УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ОБРАЗІВ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ, ЗАДАНИХ ПЕРЕТИНОМ ДВОХ ПОВЕРХОНЬ

Плоский В.О., д.т.н.,
Скочко В. І., к.т.н.[*]
Київський національний університет будівництва і архітектури (Україна)

Побудова просторових кривих, що утворюються шляхом перетину двох поверхонь представляє собою досить складне і в той же час важливе завдання. Пошук нових способів його вирішення представляє великий інтерес, оскільки вини можуть бути застосовані при проектуванні окремих фрагментів поверхонь складних технічних форм, що працюють у складних умовах експлуатації, зокрема машин та механізмів.

Ця задача ускладняється ще більше, якщо функції поверхонь, крива перетину яких досліджується, задані у неявній формі. В цьому випадку може виникнути не лише проблема візуалізації досліджуваної кривої, але й власне проблема побудови самих поверхонь.

В даній роботі пропонується підхід до побудови дискретних образів шуканих просторових кривих, що базується на використанні інтегральних рівнянь рівноваги вільних вузлів відповідних образів, доповнених спеціальними умовами (рівняннями й коефіцієнтами) до форми функцій Лагранжа. В такій постановці задача визначення положень вільних вузлів дискретного образу шуканої кривої представляє собою пошук оптимального положення цих вузлів при обов'язковій умові їх одночасної належності поверхням обох функцій, що перетинаються. Відтак, вирішення даної задачі може бути зведене до пошуку умовних екстремумів багатьох функцій, кожна з яких описуватиме стан статичної рівноваги вільних вузлів дискретного образу, як ідеалізованої математичної моделі сітчастої (або стрижневої) структури, що перебуває під дією функціональних навантажень векторного поля сил. Саме ж поле цих сил представлятиме собою суперпозицію градієнтних полів, функції скалярних потенціалів яких відповідатимуть функціям двох поверхонь, що перетинаючись утворюють шукану просторову криву.

Ключові слова: просторова крива, дискретний образ кривої.

---

[*] Науковий консультант – д.т.н., проф. Плоский В.О.

Постановка проблеми. Просторові криві в більшості випадків задаються у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Така форма запису є найпростішою та майже не викликає ускладнень при побудові кривої та її подальшому дослідженні, оскільки координати не є функціонально залежними один від одного.

Якщо ж просторова крива задається, як лінія перетину двох довільних поверхонь Ω та Ξ, функції яких задані у неявній формі:

$$\begin{cases} \Omega = \varsigma_1(x, y, z) = 0; \\ \Xi = \varsigma_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

то задача її побудови (візуалізації) може виявитися досить складною, оскільки сама по собі задача візуалізації поверхонь неявних функцій часто стикається зі значними перешкодами, пов’язаними із неможливістю привести відповідні функції до явної форми або складнощами застосування методів згущення зони пошуку точок, що задовільняють відповідним функціям у області пошуку.

Відтак, доцільно обмежитися певною кількістю розрахункових точок, що належатимуть просторовій кривій лінії перетину поверхонь Ω та Ξ в досліджуваній області простору, задавши лише топологічні ознаки та координати опорних вузлів деякого дискретного образу, кількість вільних вузлів якого повинна відповідати кількості інцидентних точок на шукані кривій. Визначення ж координат вільних вузлів даного образу й представляє собою основну проблему, що потребує вирішення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В публікаціях [1] та [2] було представлено спосіб побудови та оптимізації дискретно представлених об’єктів на площині (кривих) та в просторі (поверхонь та об’єктів технічних форм). Основна ідея полягає у наступному. З точки зору теоретичної та будівельної механіки рівновага кожного *i*-го вільного вузла дискретного образу, якщо розглядати його як безмоментну сітчасту (або стрижневу) структуру можна описати наступним інтегральним рівнянням:

$$\sum_{j=1}^{n} \aleph_{i,j} \cdot \delta_{i,j}^2 - \varphi_i + G_i = 0, \qquad (3)$$

де: φ_i – вузлові значення потенціалу формоутворюючих польових структур (або незалежних цільових функцій); G_i – деякі невизначені константи інтегрування; $\aleph_{i,j}$ – умовні параметри жорсткості стрижнів (ланок дискретного образу), що виражаються відношеннями абсолютних величин поздовжніх зусиль у цих стрижнях $\overline{R}_{i,j}$ до їх довжин $\delta_{i,j}$:

$$\aleph_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j} . \tag{4}$$

Якщо ми виділимо w вільних вузлів досліджуваного образу, координати кожного i-го з яких в результаті формоутворення повинні задовільняти не одній, а одразу декільком функціям та/або встановленим диференціальним вимогам $\varphi_{i,h}$ так, що:

$$\varphi_{i,h} = \varsigma_{i,h}(x_i, y_i, z_i) = 0, (h = \overline{1,t_i}), \tag{5}$$

