, що використання проективного перетворення дозволить при формуванні дискретних каркасів поверхонь враховувати умови дотику поверхонь до заданих проекціювальних прямих, циліндричних поверхонь тощо.

Афінні перетворення є підгрупою проективних перетворень, які достатньо детально вивчені та описані у літературі [1, 4, 9]. Афінні перетворення відрізняються від проективних тим, що до інваріантів проективних перетворень додається інваріант, за яким невласні елементи простору перетворюються на невласні. У цьому випадку зберігається просте відношення трьох точок прямої або паралельність (лінійних підпросторів) прямих або площин [1]. Афінні перетворення аналогічно описуються лінійними функціями:

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_3;\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3;\ z' = c_1 x + c_2 y + c_3. \qquad (2)$$

де a_i, b_i, c_i – коефіцієнти афінного перетворення, якщо $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ [9].

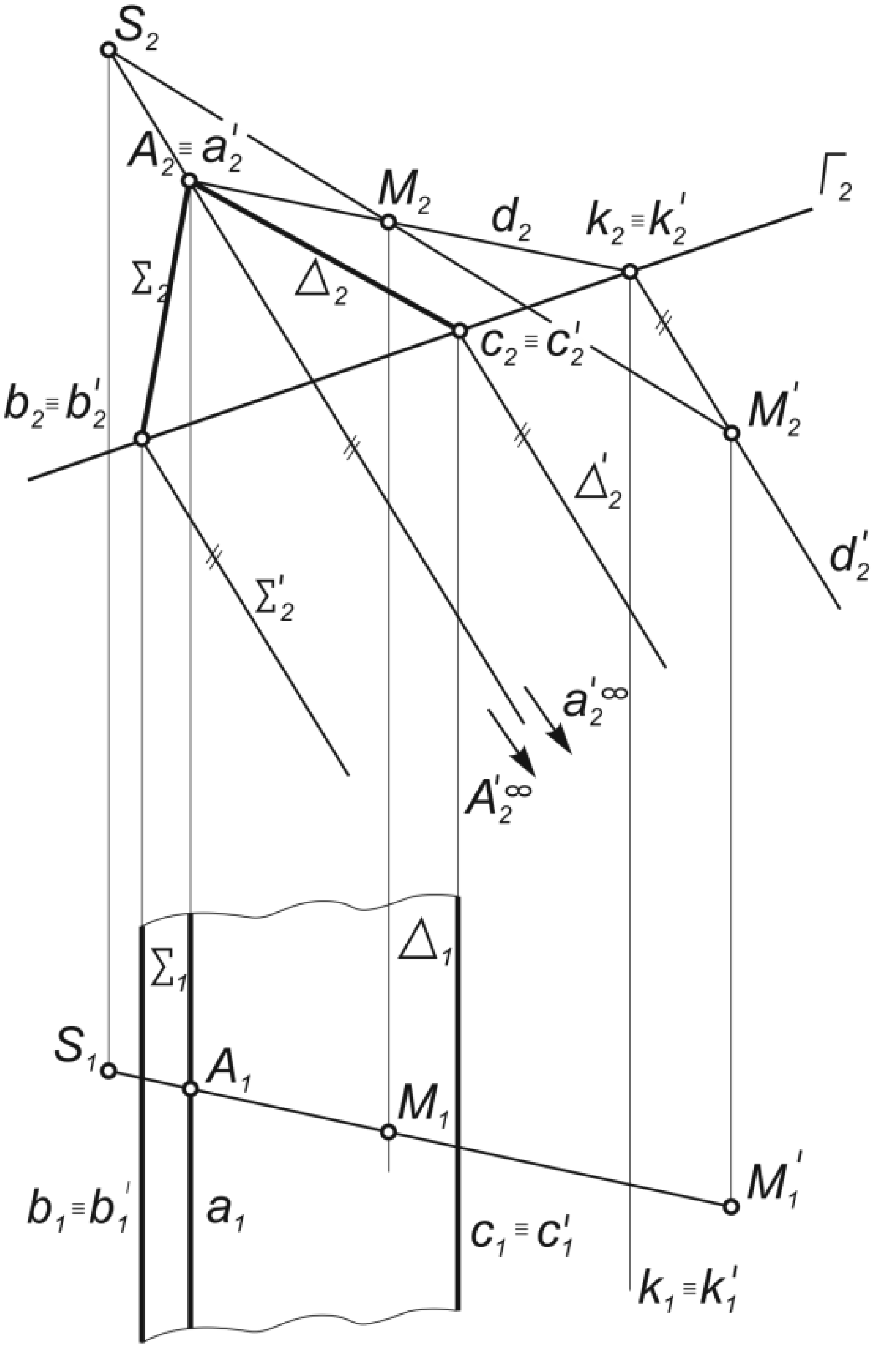


Рис. 1 Приклад перспективного перетворення площин у просторі

В окремому випадку афінні перетворення у тривимірному просторі задаються формулами:

$$x' = k_1 x, \quad y' = k_2 y, \quad z' = k_3 z, \tag{3}$$

де k_1, k_2, k_3– коефіцієнти афінного перетворення. З точки зору формування дискретних каркасів кривих ліній або поверхонь важливою є така властивість: при афінному перетворенні врівноваженої дискретної сітки, що формується за статико-геометричним методом, не порушується рівновага цієї сітки [7].

