УДК 514.18

АНАЛІЗ НЕПЕРЕРВНИХ МЕТОДІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТА АПРОКСИМАЦІЇ ПЛОСКИХ КРИВИХ

Верещага В.М., д.т.н.,
Павленко О.М., к.т.н.,
Балюба І.Г., д.т.н.,
Пахаренко В.О., д.т.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького (Україна)

У статті наведено огляд безперервних методів інтерполяції та апроксимації, які призначені для дискретно представлених вихідних даних. Встановлено, що загальним недоліком є відсутність можливості локальної коригування результату геометричного моделювання без повторного обчислення всього виконання завдання. Для виконання умов проходження інтерполяційної кривої через заздалегідь задані точки, необхідне рішення системи лінійних рівнянь. Збільшення розміру відповідного визначника призводить до збільшення похибки рішення.

Треба зауважити, що в залежності від вихідної інформації і мети досліджень, можуть бути використані методи безперервної або дискретної інтерполяції та апроксимації. У даній статті проводиться аналіз безпосередньо безперервних методів дискретної інтерполяції та апроксимації.

Якщо розглянути сплайни, то параметри, що керують формою окремих його сегментів, визначаються точками, які є вихідними даними і визначають дискретно представлену криву. Сплайн-методи досліджуються в роботах Ю.С. Зав'ялова, Н.П. Корнійчука і Д. Роджерса, з яких відомо, що найважливішими характеристиками сплайна є його ступінь і дефект. Ступінь сплайна визначається найбільшим ступенем сегмента з тих сегментів, які складають сплайн. Дефектом сплайна є найменша похідна, в якій відбувається розрив, з усіх похідних на краях сегментів, які є складовими сплайна.

У прикладній геометрії найчастіше використовуються криві другого порядку завдяки розробленому геометричному апарату і високій технологічності їх застосування. Обмеженнями для їх використання в процесі інтерполяції є обов'язкове розташування вихідних даних відповідно до форми, визначеної кривої другого порядку. Хоча, в процесі апроксимації, це обмеження менш істотно,

але при цьому відтворення кривої має виконуватися з певною, заздалегідь заданій, похибкою.

Ключові слова: апроксимація, інтерполяція, плоскі криві, криві Безьє, сплайни.

Постановка проблеми. Серед неперервних параметричних кривих найбільш поширеними є криві Без'є, у яких параметр змінюється у межах від нуля до одиниці і визначає у векторній формі базисні функції, у якості яких, у більшості випадків, використовуються поліноми Бернштейна. Зміною положення вершин характеристичної ламаної кривої Без'є досягається необхідна її форма. На практиці використовуються лінійні, квадратичні, кубічні криві Без'є. криві більш високого степеню потребують пропорційного зростання обчислень, з'являється вада, виникнення неконтрольованої осциляції, що нанівець зводить ефект від підвищення степеню цієї кривої. Тому найбільш широко застосовуються криві Без'є третього степеню. А для конструювання складних форм, криві, що є характерними для цієї форми, треба подавати у сегментованому вигляді, з подальшим з'єднуванням окремі сегменти у сплайн Без'є. сегментування вихідних даних кривої дозволяє зменшити степінь кривої Без'є і окрім цього, при необхідності зміни форми кривої на окремій ділянці, немає потреби робити обчислення по всій кривій, досить його зробити тільки на ділянці, що потребує змін. Окрім звичайних, використовуються ще раціональні криві Без'є, які є узагальнюючими по відношенню до звичайних та мають можливість описувати по вихідних точках криві другого порядку. Підсумовуючи сказане відносно кривих Без'є, можна сказати, що основними їхніми вадами є обмеження за степенем, в результаті чого зменшуються можливості. Другою вадою є те, що вершини характеристичної ламаної, що не належать кінцям сегменту кривої, не знаходяться на кривій Без'є.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Якщо розглянути сплайни, то параметри, що керують формою окремих його сегментів, визначаються точками, які є вихідними даними і визначають дискретно подану криву. Сплайн-методи досліджуються у роботах [5, 6, 8, 9, 21], з яких відомо, що найважливішими характеристиками сплайну є його степінь та дефект. Степінь сплайну визначається найбільшим степенем сегменту з тих сегментів, що складають сплайн. Дефектом сплайну є найменша похідна, у якій відбувається розрив, з усіх похідних на краях сегментів, що є складовими сплайну.