де h – порядковий номер умови та/або функції $\varphi_{i,h}$, якій мають задовільняти координати i-го вільного вузла з множини вузлів w, вибраних для уточнення їхнього положення, а t_i – кількість накладених функцій та/або умов для i-го вузла; то для того, щоб отримати можливість впливати на положення вільних вузлів, необхідно вдатися до принципів знаходження умовних екстремумів з використанням невизначених коефіцієнтів Лагранжа $\lambda_{i,h}$ [3]. Після введення відповідних коефіцієнтів, функцій та умов до рівняння (3), яке й будемо розглядати в якості функції Лагранжа $\Re_i$, запишемо його в більш узагальненій модифікованій формі:

$$\Re_i = \sum_{j=1}^{n} \aleph_{i,j} \cdot \delta_{i,j}^2 \pm \sum_{h=1}^{t_i} \lambda_{i,h} \cdot \varphi_{i,h} + G_i^{/}, \tag{6}$$

де $G^{/}_i$ – сумарна невизначена константа інтегрування усіх функцій $\varphi_{i,h}$.

Визначаючи екстремуми функцій (6) в кожному i-му з w обраних вузлів сітчастої структури для кожної i-ї точки дискретного образу, отримаємо наступні рівняння:

$$\partial \Re_i / \partial \lambda_{i,h} = 0, (h = \overline{1,t_i}), \tag{7}$$

$$\partial \Re_i / \partial s_i = 0, (s_i = x_i, y_i, z_i). \tag{8}$$

Звідки маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} (s_j - s_i) \cdot \aleph_{i,j} + \wp_{si} = 0, (i = \overline{1,w}; s_i = x_i, y_i, z_i), \tag{9}$$

де:
$$\wp_{si} = \sum_{h=1}^{t_i} \lambda_{i,h} \cdot \Im_{si,h} = \sum_{h=1}^{t_i} \lambda_{i,h} \cdot \partial \varphi_{i,h} / \partial s_i, (i = \overline{1,w}; s_i = x_i, y_i, z_i), \tag{10}$$

$$\varphi_{i,h} = \varsigma_{i,h}(x_i, y_i, z_i) = 0, (i = \overline{1,w}; h = \overline{1,t_i}). \tag{11}$$

Складаючи та розв’язуючи для усіх вільних вузлів рівняння типу (9) – (11) відносно координат цих вузлів і коефіцієнтів $\lambda_{i,h}$, одержимо шукану форму (положення вільних вузлів) дискретного образу.

Формулювання цілей статті. Адаптація вище наведеного способу побудови дискретних образів до задачі визначення координат вузлів дискретно представлених просторових кривих, що задаються як лінії перетину двох поверхонь.

Основна частина. Розглянемо умови належності точок шуканої просторової кривої функціям двох поверхонь Ω та Ξ. Фактично, потрібно, щоб координати кожного вільного вузла кривої задовільняли рівнянням системи (2).

Розглядаючи систему (9) – (11) в контексті наявності двох функцій поверхонь Ω та Ξ, обом із яких має бути інцидентний кожен вузол із множини w вільних вузлів дискретного образу, легко дійти висновку, що ці функції мають представляти собою дві відповідні умови, що будуть входити до функції Лагранжа $\Re_i$. Остання матиме наступну форму для довільного i-го вільного вузла:

$$\Re_i = \sum_{j=1}^{n} \aleph_{i,j} \cdot \delta_{i,j}^2 + \lambda_{i,1} \cdot \varphi_{i,1} + \lambda_{i,2} \cdot \varphi_{i,2} + G_i^{/}, \tag{12}$$

де:

$$\varphi_{i,1} = \varsigma_1(x_i, y_i, z_i), \tag{13}$$

$$\varphi_{i,2} = \varsigma_2(x_i, y_i, z_i). \tag{14}$$

Після підстановки рівняння (12) до виразів (7) та (8) одержимо наступну систему рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} (s_j - s_i) \cdot \aleph_{i,j} + \wp_{si} = 0, \; (i = \overline{1,w};\; s_i = x_i, y_i, z_i), \tag{15}$$

