УДК 514.74

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ПОЛІТОЧКОВИХ ТРИВИМІРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТРИКУТНИКІВ

Колот О.Л. аспірант*,
Бадаєв Ю.І., д.т.н.
Державний університет інфраструктури та технологій
(м. Київ, Україна)

Політочкові перетворення застосовуються в проектуванні геометричних об'єктів складної форми в машинобудуванні. Розширення можливостей політочкових перетворень є важливою проблемою в теперішній час.

У попередніх публікаціях [1-4] розглядаються методи політочкових перетворень на основі оптимізації деформації відстаней площин до заданої множини точок, але при цьому не розглядається можливість поширити цей метод на перетворення точково-заданих поверхонь, що звужує його застосування в проектуванні складних геометричних об'єктів.

Запропонований метод відрізняється від звичайних політочкових відображень тим, що в якості прообраза можна задавати не площини в неявному вигляді, а множину трикутників в тривимірному просторі і отримувати перетворений об'єкт у вигляді множини перетворених трикутників.

Такий підхід забезпечує можливість множину трикутників триангульованої поверхні перетворювати в іншу множину трикутників, що дає нову перетворену поверхню. При цьому нова перетворена поверхня змінює своє положення і конфігурацію відповідно до зміни політочкового базису.

Практична цінність запропонованого метода заключається в тому, що дає змогу моделювати різні поверхні із заданою конфігурацією відповідно до заданої конфігурації нового політочкового базису.

Переваги методу також заключаються в простоті методу а також в легкості комп'ютерної реалізації у вигляді програми, яка автоматизує процес проектування поверхонь в машинобудуванні.

Ключові слова: дискретно задана поверхня, трикутник в тривимірному просторі, політочкові відображення площин.

---

* Науковий керівник – д.т.н., проф. Бадаєв Ю.І.

Постановка проблеми. Політочкові перетворення застосовуються в проектуванні геометричних об'єктів складної форми в машинобудуванні. Розширення можливостей політочкових перетворень є важливою проблемою в теперішній час.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У попередніх публікаціях [1-4] розглядаються методи політочкових перетворень на основі оптимізації деформації відстаней площин до заданої множини точок, але при цьому не розглядається можливість поширити цей метод на перетворення точково-заданих поверхонь, що звужує його застосування в проектуванні складних геометричних об'єктів.

Формулювання цілей статті. Метою статті є застосування тривимірних трикутників в методі політочкових відображень для геометричного моделювання складних об'єктів.

Основна частина. В роботі [1] наведено метод політочкових відображень площин, який заключається в наступному.

Нехай в тримірному просторі задано :

- точки первинного точкового базису $T_{pi}\,(x_{pi},y_{pi},z_{pi}), i=1,2,3,\ldots M,$
- точки вторинного точкового базису $T_{vi}\,(x_{vi},y_{vi},z_{vi}), i=1,2,3,\ldots M,$
- площина-прообраз, яка задана коефіцієнтами a_{proob}, b_{proob}, c_{proob}, d_{proob}, що визначають площину в неявному вигляді:

$$a_{proob}x + b_{proob}y + c_{proob}z + d_{proob} = 0. \tag{1}$$

Всі точки первинного точкового базису мають відстані до площини-прообразу у вигляді:

$$\beta_i = a_{proob}x_{pi} + b_{proob}y_{pi} + c_{proob}z_{pi} + d_{proob} \neq 0, i = 1,2,3,..M. \tag{2}$$

При відображенні площина-прообраз перетвориться в площину-образ у вигляді:

$$a_{ob}x + b_{ob}y + c_{ob}z + d_{ob} = 0. \tag{3}$$

Площина-образ буде мати наступні відстані від точок вторинного точкового базису у вигляді:

$$\gamma_i = a_{ob}x_{vi} + b_{ob}y_{vi} + c_{ob}z_{vi} + d_{ob} \neq 0. \tag{4}$$

При відображенні перетворені відстані будуть дорівнювати:

$$\gamma_i = \omega_i \beta_i, \tag{5}$$

де ω_i - поки невизначений коефіцієнт.

