УДК 514.18

ОСОБЛИВОСТІ СТРУКТУРИ БАГАТОВИМІРНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ОБ'ЄКТА ІЗ КОМПОНЕНТАМИ НИЖЧОЇ ВИМІРНОСТІ

Усенко В.Г., к.т.н.,
Погорілий Д.Ф., к.т.н.,
Усенко І.С., к.т.н.
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка (Україна)

В роботі розглядається будова багатовимірного геометричного об'єкта, що моделює систему залежностей багатьох змінних. До структури багатовиду входять В-сплайни (NURBS), що використовуються в системах автоматизованого проектування та для наукових досліджень із залученням геометричного моделювання. Застосування множин ліній у графічних моделях зумовлене необхідністю наочного відображення залежностей багатьох змінних на графічних моделях. Структурна будова багатовимірного геометричного об'єкта може використовуватись у розв'язанні складних задач оптимізації з багатьма критеріями у середовищах систем автоматизованого проектування. Показано особливості побудови структури геометричного багатовимірного об'єкта із використанням впорядкованої множини інших фігур меншої розмірності. Різна кількість параметрів у аналітичному виразі, що описує багатовимірний геометричний об'єкт відповідає множинам інших фігур меншої розмірності у паралельних просторах відповідної координатної системи. Багатовимірні об'єкти у складі геометричних фігур отримуються заданням впорядкованих множин дискретних значень параметрам моделі. Геометрична інтерпретація залежностей у формі ліній дає зручне наочне їх відображення на графічних моделях для розв'язання задач оптимізації. Представлено визначення множин ліній, інцидентних багатовимірним фігурам у різних просторах рівня.

Ключові слова: геометричне моделювання, багатовиди, В-сплайни (NURBS), залежності багатьох змінних.

Постановка проблеми. Достатньо актуальним є вивчення зв'язків, що визначаються різними чинниками між змінними величинами різних складних систем [1]. Ці зв'язки відображаються геометричними моделями об’єктів багатовимірного простору. У процесах дослідження систем з багатьма параметрами необхідно удосконалювати їх геометричні моделі для розв'язування різних задач оптимізації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При використанні геометричних моделей систем з багатьма параметрами завжди виникає необхідність їх аналітичного і графічного відображення. Вони апроксимуються іншими геометричними об'єктами, або їх частинами із стикуванням по загальних межах [1]. В науковій літературі вивчаються нерівномірні раціональні *B*-сплайни [2, 3], що в геометричному представленні інтерпретуються у формі кривих ліній. Ці одновимірні об'єкти використовуються для наукових досліджень із залученням геометричного моделювання, а різні системи автоматизованого проектування застосовують сплайни NURBS для обміну інформацією [4]. Раціональні *B*-сплайни (NURBS) однотипно задають геометричні об’єкти у просторі. [5].

Формулювання цілей статті. Метою роботи є дослідження структурної будови багатовимірного геометричного об'єкта, що моделює залежності багатьох змінних із застосуванням *B*-сплайнів.

Основна частина. Лінії NURBS є проекцією поліноміального *B*-сплайна 4-вимірного однорідного координатного простору на 3-вимірний простір, що аналітично утворюються шляхом ділення на величину однорідної координати [4]:

$$f(u_1)r_i = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,j}(u_1) r_i\, u_1 w_i}{\sum_{i=0}^{n-1} N_{i,j}(u_1) w_i} = r_i^1(u_1), \qquad (1)$$

де u_1 – параметр, $N_{i,j}(u_1)$ – складові вирази; w_i - вагові коефіцієнти для вузлів сплайна, $w_i \geq 0$; r_i – вектор вершин супроводжуючого лінію багатокутника. Величини $N_{i,j}(u)$ знаходяться з індикаторної функції [4]:

$$N_{i,j}(u) = \begin{cases} 1, я\ якщо \in [u_i,\, u_{i+1}] \\ 0, я\ якщо \notin [u_i,\, u_{i+1}] \end{cases}$$

та формули (2)

$$N_{i,k}(u) = \frac{N_{i,j-1} u(u - u_i)}{u_{i+j-1} - u_i} + \frac{N_{i+1,j-1} u(u_{i+j} - u)}{u_{i+j} - u_{i+1}},$$

де u – змінна величина; u_i, u_{i+j}, u_{i+j-1}, u_{i+1} – значення змінної у відповідних геометричних об'єктах нульової розмірності – вузлах. *B*-сплайн представляється виразом зі степінню k-1 на всіх інтервалах $u \in [u_i, u_{i+1}]$ [4]:

$$B(u)=\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,j}(u) r_i, \quad u\in[u_{\min},u_{\max}], \quad 2\le k\le n+1, \ u_i \le u_{i+1}, \tag{3}$$

де u_i – змінний параметр виразу, r_i – вектор вершин супроводжуючого багатокутника, n+1 – число адитивних складових частин, k-1 – степінь виразу.