Доведення цієї властивості зводиться до того, що замкнений багатокутник зусиль Варіньйона перетворюється на подібний йому замкнений багатокутник. Іншою важливою властивістю є те, що об'єм який обмежено певними поверхнями при афінному перетворенні з заданими коефіцієнтами, перетворюється на об'єм з тими самими коефіцієнтами перетворення. Ця властивість дозволяє варіювати форму поверхні при сталому обмеженому об'ємі. Найпростіший приклад доведення цієї властивості представлений нижче.

Приклад (рис. 2). Дискретний каркас поверхні на квадратному плані 6×6 клітин, з одиничним кроком сформовано статико-геометричним методом. Задано аплікату центрального вузла A сітки ($z_A = 6$лін. од.) та опорний контур у вигляді ламаної лінії з чотирьох відрізків у площинах ($y=\pm3$ лін. од.) та двох півкіл: $x^2 + y^2 = R^2$, $x=\pm3$ лін. од., радіусом $R=3$ лін. од.

Для визначення аплікат вузлів дискретної сітки за СГМ складено скорочену систему рівнянь рівноваги вузлів сітки для 1/4 частини, з урахуванням симетрії вихідних даних:

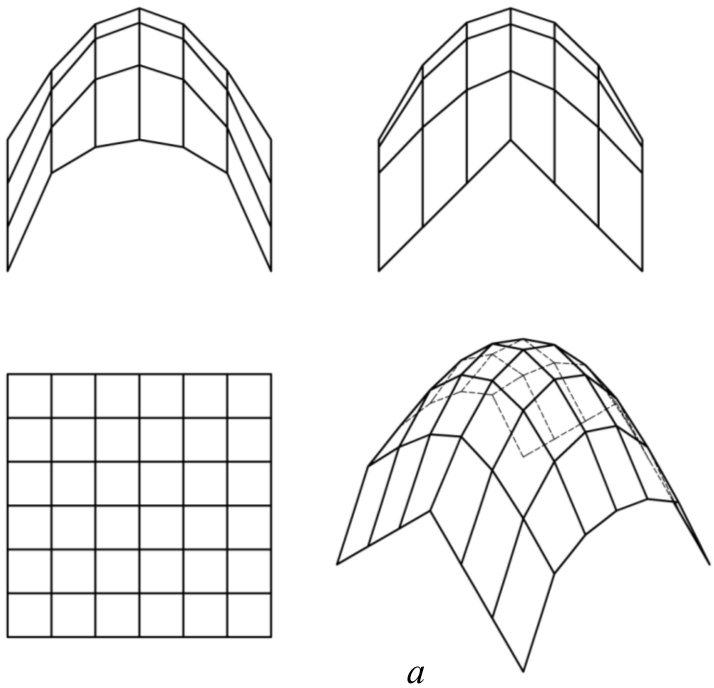
$$2z_{10} + 2z_{01} - 4z_{00} + kP = 0;$$
$$z_{00} + 2z_{11} + z_{20} - 4z_{10} + kP = 0;$$
$$z_{10} + 2z_{21} + z_{30} - 4z_{20} + kP = 0;$$
$$z_{02} + z_{00} + 2z_{11} - 4z_{01} + kP = 0;$$
$$z_{01} + z_{10} + z_{21} + z_{12} - 4z_{11} + kP = 0;$$
$$z_{11} + z_{20} + z_{31} + z_{22} - 4z_{21} + kP = 0;$$
$$z_{01} + 2z_{11} + z_{03} - 4z_{02} + kP = 0;$$
$$z_{02} + z_{11} + z_{22} + z_{13} - 4z_{12} + kP = 0;$$
$$z_{12} + z_{21} + z_{32} + z_{23} - 4z_{22} + kP = 0;$$