де:

$$\wp_{si} = \lambda_{i,1} \cdot \Im_{si,1} + \lambda_{i,2} \cdot \Im_{si,2} = \lambda_{i,1} \cdot \partial\varphi_{i,1} / \partial s_i + \lambda_{i,2} \cdot \partial\varphi_{i,2} / \partial s_i =$$
$$= \lambda_{i,1} \cdot \partial\varsigma_1(x_i, y_i, z_i) / \partial s_i + \lambda_{i,2} \cdot \partial\varsigma_2(x_i, y_i, z_i) / \partial s_i, \tag{16}$$
$$(i = \overline{1,w};\; s_i = x_i, y_i, z_i);$$

$$\varsigma_1(x_i, y_i, z_i) = 0, \tag{17}$$

$$\varsigma_2(x_i, y_i, z_i) = 0. \tag{18}$$

Складаючи систему рівнянь типу (15) – (18) для усіх w вільних вузлів дискретного образу, та розв’язуючи відносно невідомих координат, одержимо форму дискретно представленої кривої лінії перетину поверхонь Ω та Ξ.

Однак, результат розв’язання може бути досить непередбачуваним і розміщення вузлів може бути нерівномірним. В такому випадку, в межах досліджуваної області слід встановити однакові довжини ланок між вільними вузлами просторової кривої. Цього можна досягти, наприклад, шляхом введення додаткових умовних функцій до рівнянь типу (12), по аналогії до [2], однак замість функцій кіл, слід у просторовому випадку вводити функції сфер, яких повинно бути по дві (з центрами у суміжних (i-1)-му та

(i+1)-му вузлах) для кожного довільного i-го вузла (окрім першого й останнього):

$$f_{i-1}(x_i, y_i, z_i) = (x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2 + (z_{i-1} - z_i)^2 - R^2 = 0, \qquad (19)$$

$$f_{i+1}(x_i, y_i, z_i) = (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2 - R^2 = 0. \qquad (20)$$

Тут R – обрана відстань між вільними вузлами, що відповідає радіусам сфер.

Після введення функцій (19) та (20) до функції Лагранжа $\Re_i$ вона набуде наступної форми для усіх, крім першого і останнього, вільних вузлів:

$$\Re_i = \sum_{j=1}^{n} \aleph_{i,j} \cdot \delta_{i,j}^2 + \lambda_{i,1} \cdot \varphi_{i,1} + \lambda_{i,2} \cdot \varphi_{i,2} + \lambda_{i,3} \cdot f_{i-1} + \lambda_{i,4} \cdot f_{i+1} + G_i^{/}. \qquad (21)$$

Після диференціювання одержимо наступну систему рівнянь рівноваги вузлів:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(s_j - s_i\right) \cdot \aleph_{i,j} + \wp_{si} = 0, \; (i = \overline{1+1, w-1}; \; s_i = x_i, y_i, z_i), \qquad (22)$$

де:

$$\begin{gathered} \wp_{si} = \lambda_{i,1} \cdot \Im_{si,1} + \lambda_{i,2} \cdot \Im_{si,2} + \lambda_{i,3} \cdot \Im_{si-1} + \lambda_{i,4} \cdot \Im_{si+1} = \\ = \lambda_{i,1} \cdot \partial\varphi_{i,1} / \partial s_i + \lambda_{i,2} \cdot \partial\varphi_{i,2} / \partial s_i + \lambda_{i,3} \cdot \partial f_{i-1} / \partial s_i + \lambda_{i,4} \cdot \partial f_{i+1} / \partial s_i = \\ = \lambda_{i,1} \cdot \frac{\partial\varphi_{i,1}}{\partial s_i} + \lambda_{i,2} \cdot \frac{\partial\varphi_{i,2}}{\partial s_i} - 2 \cdot \left[\lambda_{i,3} \cdot (s_{i-1} - s_i) + \lambda_{i,4} \cdot (s_{i+1} - s_i)\right], \\ (i = \overline{1+1, w-1}; \; s_i = x_i, y_i, z_i), \end{gathered} \qquad (23)$$

$$\varsigma_1(x_i, y_i, z_i) = 0, \qquad (24)$$

$$\varsigma_2(x_i, y_i, z_i) = 0, \qquad (25)$$

$$(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2 + (z_{i-1} - z_i)^2 - R^2 = 0, \qquad (26)$$

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2 - R^2 = 0. \qquad (27)$$

Для першого або останнього вузлів система рівноваги записуватиметься аналогічно, за виключенням відсутності відповідно членів $\lambda_{i,3}$ або $\lambda_{i,4}$ у виразі (23), а також з виключенням із системи рівнянь (26) або (27) відповідно.