Змінна u визначається в деякому інтервалі значень $u\in[u_{\min},u_{\max}]$. Для цього виразу (3) встановлено умову, за якою поділ нульового значення на нуль дорівнює нулеві. Має задовольнятись умова: для всього ряду значень аргументу u значення нормалізованих функцій бути невід'ємними: $N_{i,k}(u)\ge 0$.

Деякий багатовид $Б^b$ у просторі $П^n$ описує p залежностей з b аргументами, $n=p+b$. Багатовимірний об'єкт $Б^b$ утворюється іншими багатовидами $Б^1, Б^2, \ldots\ Б^{b-1}$ меншої розмірності. До моделі (2) одновимірного багатовиду $Б^1$ уведемо ще одну змінну u_2 та збільшимо розмірність відповідного геометричного об'єкта з утворенням поверхні:

$$\acute{A}_i^{(2)}(u_1,u_2)=\frac{\sum_{i=0}^{n+1} N_{i,j}^{(2)} u_2 r_i^{(1)} u_1 w_i^{(2)}}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,j}^{(2)} u_2 w_i^{(2)}}, i=0,\ldots,n\text{-}b+1, \tag{4}$$

$$u_2=const,\ldots,u_b=const,$$

де $N_{i,j}^{(2)}$– параметричні вирази, $r_i^{(1)}(u_1)$ – вираз (2) одновимірного об'єкта $Б^1$, $w_i^{(2)}$– вагові коефіцієнти у рівнянні поверхні $Б^2$. Вираз (4) може входити до рівняння багатовиду $Б^3$ (тіла), що має більшу розмірність. Множина об'єктів $Б^2$ утворює тіло $Б^3$ у $П^{n-b+3}$.

$$\acute{A}_i^{(3)}(u_1,\ldots,u_3)=\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,j}^{(3)} u_3 \acute{A}_i^{(2)}(u_1,u_2) w_i^{(3)}}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,j}^{(3)} u_3 w_i^{(3)}}. \tag{5}$$

Геометричні об'єкти $Б^{b-2}$ складаються з впорядкованої множини фігур $Б^{b-3}$ меншої розмірності, що утворюються зі зміною значення параметра u^{b-2}. Зокрема, різне число змінних у формулі об'єкта $Б^2$ відповідає множині $M_Б$ у паралельних просторах $П^{n-b+1}$ системи проекцій.

Узагальнене співвідношення для $Б^b$ записується:

$$\acute{A}^{(\mathrm{b})}(u_1,\ldots,u_h)=\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,j}^{(h)} u_k \acute{A}_i^{h-1}(u_1,u_2,\ldots,u_{k-1}) w_i^{(h)}}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,j}^{(h)} u_k w_i^{(h)}}, h=1,\ldots,n, \tag{6}$$

де

$$\acute{A}_i^{(k-1)}(u_1,...,u_{k-1}) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,j}^{(h-1)} u_{k-1} r_i^{h-2}(u_1,u_2,...,u_{k-2}) w_i^{(h-1)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,j}^{(h-1)} u_{k-1} w_i^{(h-1)}},\ h = 0,...,n-1, \tag{7}$$

$$u_b = const.$$

Таким чином, багатовид $Б^b$ утворює структуровану множину інших багатовидів $M_Б = \{Б^2, \ldots, Б^{b-1}\}$. Структурні компоненти $Б^b$, що входять до його складу, мають нижчу розмірність. Вираз (7), зокрема, описує множину багатовидів $Б^{b-1}$, зі сталими значеннями змінної величини $u_b = const$. Багатовиди $Б^{b-2}$ у складі кожної геометричної фігури $Б^{b-1}$ отримуються заданням множини дискретних значень змінній u_{k-1}. Тому рівняння (7) описує багатовид $Б^{b-1}$, що утворює геометричну фігуру $Б^b$ більшої розмірності, де

$$r_i^{(b-1)}(u_1,...,u_{b-1}) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,j}^{(h-1)} u_{b-1} r_i^{h-2}(u_1,...,u_{b-2}) w_i^{(h-1)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,j}^{(h-1)} u_{b-1} w_i^{(h-1)}},\ h = 0,...,n-1, \tag{8}$$

$$u_k = const, \ldots, u_{k-1} = const .$$

Залежність (8) є складовою частиною співвідношення (7) та виражає множину багатовимірних об’єктів $Б^{k-2}$ з відповідним значенням змінної величини u_{k-1}. Множина багатовидів $Б^{k-3}$ кожного з $Б^{k-2}$ визначається параметром $u_{k-2}{}^{h}$.