Визначені аплікати наведено у таблиці 1. Сірим кольором в таблиці 1 виділені аплікати опорного контуру та центрального заданого вузла A.

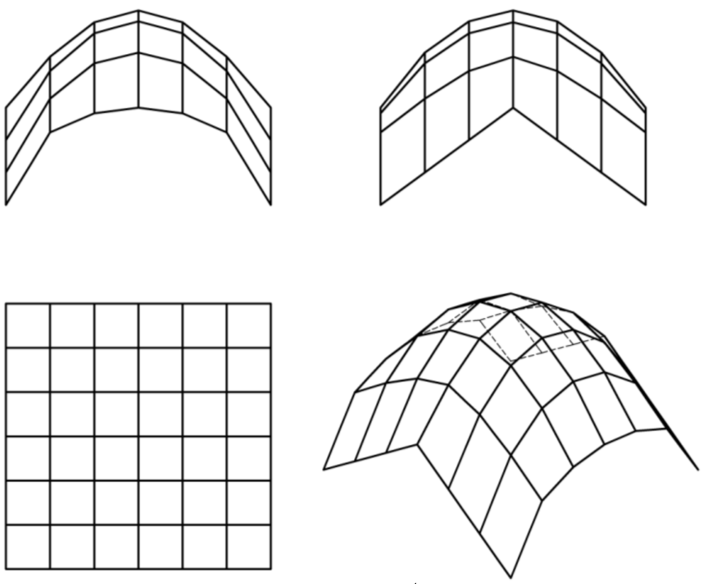
Таблиця 1

j = 3	*3,0000*	*2,0000*	*1,0000*	*0,0000*
j = 2	*4,5722*	*4,1339*	*3,2813*	*2,2361*
j = 1	*5,6384*	*5,2995*	*4,3729*	*2,8284*
j = 0	*6,0000*	*5,6703*	*4,6996*	*3,0000*
	i = 0	*i = 1*	*i = 2*	*i = 3*

Зовнішній вигляд дискретно визначеної поверхні по результатам таблиці 1 представлено на рис. 2, *а*.



а



б

Рис. 2. Приклад використання афінного перетворення каркаса дискретно представленої поверхні

За формулою, наведеною у роботі [7] підраховуємо об’єм, що перекривається дискретно визначеною поверхнею:

$$V = \frac{h^2}{4}\left[z_{00} + z_{m,0} + z_{0,n} + z_{m,n} + 2\sum_{i=1}^{m-1}(z_{i,0} + z_{i,n}) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(z_{0,j} + z_{m,j}) + 4\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} z_{i,j} \right]$$

$V = 136.64$ куб. од.

Перетворимо сітку у напрямку осі Oz так, щоб об'єм перекритий поверхнею дорівнював $V' = 100.000$ куб. од.

