УДК 514.18

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ В ЦЕПОЧКЕ ФИЗИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Еремеев В.С., д.т.н.,
Самойлов В.В.
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого (Украина)

Проведён анализ колебательного процесса в линейной системе пружинных осцилляторов из нескольких тел сферической формы. Рассмотрен случай, когда один конец системы закреплён, а на противоположный конец действует сила. Причиной возникновения колебаний является первоначальное смещение одного или нескольких тел от равновесного состояния или внешняя нагрузка. Показано, что при достаточно большой амплитуде колебаний соседние тела могут приходить в контакт друг с другом, в результате чего скорости их перемещения скачкообразно изменяются в соответствие с законами сохранения кинетической энергии и сохранения импульсов. Математическая модель процесса представлена в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка. Решение задачи получено с использованием численного метода Рунге-Кутта. Для проведения вычислений разработана программа на алгоритмическом языке С++, которая позволяет построить фазовые портреты с учётом столкновения соседних элементов, а также определить временные зависимости отклонения и скорости этого отклонения каждого тела. Вариантные расчёты показали, что возможность использования математической или физической модели колебательного процесса определяется отношением максимальной амплитуды к диаметру шаров. Если это отношение намного меньше единицы, можно использовать модель математических осцилляторов. В противном случае необходимо применять модель физических осцилляторов. Адекватность физической модели сохраняется при любых начальных условиях и для любой внешней нагрузки. Величина скачков обычно повышается в направлении от первого к последнему осциллятору, к которому приложена сила. Перелом на графике временной зависимости отклонений шаров от положения равновесия при малой нагрузке обычно проявляется в слабой степени. В этом случае следует обращаться к анализу фазового портрета.

Ключевые слова: колебательный процесс, математическая модель, осциллятор, фазовый портрет, физический осциллятор.

Постановка проблемы. Колебания относятся к одной из самых распространенных групп физических явлений. Применение современной компьютерной техники и программного обеспечения позволяет в существенной степени расширить возможности использования численных методов при анализе колебательных процессов в различных технических приложениях. Математическая модель для исследования колебаний в линейной цепочке осцилляторов рассмотрена в работе [1], где колебательная система представлена в виде связанных друг с другом гармонических осцилляторов с нулевыми размерами без ограничения на амплитуды колебаний отдельных масс. В реальных процессах величина этих размеров сравнима с отклонением центров масс, что может привести к скачкообразному изменению скорости движения, поэтому анализ подобного явления имеет практический и теоретический интерес.

Анализ последних исследований и публикаций. Изучение колебаний в системе связанных осцилляторов проводилось во многих работах [1-4]. Простейший случай колебания математического маятника с массой m при наличии внешней нагрузки $F(t)$ описывается уравнением

$$mdv/dt = k(-y + y_0) + F(t), \qquad (1)$$

где k – коэффициент жёсткости пружины, v – скорость смещения центра масс, y – смещение центра масс, y – начальная координата при отсутствии нагрузки.

Представим систему из n пружинных осцилляторов в виде схемы, изображённой на рис. 1, где левый конец пружины первого осциллятора закреплен, а на крайний правый шарик действует сила $F(t)$.

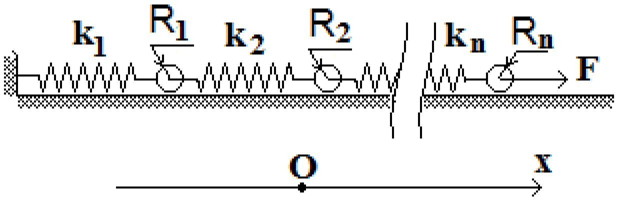


Рис.1. Механическая система пружинных осцилляторов

Обозначим смещение i-го шара радиуса R_i от положения равновесия и его скорость, соответственно, через y_i и $v_i=dy_i/dt$. На каждый шар, кроме последнего, действуют силы упругости со стороны соседних пружин. Смещение последнего шара определяется воздействием пружины слева и внешней нагрузки $F(t)$ справа. В дальнейшем будем различать два случая моделирования колебательного процесса:

– математическая модель системы математических осцилляторов с шарами нулевых размеров с неограниченными амплитудами колебаний,

– математическая модель системы физических осцилляторов с шарами конечных размеров, когда необходимо учитывать возможность упругого столкновения соседних шаров.