Звідси

$$\omega_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i}. \tag{6}$$

Визначимо наступний функціонал

$$S = \sum_{i=1}^{M} (\omega_i - 1)^2 \Rightarrow \min, \tag{7}$$

що буде означати, що відношення нових координат γ_i до первинних координат β_i будуть прагнути до 1.0.

Продиференціюємо (7) по $a_{ob}, b_{ob}, c_{ob,} d_{ob}$:

$$\frac{\delta S}{\delta a_{ob}} = \sum_{i=1}^{M} 2(\omega_i - 1)\frac{x_{obi}}{\beta_i}\ ; \tag{8}$$

$$\frac{\delta S}{\delta b_{ob}} = \sum_{i=1}^{M} 2(\omega_i - 1)\frac{y_{obi}}{\beta_i}\ ; \tag{9}$$

$$\frac{\delta S}{\delta c_{ob}} = \sum_{i=1}^{M} 2(\omega_i - 1)\frac{z_{obi}}{\beta_i}\ ; \tag{10}$$

$$\frac{\delta S}{\delta d_{ob}} = \sum_{i=1}^{M} 2(\omega_i - 1)\frac{1}{\beta_i}\ . \tag{11}$$

Підставимо (6),(2) і (4) в (8-11). Отримаємо систему із 4-х лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} &A1\,a_{ob} + B1\,b_{ob} + C1\,c_{ob} + D1\,d_{ob} = E1,\\ &A2\,a_{ob} + B2\,b_{ob} + C2\,c_{ob} + D2\,d_{ob} = E2,\\ &A3\,a_{ob} + B3\,b_{ob} + C3\,c_{ob} + D3\,d_{ob} = E3,\\ &A4\,a_{ob} + B4\,b_{ob} + C4\,c_{ob} + D4\,d_{ob} = E4, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

де

$$\left.\begin{aligned} &A1 = \sum_{i=1}^{M}\frac{x_{vi}^2}{\beta_i^2}, B1 = \sum_{i=1}^{M}\frac{y_{vi}x_{vi}}{\beta_i^2}, C1 = \sum_{i=1}^{M}\frac{z_{vi}x_{vi}}{\beta_i^2}, D1 = \sum_{i=1}^{M}\frac{x_{vi}}{\beta_i^2}, E1 = \sum_{i=1}^{M}\frac{x_{vi}}{\beta_i},\\ &A2 = \sum_{i=1}^{M}\frac{x_{vi}y_{vi}}{\beta_i^2}, B2 = \sum_{i=1}^{M}\frac{y_{vi}^2}{\beta_i^2}, C2 = \sum_{i=1}^{M}\frac{z_{vi}y_{vi}}{\beta_i^2}, D2 = \sum_{i=1}^{M}\frac{y_{vi}}{\beta_i^2}, E2 = \sum_{i=1}^{M}\frac{y_{vi}}{\beta_i},\\ &A3 = \sum_{i=1}^{M}\frac{x_{vi}z_{vi}}{\beta_i^2}, B3 = \sum_{i=1}^{M}\frac{y_{vi}z_{vi}}{\beta_i^2}, C3 = \sum_{i=1}^{M}\frac{z_{vi}^2}{\beta_i^2}, D3 = \sum_{i=1}^{M}\frac{z_{vi}}{\beta_i^2}, E3 = \sum_{i=1}^{M}\frac{z_{vi}}{\beta_i},\\ &A4 = \sum_{i=1}^{M}\frac{x_{vi}}{\beta_i^2}, B4 = \sum_{i=1}^{M}\frac{y_{vi}}{\beta_i^2}, C4 = \sum_{i=1}^{M}\frac{z_{vi}}{\beta_i^2}, D4 = \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\beta_i^2}, E4 = \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\beta_i}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Розв'язання системи (12) дасть нові коефіцієнти $a_{ob}, b_{ob}, c_{ob}, d_{ob}$ площини-образу після перетворення площини-прообразу.