$$r_i^{(b-1)}(u_1,...,u_{b-1}) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,j}^{(h-1)} u_{b-1} r_i^{h-2}(u_1,...,u_{b-2}) w_i^{(h-1)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} N_{i,j}^{(h-1)} u_{b-1} w_i^{(h-1)}},\ h = 0,...,n-1, \tag{9}$$

$$u_k = const, \ldots, u_3 = const ,$$

де $N_{i,j}(u)$ – параметричні вирази багатовиду $Б^k$ та його утворюючих багатовидів, що відповідають змінній u_d, $d = 1,..b$. Ряд змінних величин u_d, $d=1,2,...,b$ відображається в координатній системі $0x_i$, $i=1, 2, ...,b$. Ряд значень змінної x_5 утворює множину багатовимірних фігур $\{\acute{A}_1^2, \acute{A}_2^2, \ldots, \acute{A}_{s_1}^2\}$ у паралельних просторах рівня $\{\ddot{I}_1^{\ 4}, \ddot{I}_2^{\ 4}, \ldots, \ddot{I}_{s_1}^{\ 4}\}$. До всіх s_1 геометричних об’єктів $Б^2$ входять одновимірні фігури $\{\acute{A}_1^1, \acute{A}_2^1, \ldots, \acute{A}_{s_2}^1\}$, що утворюються зі зміною параметра x_4. Геометричний об’єкт багатовимірного простору $Б^b$ утворюється m_1 фігурами $Б^{b-1}$, m_2 фігурами $Б^{b-2}$,…, m_{k-1} фігурами $Б^1$ – що є лініями та найбільш зручними об'єктами для наочного представлення на графічних моделях.