Обозначим координаты центров шаров в ненагруженном состоянии системы при отсутствии колебаний через $y_{10}, y_{20}, \ldots y_{n0}$, а начальные скорости – через $v_{10}, v_{20}, \ldots v_{n0}$. Причиной появления колебаний является внешняя сила $F(t)$, начальное смещение центров масс или начальная их скорость. Колебания в случае одинаковых масс m для математической модели системы математических осцилляторов с шарами нулевых размеров описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned}
&v_i = dy_i / dt, i = \overline{1..n};\\
&dv_1 / dt = k_1(-y_1 + y_{10}) + k_2(y_2 - y_1 + y_{10} - y_{20});\\
&dv_i / dt = k_i(y_{i-1} - y_i + y_{i0} - y_{i-1,0}) + k_{i+1}(y_{i+1} - y_i + y_{i0} - y_{i+1,0}), i = \overline{2..(n-1)};\\
&dv_n / dt = k_n(y_{n-1} - y_n + y_{n0} - y_{n-1,0}) + F(t),
\end{aligned} \qquad (2)$$

где под величинами k и $F(t)$ понимаются значения коэффициентов жесткости и силы, отнесённые к массе m.

Численное решение уравнений (2) получено в работах [1,3]. При достаточно большом n подобная задача решалась во многих работах по физике твёрдого тела с использованием динамической теории упругости применительно к непрерывной среде [2]. Математическая модель системы физических осцилляторов с шарами конечных размеров при малом n, когда необходимо учитывать возможность упругого столкновения соседних шаров, отсутствует, поэтому проведение исследований в этом направлении имеет практический интерес.

Формулировка целей статьи. Цель работы состоит в построении модели для проведения исследования колебаний в системе линейно связанных физических маятников. Дифференциальные уравнения (2) для решения задачи остаются прежними. Необходимо сформулировать дополнительные требования к изменению скорости движения тех шаров, которые претерпевают столкновения друг с другом. Согласно закону сохранения импульса столкновение двух одинаковых масс, перемещающихся вдоль прямой линии, приводит к изменению скоростей в соответствие с условиями:

$$1 + x_{i+1} - x_i = R_i + R_{i+1} \Rightarrow v_{inew} = v_{i+1}, v_{i+1new} = v_i, i = 1,\ldots,n-1. \qquad (3)$$

Уравнения (2)-(3) являются математической моделью колебательного процесса в системе линейно связанных физических маятников.

Основная часть. Решение уравнений (2)-(3) получено с использованием численного метода Рунге-Кутта, который описан в работе [1]. Для проведения расчётов разработана программа на языке C++, которая позволяет найти фазовый портрета каждого осциллятора, а также построить временную зависимость отклонения центра каждого шара и его скорости при следующих начальных условиях:

$y_1(t=0)=y_{100}, y_2(t=0)=y_{200}, \dots y_n(t=0)=y_{n00},$

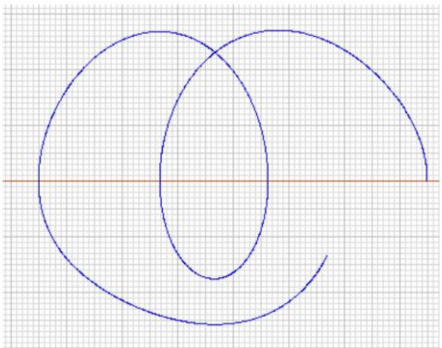
$v_1(t=0)=y_{100}, v_2(t=0)=v_{200}, \dots v_n(t=0)= v_{n00}.$

В качестве примера рассмотрим результаты расчёта колебаний в системе из трёх осцилляторов в двух случаях:

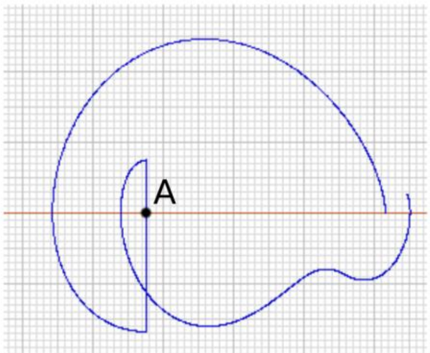
а) Колебания с малой амплитудой, которые описываются уравнениями (2) применительно к системе математических осцилляторов при следующих начальных условиях: $F(t)=0$, $m=1.0$, $k_1=1.0$, $k_2=1.5$, $k_3=1.0$, $y_{10}=1$, $y_{20}=2$, $y_{30}=3$, $y_1(t=0)=1.3$, $y_2(t=0)=1{,}7$, $y_3(t=0)=2.3$, $v_1(t=0)=0$, $v_2(t=0)=0$, $v_3(t=0)=0$.

б) Колебания, когда необходимо использовать модель физических маятников (2) - (3) с учётом возможности столкновения соседних шаров при выполнении следующих начальных условий: $F(t)=\cos(t)$, $m=1.0$, $R_1=0.3$, $R_2=0.3$, $R_3=0.3$, $k_1=1.0$, $k_2=1.5$, $k_3=1.0$, $y_{10}=1$, $y_{20}=2$, $y_{30}=3$, $y_1(t=0)=1.3$, $y_2(t=0)=1.7$, $y_3(t=0)=2.3$, $v_1(t=0)=0$, $v_2(t=0)=0$, $v_3(t=0)=0$.