Будемо розв'язувати задачу в наступній послідовності:

1. Задаємо трикутник –прообраз ABC в тривимірному просторі $A_{pr}(x_{Apr}, y_{Apr}, z_{Apr})$, $B_{pr}(x_{Bpr}, y_{Bpr}, z_{Bpr})$, $C_{pr}(x_{Cpr}, y_{Cpr}, z_{Cpr})$.

Розраховуємо коефіцієнти площини-прообразу.

Коефіцієнти a_{proob}, b_{proob}, c_{proob} розраховуємо за допомогою векторного помноження:

$$\begin{bmatrix} a_{proob} & b_{proob} & c_{proob} \\ (x_{Bpr}-x_{Apr}) & (y_{Bpr}-y_{Apr}) & (z_{Bpr}-z_{Apr}) \\ (x_{Cpr}-x_{Apr}) & (y_{Cpr}-y_{Apr}) & (z_{Cpr}-z_{Apr}) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Коефіцієнт d_{proob} буде дорівнювати:

$$d_{proob} = -(a_{proob}x_{Aproob} + b_{proob}y_{Aproob} + c_{proob}z_{Aproob}). \tag{15}$$

Таким чином ми визначили первинну площину- прообраз (1).

2. Задамо первинний і вторинний точкові базиси T_{pi} (x_{pi},y_{pi},z_{pi}),i=1,2,3,…M, T_{vi} (x_{vi},y_{vi},z_{vi}),i=1,2,3,…M. Кількість точок первинного і вторинного базисів обов'язково однакові.

3. Виконаємо політочове перетворення площини-прообразу (1) на основі застосування формул (2),(4),(5-12).

В результаті отримаємо перетворену площину-образ (3).

4. Задамо координати x_i, y_i трьох перетворених точок трикутника. Координату z_i отримаємо із рівняння (3) перетвореної площини:

$$z_i = -\frac{a_{ob}x_i + b_{ob}y_i + d_{ob}}{c_{ob}}. \tag{16}$$

На рис. 1 показане трьохточкове перетворення трикутника. На рис. 2,3,4 показані два тестових приклада перетворення сфери на основі восьмиточкових перетворень.

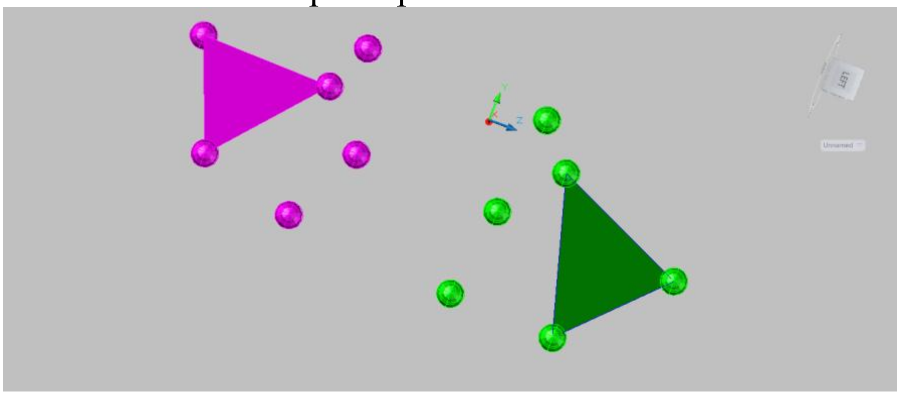

Рис. 1 Трьохточкове перетворення трикутника.