Формулювання цілей статті. У прикладній геометрії, частіше за все, використовуються криві другого порядку [4, 7] завдяки досконало розробленому геометричному апарату та високій технологічності їхнього застосування. Обмеженнями для їхнього використання, у процесі інтерполяції, є обов'язкове розташування вихідних даних у відповідності з формою певної кривої другого порядку. Хоча, у процесі апроксимації, це обмеження є менш суттєвим, але при цьому, відтворення кривої повинно виконуватися з певною, наперед заданою, похибкою.

Основна частина. В залежності від многочленів, застосованих до побудови сегментів сплайну, визначається види сплайнів, які можуть бути локальними (фінітними), тобто ті, що мають ненульові значення на обмеженій, відносно вихідних даних, області визначення; або глобальні (ненульові на всій області визначення). Для різних видів сплайнів крайові умови можуть бути різними. Надамо характеристику деяким видам сплайнів [1, 3].

Сплайни Лагранжа будуються на множині опорних P_i точок, які належать множині R і подаються у вигляді поліноміальної параметричної кривої, сегментами якої є поліноми Лагранжа. Вади та переваги сплайну Лагранжа такі самі як і поліномів Лагранжа.

Сплайни Ньютона це інший запис сплайну Лагранжа, який є набагато зручнішим у разі необхідності додавання додаткової кількості опорних точок у порівнянні з вихідною їхньою кількістю. При цьому, у додаванні опорних точок немає потреби удруге обчислювати раніше визначені значення коефіцієнтів, що визначають умови проходження сплайну через точки первісного вихідного точкового ряду. Вади та переваги сплайну Ньютона залишаються такими ж як у сплайнів Лагранжа [9, 14, 17, 20].

Сплайни Ерміта призначені для побудови сплайнів, які враховують у вихідних даних значення похідних у кінцевих точках та забезпечуюють у цих точках необхідний порядок гладкості з'єднання суміжних сегментів [2, 3].

Кубічний сплайн задається у параметричній формі. Його друга похідна по параметру t буде лінійною функцією. Оскільки дефект кубічного сплайну дорівнює три, то другі похідні правого кінця попереднього сегменту та лівого кінця наступного, повинні бути рівними. З урахуванням цього, система рівнянь розв'язку буде мати стрічкову тридіагональну матрицю, що розв'язується за методом прогонки. Переваги та вади кубічного сплайну такі самі як у алгебраїчних поліномів Лагранжа [12, 13, 21].

B-сплайни відносяться до фінітних функцій, які у деякій визначеній області, що називається носієм, відрізняються від нуля, а поза її межами – дорівнюють нулю. Сплайн, що відповідає таким вимогам називається фундаментальним, або В-сплайном. Створюючи лінійні комбінації різних за степенем фундаментальних сплайнів, що визначені на одній і тій самій ділянці та на одних і тих самих вузлах, можна отримати будь-який сплайн з необхідним степенем. Такий підхід до утворення сплайну дає можливість локального керування його формою, а саме, виконуючи зміну коефіцієнтів сплайну на одній з ділянок, змінюється переобчислення тільки на цій ділянці, на інших ділянках нове обчислення не потрібне. При цьому гладкість з'єднання сплайну первісного та переобчисленого з суміжними сегментами, зберігається [11, 15, 16, 18].

У прикладній геометрії подальший розвиток теорії сплайнів отримано у роботах професора Бадаєва Ю.І. та його учнів [10]. У цих роботах пропонується використовувати для побудови сплайнів, сегментами яких є поліноми четвертого та п'ятого степенів, розробляється теорія їхнього застосування за умови відсутності осциляції, показано можливість та необхідність побудови сплайнів з метою управління кривиною кривої. Окрім цього, розроблено приклади та наведено схеми складання різних варіантів сплайнів на основі поліномів четвертого та п'ятого степенів, застосування яких дає змогу підвищити гладкість кривих і, побудованих з їхнім використанням, поверхонь.