На рис. 2 представлены фазовые портреты, определяющие зависимость скорости от перемещения третьего шара в системе из трёх осцилляторов. Один из них, рис.2а, относится к случаю математических, второй, рис.2,б, – к случаю физических осцилляторов.



(а)



(б)

Рис.2. Фазовые портреты третьего шара для системы из трёх математических (а) и физических (б) осцилляторов

Фазовый портрет третьего шара для системы из математических осцилляторов представляет собой непрерывную линию, рис. 2,а. В случае физических осцилляторов скорость третьего шара скачкообразно изменилась в результате столкновения с соседним вторым шаром в точке A от -1,26 до 0,57.

Анализ вариантных расчётов позволил выявить следующие закономерности колебательного процесса в системе осцилляторов:

а) Модель колебаний математических осцилляторов является адекватной в случае небольших амплитудах A_i при выполнении условия $|A_i|/(2Rj)<<1$ для всех i и j. Адекватность сохраняется при любых начальных условиях и для любой внешней нагрузки $|F(t)| /(k_n y_n)<<1$.

б) При достаточно больших амплитудах, когда параметры $|A_i|/(2Rj)$ и $|F(t)|/(k_n y_n)$ соизмеримы с единицей или больше её, необходимо применять модель физических осцилляторов, где учитывается возможность упругого столкновения соседних шаров.

Причиной скачкообразного изменения скорости при нулевых начальных условиях служит внешняя нагрузка. Величина скачков, как правило, повышается в направлении от первого к последнему осциллятору, к которому приложена сила $F(t)$. Перелом на графике временной зависимости отклонений шаров от положения равновесия при малой нагрузке обычно проявляется в слабой степени. В этом случае следует обращаться к анализу фазового портрета, рис.2б. С повышением внешней нагрузки факт соударения соседних шаров хорошо становится заметным не только на последнем элементе, но и в начальной части цепочки осцилляторов. На рис. 3 представлена временная зависимость отклонения третьеого шара в системе из девяти осцилляторов под действием силы $F(t)=3,0cos(2,0t)$. при нулевых начальных условиях. Радиусы всех шаров принимались равными 0.3, коэффициенты жёсткости пружин - 1.0.

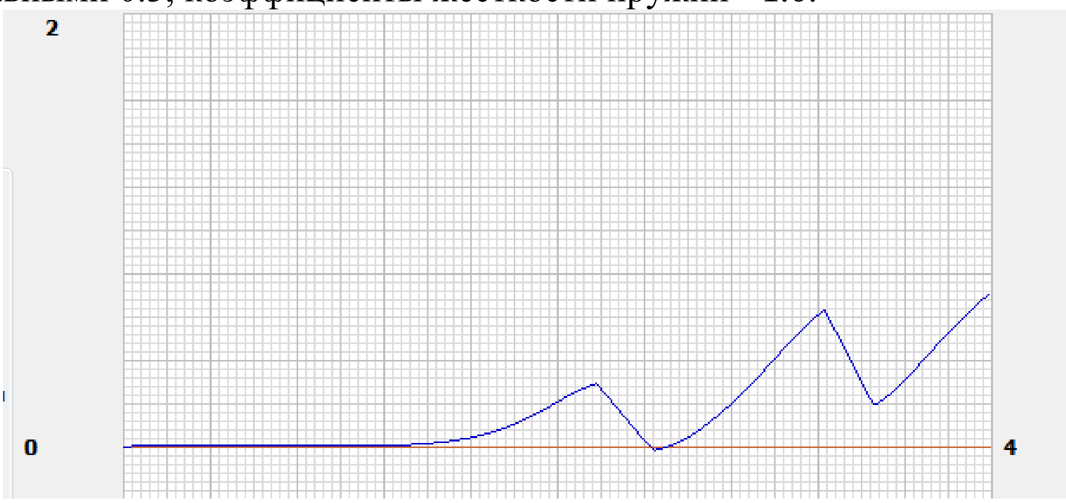


Рис.3. Временная зависимость отклонения третьего шара в системе из девяти осцилляторов под действием силы $F(t)=3,0cos(2,0t)$

Из рис. 3 видно, что за промежуток времени t=4,0 третий шар претерпевает 4 соударения, в результате чего характер временной зависимости изменяется. В этих точках соударяющиеся шары обмениваются своими скоростями и на фазовых портретах появляются разрывы типа скачка в точке A на рис. 2б.

Выводы. Разработанная модель колебаний в системе физических пружинных осцилляторов с конечными размерами шаров даёт возможность построить фазовые портреты и определить временные зависимости отклонений с учётом соударения соседних шаров. Столкновение шаров во многом снижает негативную роль резонансных явлений. Проведение анализа в этом направлении, а также обобщение модели на неупругие столкновения с включением в систему демпфирующих устройств позволит в существенной степени расширить круг задач, имеющих практический интерес.