Складаючи систему рівнянь типу (23) – (27) для усіх w вільних вузлів дискретного образу, та розв’язуючи відносно невідомих координат, одержимо форму дискретно представленої кривої лінії перетину поверхонь Ω та Ξ зі сталою заданою відстанню R між суміжними вільними вузлами.

Висновки. Продемонстрований підхід дозволяє досягти не лише сталих, але й довільних для кожної ланки відстаней між суміжними вузлами дискретного образу просторової кривої. В такому випадку необхідно встановлювати значення радіусів сфер різними для кожної ланки. Окрім того, даний підхід дає змогу вводити й інші, додаткові, умови до характеру дискретизації досліджуваної просторової кривої.

Література

1. Скочко В.І. Практичні аспекти дослідження та корегування сітчастих структур, побудованих шляхом геометричного формоутворення / В.І. Скочко // Сучасні проблеми архітектури та містобудування. – К. : КНУБА, 2018. – Вип. 51. – С. 498-506.
2. Скочко В.І. Моделювання дискретних образів плоских кривих з ланками однакової довжини / В.І. Скочко // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2018. – Вип. 12. – С. 132-137.
3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев; под ред. Г. Гроше, и В. Циглера. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 976 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОБРАЗОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Плоский В.А., Скочко В.И.

Построение пространственных кривых, образующихся путем пересечения двух поверхностей, представляет собой достаточно сложную и в то же время важную задачу. Поиск новых способов ее решения представляет большой интерес, поскольку они могут быть применены при проектировании отдельных фрагментов поверхностей сложных технических форм, работающих в сложных условиях эксплуатации, в том числе машин и механизмов.

Эта задача осложняется еще больше, если функции поверхностей, кривая пересечения которых исследуется, заданные в неявной форме. В этом случае может возникнуть не только проблема визуализации исследуемой кривой, но и собственно проблема построения самих поверхностей.

В данной работе предлагается подход к построению дискретных образов искомых пространственных кривых, основанный на использовании интегральных уравнений равновесия свободных узлов соответствующих образов, дополненных специальными условиями (уравнениями и коэффициентами) к форме функций Лагранжа. В такой постановке задача определения положений свободных узлов дискретного образа искомой кривой представляет собой поиск оптимального положения этих узлов при обязательном условии их одновременной принадлежности поверхностям обеих функций, которые пересекаются. Следовательно, решение данной *задачи может быть сведено к поиску условных экстремумов многих функций, каждая из которых будет описывать состояние статического равновесия свободных узлов дискретного образа, как идеализированной математической модели сетчатой (или стержневой) структуры, находящейся под действием функциональных нагрузок векторного поля сил. Само же поле этих сил будет представлять собой суперпозицию градиентных полей, функции скалярных потенциалов которых будут соответствовать функциям двух поверхностей, которые, пересекаясь, образуют искомую пространственную кривую.*

Ключевые слова: пространственная кривая, дискретный образ кривой.

MODELING OF DISCRETE IMAGES OF SPATIAL CURVES DEFINED BY THE INTERSECTION OF TWO SURFACES

Ploskyi V., Skochko V.

The constructing of spatial curves formed by the intersection of two surfaces is a rather complicated and at the same time an important task. The search for new ways to solve it has of great interest, since they can be applied in the designing of individual fragments of surfaces of complex technical forms operating in difficult conditions, including machines and mechanisms.

This task is further complicated if the functions of the surfaces whose intersection curve is investigated are given in an implicit form. In this case, there may be not only the problem of visualization of the curve under study, but also the actual problem of constructing the surfaces themselves.

This paper proposes an approach to constructing discrete images of the desired spatial curves, based on the use of integral equilibrium equations for free nods of corresponding images, supplemented by special conditions (equations and coefficients) to the form of Lagrange functions. In this formulation, the problem of determining the positions of free nodes of a discrete image of the desired curve is the search for the optimal position of these nodes with the obligatory condition of their simultaneous belonging to the surfaces of both functions that intersect. Consequently, the solution of this problem can be reduced to the search for conditional extremes of many functions, each of which will describe the static equilibrium state of free nodes of a discrete image, as an idealized mathematical model of a network (or rod) structure under the action of functional loads of the force vector field. The field of these forces will be a superposition of gradient fields, the functions of the scalar potentials of which will correspond to the functions of the two surfaces, which, intersecting, form the desired spatial curve.

Key words: spatial curve, discrete curve image.