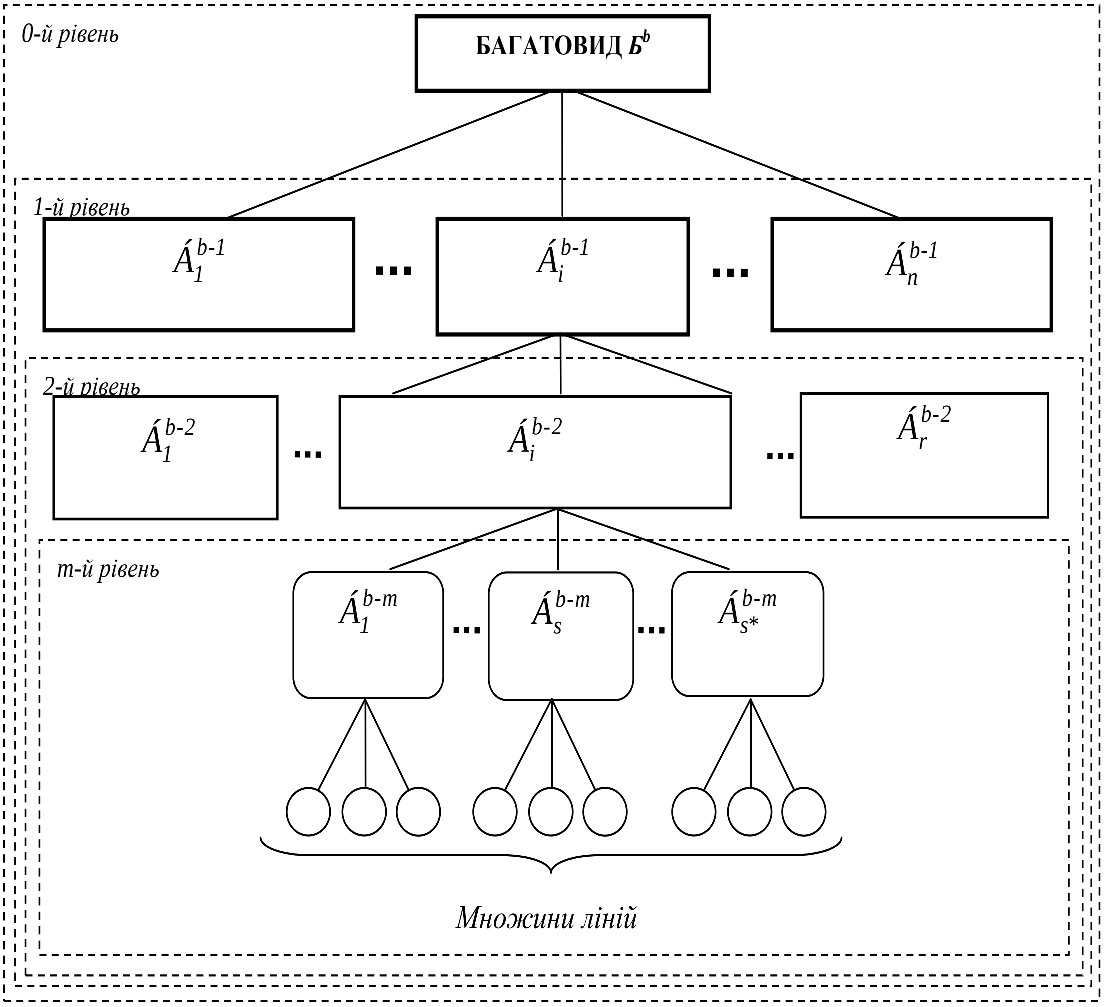

Рис. 1. Ієрархічна структура багатовиду $Б^b$

Число ліній об’єкта $Б^b$ дорівнює p. Лінії фігур $Б_1^2$, $Б_2^2$, .., $Б^2_m$ в просторах рівня $П_1$, .., $П_m$ позначаються:

$$S_{1,1}, S_{2,1}, \ldots, S_{m,1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

$$S_{1,3}, S_{2,3}, \ldots, S_{m,p}.$$

Ці лінії багатовимірного об’єкта $Б^b$ інцидентні відповідним просторам, що проходять через точки з певними координатами $x_1, \ldots. x_n$ у $П^n$. Аналогічно визначаються множини ліній, що належать багатовидам $Б^q$ в просторах рівня $П^{n-b+q}$.

Висновки. Опрацьовано узагальнену структуру багатовимірного геометричного об’єкта, що утворюється множиною багатовимірних фігур менших розмірностей, зокрема з використанням збільшення розмірності об'єктів на основі *В*-сплайнів. Розглянена структура геометричної моделі має своє практичне запровадження до САПР з метою вирішення оптимізаційних задач з багатьма параметрами.

Література

1. Гумен Н.С. Графо-аналитическое моделирование многопараметрических систем разрывными функциями / Н.С. Гумен // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 24. – К.: КИСИ, 1977. – С. 56 – 58.
2. Альберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
3. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
4. Роджерс Д. Математические основы машинной графики: пер. с англ. / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
5. Вірченко Г.А. Узагальнення структурно-параметричного підходу до геометричного моделювання об’єктів машинобудування: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Г.А. Вірченко. – Киев, 2011. – 367 с.

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ МНОГОМЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С КОМПОНЕНТАМИ НИЗШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

Усенко В.Г., Погорелый Д.Ф., Усенко И.С.

В работе рассматривается строение многомерного геометрического объекта, который моделирует систему зависимостей многих переменных. В структуру многообразия входят В-сплайны (NURBS), которые используются в системах автоматизированного проектирования и для научных исследований с использованием геометрического моделирования. Применение множеств линий в графических моделях предопределено необходимостью наглядного отображения зависимостей многих переменных на графических моделях. Структурное строение многомерного геометрического объекта может использоваться в решении сложных задач оптимизации со многими критериями в рабочих средах систем автоматизированного проектирования. Показаны особенности построения структуры геометрического многомерного объекта с использованием упорядоченного множества других фигур меньшей размерности. Разное количество параметров в аналитическом выражении, которое описывает многомерный геометрический объект отвечает множествам других фигур меньшей размерности в параллельных пространствах соответствующей координатной системы. Многомерные объекты в составе геометрических фигур получаются заданием упорядоченных множеств дискретных значений параметрам модели. Геометрическая интерпретация зависимостей в форме линий дает

удобное наглядное их отображение на графических моделях для решения задач оптимизации. Представлено определение множеств линий, инцидентных многомерным фигурам в разных пространствах уровня.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, многообразия, B-сплайны (NURBS), зависимости многих переменных.

FEATURES OF THE STRUCTURE OF MULTI-DIMENSIONAL GEOMETRIC OBJECT WITH COMPONENTS OF LOWER DIMENSION

Usenko V., Pogorely D., Usenko I.

The paper considers the creaturing of a multidimensional geometric object that simulates a system of dependencies of many variables. The variety structure includes B-splines (NURBS) used in automated design systems and for geometric modeling research. Application of sets of lines in graphic models is conditioned by the necessity of visual representation of dependencies of many variables on graphic models. The structural creaturing of a multidimensional geometric object can be used to solve complex optimization problems with many criteria in the environments of automated design systems. The features of construction of the structure of a geometric multidimensional object with the use of an ordered set of other figures of smaller dimension are shown. A different number of parameters in an analytical expression that describes a multidimensional geometric object corresponds to sets of other figures of smaller dimension in parallel spaces of the corresponding coordinate system. Multidimensional objects in geometric shapes are obtained by ordering ordered sets of discrete values for model parameters. The geometric interpretation of dependencies in the form of lines gives a convenient visual representation of them on graphic models for solving optimization problems. The definition of sets of lines incident to multidimensional figures in different level spaces is presented.

Keywords: geometric modeling, the variety, B-splines (NURBS), dependencies of many variables.