Литература

1. Еремеев В.С., Кузьминов В.В., Попазов Н.В., Гулынина Е.В. Моделирование колебательных процессов в цепочке линейных осцилляторов. *Сборник научных докладов XXV Международной научно-практической конференции «Научные основы современного прогресса»*. Минеральные Воды, 2017. Том 1, № 3. С. 120–124.
2. Ruzzene M., Woodruff G., Guggenhe D. One Dimensional (1D) and Two-Dimensional (2D) Spring Mass Chains. *School of Aerospace Engineering, School of Mechanical Engineering,* Georgia Institute of Technology (Atlanta. June 21 25), 2010. P. 53.
3. Єремєєв В.С., Кузьминов В.В., Шаров С.В. Фазові траєкторії в системі зв'язаних лінійних осциляторів. *Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць Мелітопольського державного університету ім. Б. Хмельніцького.* Мелітополь: Вип.10. 2017. С. 59-64.
4. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001.416 С.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ У ЛАНЦЮЖКУ ФІЗИЧНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Єремєєв В.С., Самойлов В.В.

Проведено аналіз коливального процесу в лінійній системі пружинних осциляторів з декількох тіл сферичної форми. Розглянуто випадок, коли один кінець системи закріплений, а на протилежний кінець діє сила. Причиною виникнення коливань є початкове зміщення одного або декількох тіл від рівноважного стану або зовнішнє навантаження. Показано, що при досить великій амплітуді коливань сусідні тіла можуть приходити в контакт один з одним, в *результаті чого швидкості їх переміщення будуть стрибкоподібно змінюватися у відповідність з законами збереження кінетичної енергії і збереження імпульсів. Математична модель процесу представлена у вигляді системи диференціальних рівнянь другого порядку з довільними початковими умовами. Рішення завдання отримано з використанням чисельного методу Рунга-Кутта. Для проведення обчислень розроблена програма на алгоритмічній мові C ++, яка дозволяє побудувати фазові портрети з урахуванням зіткнення сусідніх елементів, а також визначити часові залежності відхилення і швидкості цього відхилення кожного тіла. Варіантні розрахунки показали, що можливість використання математичної або фізичної моделі коливального процесу визначається відношенням максимальної амплітуди до діаметру куль. Якщо це відношення набагато менше одиниці, можна використовувати модель математичних осциляторів. В іншому випадку необхідно застосовувати модель фізичних осциляторів. Адекватність фізичної моделі зберігається при будь-яких початкових умовах і для будь-якої зовнішньої навантаження. Величина стрибків зазвичай підвищується в напрямку від першого до останнього осцилятора, до якого прикладена сила. Перелом на графіку тимчасової залежності відхилень куль від положення рівноваги при малому навантаженні зазвичай проявляється в слабкому ступені. В цьому випадку слід звертатися до аналізу фазового портрета.*

Ключові слова: коливальний процес, математична модель, осцилятор, фазовий портрет, фізичний осцилятор.

MATHEMATICAL MODEL OF OSCILLATIONS IN THE CHAIN OF PHYSICAL OSCILLATORS

Eremeev V., Samoilov V.

The analysis of the oscillatory process in a linear system of spring oscillators from several spherical bodies is carried out. The case is considered when one end of the system is fixed, and force acts on the opposite end. The cause of oscillations is the initial displacement of one or more bodies from the equilibrium state or an external load. It is shown that at a sufficiently large amplitude of the oscillations, neighboring bodies can come into contact with each other, as a result of which their velocities will change stepwise in accordance with the laws of conservation of kinetic *energy and conservation of momenta. The mathematical model of the process is presented in the form of a system of second-order differential equations. The solution to the problem was obtained using the numerical Rung-Kutta method. For calculations, a program was developed in the C ++ algorithmic language, which allows you to build phase portraits taking into account the collision of neighboring elements, as well as determine the time dependences of the deviation and the speed of this deviation of each body. Variant calculations showed that the possibility of using a mathematical or physical model of the oscillatory process is determined by the ratio of the maximum amplitude to the diameter of the balls. If this ratio is much less than unity, you can use the model of mathematical oscillators. Otherwise, it is necessary to apply the model of physical oscillators. The adequacy of the physical model is maintained under any initial conditions and for any external load. The magnitude of the jumps usually increases in the direction from the first to the last oscillator, to which the force is applied. Fracture on the graph of the time dependence of the deviations of the balls from the equilibrium position at low load is usually manifested to a small extent. In this case, you should refer to the analysis of the phase portrait.*

Key words: oscillatory process, mathematical model, oscillator, phase portrait, physical oscillator.