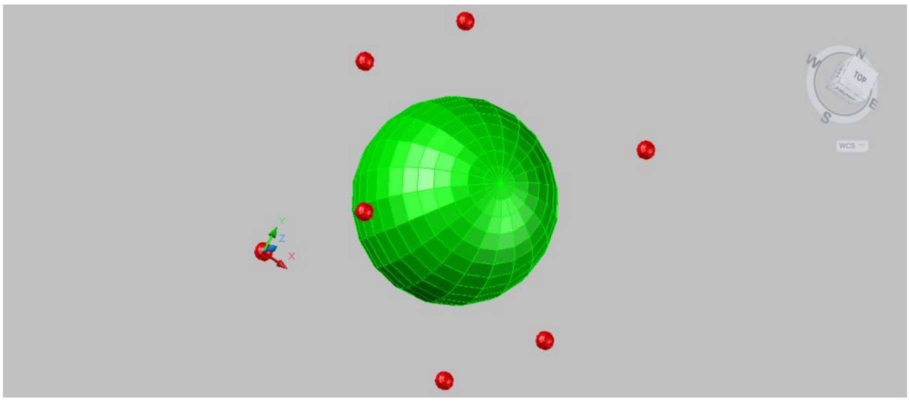

Рис. 2 Прообраз-сфера у восьмиточковому первинному базисі.

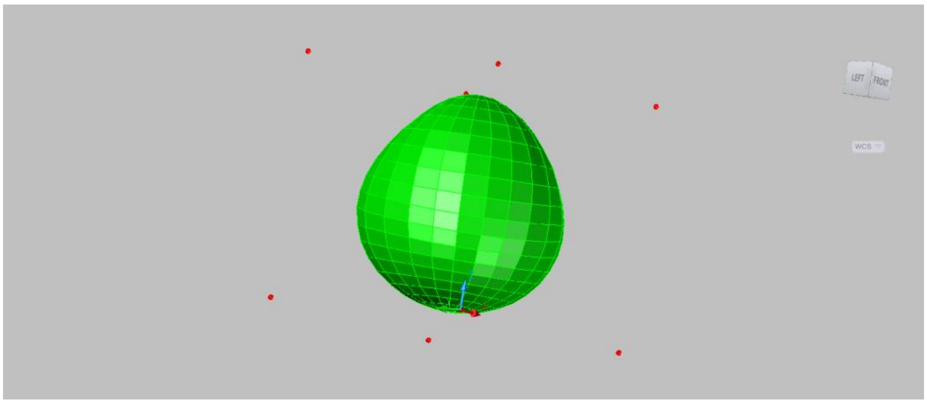

Рис. 3 Тест 1. Перетворена сфера у восьмиточковому вторинному базисі.

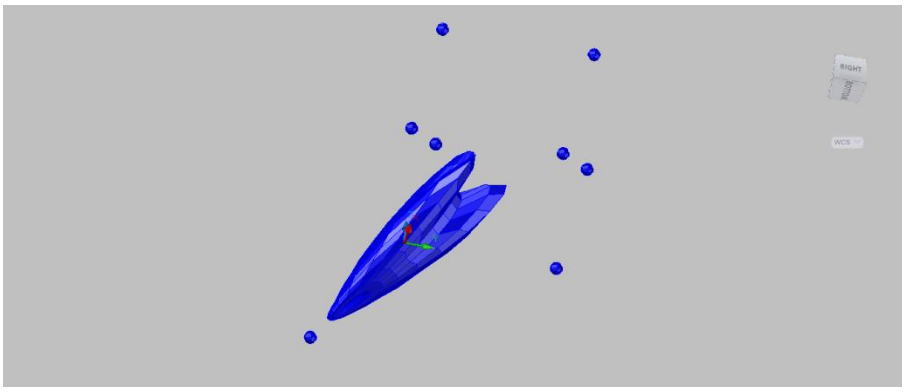

Рис. 4 Тест 2. Перетворена сфера у восьмиточковому вторинному базисі.

Висновки. В роботі було запропоновано метод політочкових тривимірних відображень трикутників в геометричному моделюванні складних об’єктів, який відрізняється від звичайних політочкових відображень тим, що в якості прообраза можна задавати не площини в неявному вигляді, а множину трикутників в тривимірному просторі і отримувати перетворений об’єкт у вигляді множини перетворених трикутників. Практична цінність запропонованого метода заключається в тому, що дає змогу моделювати різні поверхні із заданою конфігурацією відповідно до заданої конфігурації нового політочкового базису.