Для цього визначаємо коефіцієнт афінного перетворення: $k_z = \dfrac{V'}{V} = \dfrac{100.00}{136.64} = 0.7318$. Далі, визначаємо аплікати вузлів нової дискретної сітки, яка перекриває новий об'єм V', множенням аплікат вихідної сітки на коефіцієнт k_z, за формулами (3).

Оскільки афінне перетворення сітки відбувається вздовж осі Oz коефіцієнти k_x, k_y приймаємо рівними одиниці. Аплікати нової перетвореної дискретно представленої поверхні занесено в таблицю 2.

За цими координатами будуємо дискретний каркас нової поверхні (рис. 2, *б*), яка перекриває заданий об'єм V'.

Таблиця 2

j = 3	*2,1960*	*1,4640*	*0,7318*	*0,0000*
j = 2	*3,3462*	*3,0254*	*2,4014*	*1,6368*
j = 1	*4,1265*	*3,8784*	*3,2003*	*2,0704*
j = 0	*4,3920*	*4,1498*	*3,4394*	*2,1960*
	i = 0	*i = 1*	*i = 2*	*i = 3*

Висновки. Аналіз існуючих джерел показав, що способи конструювання криволінійних поверхонь ґрунтуються на властивостях кремонових перетворень простору. Найчастіше мова йде про узагальнення на тривимірний простір способів конструювання одновимірних об'єктів. У більшості джерел мова йде про поверхні, які задано аналітичними рівняннями. Більш складною задачею є моделювання поверхонь різноманітних об'єктів за наперед заданими властивостями та на довільних опорних контурах. У таких випадках необхідно використовувати методи дискретної геометрії.

Усунути недоліки параболічної інтерполяції можна за рахунок використання проективного перетворення, яке дозволяє привести у відповідність параболі або еліптичному параболоїду, які мають невласну точку, відповідні образи, всі точки яких є власними.

Подальші дослідження будуть спрямовано на моделювання криволінійних поверхонь у дизайн-проектах, які відповідають наперед заданим умовам, з використанням узагальненого статико-геометричного методу та перспективного перетворення.

Література

1. Иванов Г.С. Бирациональные преобразования в моделировании поверхностей: монография. / Г.С. Иванов. – М.: МАИ, 1984. – 44с.
2. Боровиков И.Ф. Геометрические преобразования в инженерной геометрии / И.Ф. Боровиков, Г.С. Иванов // Наука и Образование

МГТУ им. Н.Э. Баумана. – Электрон. Журн., 2015. – № 05. – С. 334-347.

3. Боровиков И.Ф. Использование бирациональных преобразований с пучками самосоответственных коник в геометрическом моделировании кривых и поверхностей / И.Ф. Боровиков, Д.В. Бескровный, О.А. Яковчук // Альманах современной науки и образования. – Тамбов: Грамота, 2016. – № 10 (112). – С. 10-12. ISSN 1993-5552. URL: https://research-journal.org/wp-content/uploads/2011/10/6-5-48.pdf#page=114 (дата обращения 18.11.2018).
4. Скидан І. А. Узагальнена модель Мебіусових перетворень / І. А. Скидан, О. Г. Гайдар // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомчий наук.-техн. збірник. – Київ: КНУБА, 1999. – Вип. 66. – С. 39–43.
5. Сидоренко Ю.В. Система моделювання геометричних об’єктів за допомогою політочкових перетворень / Ю.В. Сидоренко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомчий наук.-техн. збірник. – Київ: КНУБА, 2014. – № 92. – С. 118-124.
6. Ботвіновська С.І. Геометричне моделювання поверхонь СГМ за допомогою перетворення інверсії / С.І. Ботвіновська, С.М. Ковальов, А.В. Золотова // зб. наук. праці МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип. 5. – С. 47–57.
7. Ботвіновська С.І. Обчислення об’єму, що перекривається дискретно поданою поверхнею (ДПП), на плані з регулярною тріангуляційною сіткою / С.І. Ботвіновська, О.В. Мостовенко // Сучасні проблеми архітектури та містобудування : наук. технічний збірник. – Київ: КНУБА, 2018. – № 50. – С.20–25.
8. Ботвіновська С.І. Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об’єктів архітектури та дизайну. дис. …доктора техн. наук. 05.01.01. / С.І. Ботвіновська – Київ.: КНУБА, 2018. – 527с.
9. Глаголев Н.А. Проективная геометрия: учеб. пособ. для гос. ун-тов. / Н.А. Глаголев – М.: Наука, 1961. – 512 с.
10. T. Bellone, F. Fiermonte, L. Mussio The common evolution of geometry and architecture from a geodetic point of view. / The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Volume XLII-5/W1, 2017. Geomatics