Висновки. Підсумовуючи наведений огляд неперервних методів інтерполяції та апроксимації, які призначені для дискретно поданих вихідних даних, можна зробити такий висновок, що загальною вадою є відсутність можливості локального корегування результату геометричного моделювання без повторного обчислення усього розв'язку задачі. Для виконання умов проходження інтерполяційної кривої через наперед задані точки, необхідне розв'язання системи лінійних рівнянь. Збільшення розміру відповідного визначника призводить до збільшення похибки розв'язку.

Література

1. Верещага В.М., Кучеренко В.В., Павленко О.М. Спосіб розростання чарунок. *Матеріали ІІ-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності».* К.: Дія, 2013. Випуск 2. С. 13-17.
2. Верещага, В. М., Адоньєв Є.О., Павленко О.М. Спосіб згортання (розгортання) чарунок. *Сучасні проблеми моделювання.* 2016. Вип. №. 7. С. 32–38.
3. Верещага В.М., Конопацький Є.В., Павленко О.М. Визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою. Науковий журнал: комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво, 2015. № 20. С. 119-123

4. Глаголев Н.А. Проективная геометрия. Государственное издание «Высшая школа». Москва, 1963. С. 236-244.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352с.
6. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
7. Кованцов М.І. Проективна геометрія. «Вища школа». Київ, 1969. 410 с.
8. Ковальов Ю.М., Верещага В.М. Прикладна геометрія. Київ, 2012.
9. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. Ковтун А.М. Специальные сплайны из полиномов третьей, четвёртой и пятой степени в геометрическом моделировании: монографія. КНУБА. Київ, 2006. 25 с.
11. Павленко О.М. Застосування способу розростання чарунок для реконструкції дискретно представлених поверхонь. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2013. Т. 2. №. 16. С. 34-41.
12. Павленко О. М. Геометричне представлення властивостей метричного оператора трьох точок прямої. *Сучасні проблеми геометричного моделювання: зб. пр. XVII Міжнар. наук.-практ. конф.* МДПУ ім. Б. Хмельницького, Мелітополь, 2015. С. 77-81.
13. Павленко О. М. Згладжування як основний метод аналізу часових рядів. *Сучасні проблеми модернізації та структурних трансформацій економіки України і регіонів: матеріали Міжнар. наук.-практ. конф.* Запоріжжя, 2015. С. 78-85.
14. Павленко О. М., Баркалов С. І. Що таке Microsoft Windows Insider Program та чим вона може бути корисною для ІТ-фахівця та звичайного користувача? *Інформаційні технології в моделюванні: матеріали ІІІ Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених.* МНУ імені В.О. Сухомлинського, Миколаїв, 2018. С. 158-162.
15. Павленко О. М. Побудова великих проектів та основні властивості підпрограм в середовищі Object Pascal. *Інституціональне перетворення в суспільстві: світовий досвід і українська реальність: матеріали IX Міжнар. наук.-практ. конф.* МІДМУ «КПУ», Мелітополь, 2014. С. 53-56.
16. Павленко О. М. Умова розташування трьох точок на одній прямій у точковому БН-численні. *Соціально-економічний розвиток України: сучасність та перспективи: зб. наук. пр. учасників XV Міжнар. наук. конф. молодих учених та студентів.* Мелітополь, 2015. С. 64-71.

17. Павленко О. М. Застосування інформаційних технологій для реалізації методики аналізу еколого-економічної ефективності природоохоронної діяльності. *Екологія-філософія існування людства: зб. наук. пр. ІІ наук.-практ. конф.* Мелітополь, 2015. С. 23-27.
18. Павленко О.М. Умови встановлення кінцевих точок на мапі рельєфу. *Инновационные технологии в кооперативном образовательном процессе: материалы Междунар. заочной науч.-практ. конф., посвященной 40-летию Саранского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации.* Саранск, 2016. С. 310-316.
19. Павленко О. М. Основні принципи та стандарти побудови локальних обчислювальних мереж. *Кооперация в системе общественного воспроизводства.* 2013. Т. 2. С. 267-270.
20. Павленко О.М. Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН числення : дис. … канд. техн. наук : 05.01.01. Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького, Мелітополь, 2017. 180с.
21. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 350с.

АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНЫХ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Верещага В.М., Павленко А.М., Балюба И.Г., Пахаренко В.А.

В статье приведен обзор непрерывных методов интерполяции и аппроксимации, которые предназначены для дискретно представленных исходных данных. Установлено, что общим недостатком является отсутствие возможности локальной корректировки результата геометрического моделирования без повторного вычисления всего решения задачи. Для выполнения условий прохождения интерполяционной кривой через заранее заданные точки, необходимо решение системы линейных уравнений. Увеличение размера соответствующего определителя приводит к увеличению погрешности решения.

Надо заметить, что в зависимости от исходной информации и цели исследований, могут быть использованы методы непрерывной или дискретной интерполяции и аппроксимации. В данной статье *проводится анализ непосредственно непрерывных методов дискретной интерполяции и аппроксимации.*

Если рассмотреть сплайны, то параметры, управляющие формой отдельных его сегментов, определяются точками, которые являются исходными данными и определяют дискретно представленную кривую. Сплайн-методы исследуются в работах Ю.С. Завьялова, Н.П. Корнейчука и Д. Роджерса, из которых известно, что важнейшими характеристиками сплайна является его степень и дефект. Степень сплайна определяется наибольшей степенью сегмента с тех сегментов, которые составляют сплайн. Дефектом сплайна является наименьшая производная, в которой происходит разрыв, из всех производных на краях сегментов, которые являются составными сплайна.

В прикладной геометрии чаще всего используются кривые второго порядка благодаря разработанному геометрическому аппарату и высокой технологичности их применения. Ограничениями для их использования в процессе интерполяции является обязательное расположение исходных данных в соответствии с формой, определенной кривой второго порядка. Хотя, в процессе аппроксимации, это ограничение менее существенно, но при этом воспроизведение кривой должно выполняться с определенной, заранее заданной, погрешностью.

Ключевые слова: аппроксимация, интерполяция, плоские кривые, кривые Безье, сплайны.

ANALYSIS OF CONTINUOUS INTERPOLATION METHODS AND APPROXIMATION OF A FLAT CURVE

Vereshchaha V., Pavlenko O., Balyuba I., Pakharenko V.

The article provides an overview of continuous interpolation and approximation methods that are designed for discretely presented source data. It has been established that a common drawback is the lack of the possibility of local adjustment of the result of geometric modeling without re-computing the entire solution to the problem. To fulfill the conditions for the interpolation curve to pass through predetermined points, it is necessary to solve a system of linear equations. An increase in the size of the corresponding determinant leads to an increase in the error of the solution.

It should be noted that, depending on the initial information and the purpose of the research, methods of continuous or discrete interpolation *and approximation can be used. This article analyzes directly continuous methods of discrete interpolation and approximation.*

If we consider splines, then the parameters that control the shape of its individual segments are determined by the points that are the source data and determine the discretely presented curve. Spline methods are studied in the works of Yu.S. Zavyalova, N.P. Korneychuk and D. Rogers, of which it is known that the most important characteristics of a spline are its degree and defect. The degree of spline is determined by the highest degree of segment from the segments that make up the spline. A spline defect is the smallest derivative in which a discontinuity occurs, of all derivatives at the edges of segments that are spline components.

In applied geometry, second-order curves are most often used due to the developed geometric apparatus and the high adaptability of their application. The limitations for their use in the interpolation process is the obligatory arrangement of the source data in accordance with the shape defined by the second-order curve. Although, in the process of approximation, this restriction is less significant, but the reproduction of the curve should be performed with a certain, predetermined error.

Key words: approximation, interpolation, plane curves, Bezier curves, splines.