Література

1. Бадаев Ю.И. Поликоординатный метод в прикладной геометрии и компьютерной графике. – [Монография]./ Ю.И. Бадаев. – К.: Просвіта, 2006. – 173 с.
2. Бадаєв Ю.І. Визначення коефіцієнтів перетвореної прямої при політочкових перетвореннях / Ю.І. Бадаєв, Ю.В. Сидоренко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К: КДТУБА, 2001. – Вип.68. – С.45-47.
3. Бадаєв Ю.І. Політканинні перетворення в точковому визначенні /

Ю.І. Бадаєв, Ю.В. Сидоренко // Труды Таврической государственной агротехнической академии. – Мелитополь: ТГАТА, 1998. – Вып.4: Прикладная геометрия и инженерная графика. – Т.8. – С.21–23.

4. Бадаєв Ю.І. Деформаційне конструювання об’єктів водного транспорту за допомогою політочкових перетворень / Ю.І. Бадаєв, Ю.В. Сидоренко // Водний транспорт: Збірник наукових праць, – К.: КДАВТ, 2000. – С.140–143.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ПОЛИТОЧЕЧНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Колот А.Л., Бадаев Ю.И.

Политочечные преобразования применяются в машиностроении при проектировании геометрических объектов сложной формы. Расширение возможностей политочечных преобразований в настоящее время является важной проблемой.

В предыдущих публикациях [1-4] рассматриваются методы политочечных преобразований на основе оптимизации деформации расстояний плоскостей к заданному множеству точек, но при этом не рассматривается возможность распространить этот метод на преобразования точечно-заданных поверхностей, что сужает его применение в проектировании сложных геометрических объектов.

Предложенный метод отличается от обычных политочечных отражений тем, что в качестве прообраза можно задавать не плоскости в неявном виде, а множество треугольников в трехмерном пространстве и получать преобразованный объект в виде множества преобразованных треугольников.

Такой подход дает возможность множество треугольников триангулированной поверхности превращать в другое множество треугольников, дает новую преобразованную поверхность. При этом новая преобразованная поверхность меняет свое положение и конфигурацию в соответствии с изменением политочечного базиса.

Практическая ценность предложенного метода заключается в том, что он позволяет моделировать различные поверхности с заданной конфигурацией в соответствии с заданной конфигурации нового политочечного базиса.

Преимущества метода также заключаются в простоте метода а также в легкости компьютерной реализации в виде программы, которая автоматизирует процесс проектирования поверхностей в машиностроении.

Ключевые слова: дискретно заданная поверхность, треугольник *в трехмерном пространстве, политочечное отображение плоскостей.*

GEOMETRIC MODELING OF COMPOSITE OBJECTS ON THE BASIS OF POLYPOINTS THREE-DIMENSIONAL TRANSFORMATIONS OF TRIANGLES

Kolot O., Badayev Y.

The paper proposes a method of three-dimensional mappings of triangles in geometric modeling of complex objects.

Counterform transformations are used in the design of geometric objects of complex form in mechanical engineering.

Expansion of the possibilities of political transformations is an important problem at the present time.

In previous publications [1-4] we consider methods of field transformations based on the optimization of deformation of distances of planes to a given set of points, but this does not consider the possibility of extending this method to the transformation of point-defined surfaces, which narrows its application in the design of complex geometric objects

The proposed method differs from the usual field-mapping mappings by the fact that it is possible to specify not an implicit plane, but a set of triangles in a three-dimensional space as a prototype, and to obtain a transformed object in the form of a set of transformed triangles.

This approach ensures that the plural of triangles of a triangulated surface can be transformed into another set of triangles, which gives the new converted surface.

The practical value of the proposed method lies in the fact that it allows to simulate different surfaces with a given configuration in accordance with the given configuration of a new polyhedic basis.

The advantages of the method also consist in the simplicity of the method as well as in the ease of computer implementation in the form of a program that automates the process of a three-dimensional space and receive a transformed object in the form of a set of transformed triangles.

Keywords: discretely defined surface, triangle in three-dimensional space, polypoints mapping of planes.