and Restoration: Conservation of Cultural Heritage in the Digital Era, 22–24 May 2017, Florence, Italy. p.p.623-630. URL: https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLII-5-W1-623-2017, 2017 (дата звернення 19.11.2018).

АНАЛИЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИСКРЕТНЫХ КАРКАСОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ботвиновская С.И.

Развитие архитектуры в последнее время показало, что одним из факторов восприятия и узнаваемости архитектурного объекта есть его форма, которая должна соответствовать экономическим, эргономическим, геометрическим, статическим, композиционным и другим критериям. Анализ работ, в которых описаны процессы формообразование поверхностей в архитектуре и дизайне, показал, что именно задачи формообразования архитектурных дизайн-проектов тесно связаны с вопросами геометрического моделирования криволинейных поверхностей.

Возможность управления формой таких поверхностей поможет дизайнерам и архитекторам в наглядном поиске эстетического вида объекта без потери его функционального назначения. При моделировании кривых линий и поверхностей в задачах прикладной геометрии очень часто используются геометрические преобразования.

В данной работе рассматриваются теоретические вопросы возможного использования геометрических преобразований в процессе моделирования дискретных каркасов поверхностей в дизайне. Анализируются теоретические возможности устранения недостатков параболической интерполяции. Проанализированы свойства проективного преобразования на примере перспективного преобразования плоскости в пространстве и аффинного преобразования при моделировании дискретных каркасов поверхностей. Каждое из этих преобразований имеет свои особенности. Так, например, при проективном преобразовании – проецирующие плоскости и прямые могут преобразовываться в плоскости или прямые общего положения, при аффинном преобразовании равновесие дискретной сетки сохраняется. Целью работы является анализ свойств перспективного преобразования для дальнейшего его использования в процессе дискретного моделирования криволинейных поверхностей в дизайн-проектах.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, геометрические преобразования, проективное преобразование, аффинное преобразование.

ANALYSIS OF THE USE OF GEOMETRIC TRANSFORMATIONS IN MODELING DISCRETE FRAMEWORK OF SURFACES

Botvinovska S.

The architecture development in recent decades has shown that one of the factors of recognition and acceptance of an architectural object by a society is its form, which has to comply with economic, ergonomic, geometric, static, compositional, and other criteria. The undertaken analysis of some works on surfaces shaping in architecture and designing has shown that the tasks of architectural shaping and design-objects shaping are indeed closely related to the issues of their geometric modeling.

The possibility of varying the shape of the surface can help designers and architects find that aesthetic look of the object and not to lose its functional purpose. Geometrical transformations are very often used for the design of the crooked lines and surfaces in the tasks of the applied geometry

In this paper the theoretical issues of the possible use of geometric transformations in the process of modeling discrete frameworks of surfaces in the design. The theoretical possibilities of eliminating the deficiencies of parabolic interpolation are analyzed. The properties of the projective transformation are analyzed by the example of a perspective transformation of a plane in space and affine transformation when modeling discrete framework of surfaces. Each of these transformations has its own features. For example, under projective transformation, the projection planes and straight lines can transform into planes or lines of general positions, under the affine transformation of the equilibrium grid, the grid remains in equilibrium.

The aim of work is an analysis of properties of perspective transformation for his further using for his further use in the process of discrete design of curvilinear surfaces in the design-projects.

Keywords: geometric modeling, transformations geometric, projective transformation, affine transformation.