УДК 514.18

ПОБУДОВА СПЕЦІАЛЬНИХ ЦІЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ВОДОПОСТАЧАННЯ

Орел Ю.М.,
Чернишев Д.О., д.т.н.,
Плоский В.О., д.т.н.,
Скочко В.І., к.т.н.
Київський національний університет будівництва і архітектури (*Україна*)

В процесі проектування зовнішніх систем водопостачання повинні бути враховані техніко-економічні аспекти їх зведення та подальшої експлуатації. Ці показники повинні бути максимально привабливими з фінансово-економічної точки зору. Відповідно, якщо мова йде про витрати на будівництво та обслуговування й подальший ремонт, то їх питомі значення повинні бути мінімізовані. Якщо ж мова йде про економічні характеристики, пов’язані з прогнозованими обсягами заощаджень, то вони повинні бути максимальними. При класичному підході, оптимізація системи водопостачання потребує побудови цільової функції, екстремуми якої будуть віднайдені та досліджені в процесі пошуку найкращих геометричних параметрів даної системи.

Якщо розглядати в якості цільової функції вартість будівництва й подальшої експлуатації усієї протяжності трубопроводів мережі водопостачання, як суми затрат на окремі її відрізки між вузлами розгалуження, то для визначення вартості кожного такого відрізку необхідно буде задатися питомими показниками відповідних витрат на одиницю довжини трубопроводу. Однак, такі питомі показники будуть різними на різних ділянках території, в залежності від складності рельєфу, наявності чи відсутності інших інженерних систем або споруд, а також від інженерно-геологічних умов.

З рештою, знадобиться побудувати спеціальну неперервну функцію розподілу питомих показників вартості робіт зі зведення й експлуатації ланок системи водопостачання, як дискретної геометричної моделі на площині – планарного або непланарного графа. На основі відповідної цільової функції й пропонується здійснювати процес формоутворення дискретної геометричної моделі шляхом виконання послідовних наближень при обчисленнях.

Ключові слова: системи водопостачання, дискретне геометричне моделювання, радіально-базисні функції.

Постановка проблеми. Скорочення витрат на зведення й подальшу експлуатацію мереж водопостачання є основним завданням інженерів-проектувальників відповідного профілю. Нажаль, більшість принципів проектування систем водопостачання передбачають застосування шаблонних типових підходів, основаних на стандартизації рішень та їх максимальному спрощенні. Причиною тому є простота цих рішень й зниження ймовірності допущення помилок при проектуванні та монтажі.

Однак, можливе застосування й нестандартних рішень, причому ще на етапі проектування мережі водопостачання. Це дає змогу значно зекономити, як на будівельно-монтажних роботах, так і на вартості робіт з подальшого обслуговування та ремонту даної мережі, оскільки в такому разі процес оптимізації системи здійснюється на етапі побудови її геометричної схеми й при прийнятті концептуальних і принципових рішень. При цьому процес оптимізації вимагає попереднього встановлення деякої цільової функції, спираючись на яку й будуть виконуватися усі можливі покращення. Якщо в якості основних параметрів, відносно якого будується цільова функція, виступають техніко-економічні характеристики будівництва й експлуатації системи водопостачання, то сама цільова функція повинна відображати розподіл відповідних питомих вартісних показників на різних ділянках прокладання трубопроводів. Це дасть змогу на основі математичних методів оптимізації розмістити усі елементи мережі таким чином, щоб досягти максимального економічного ефекту від усього життєвого циклу системи. В результаті, геометрична схема розміщення ланок мережі водопостачання повинна передбачати мінімальну вартість їх спорудження й обслуговування відповідно до скалярного поля питомих вартостей, яку й утворюватиме при візуалізації обрана цільова функція. Усе це вказує на необхідність пошуку максимально точного способу побудови цільової функції за відомими або оціночними показниками вартості робіт на окремих ділянках. З геометричної точки зору така задача представляє собою тривимірну інтерполяцію або апроксимацію (якщо це допускається заданим рівнем точності розрахунків) за наперед заданими дискретними даними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Один із найбільш обґрунтованих з наукової точки зору підхід до вирішення задачі оптимізації геометричних моделей систем водопостачання було представлено у працях [1] та [2], де пропонувалося здійснювати системний пошук координат вільних вузлів розгалуження трубопроводів мережі шляхом розв’язання рівнянь наступного виду:

$$\begin{cases} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} k_{i,j} - \sum_{j=1}^{n} (k_{i,j} \cdot x_j) = 0, \\ y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} k_{i,j} - \sum_{j=1}^{n} (k_{i,j} \cdot y_j) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де x_i та y_i (i = 2,3,…N) – координати вільних вузлів мережі; $k_{i,j}$ – коефіцієнти, що відображають питомі показники вартості будівництва й експлуатації окремих ланок на відповідних ділянках їх прокладання, й визначаються за формулою [2]:

$$k_{i,j} = F(x_i, x_j, y_i, y_j), \tag{2}$$

тут i-й та j-й вузли відповідають початку та кінцю відповідної ланки моделі мережі.

Окрім того, у [2] було зазначено, що в найпростішому випадку, значення коефіцієнту $k_{i,j}$ може розраховуватися, як функціонал від деякої функції $f(x,y)$ (яка визначає поле питомих показників вартості будівництва, ремонту й експлуатації трубопроводів на площині) й, зокрема, як сума функцій $f(x,y)$ від координат i-го та j-го вузлів:

$$F(x_i, x_j, y_i, y_j) = f(x_i, y_i) + f(x_j, y_j). \tag{3}$$

В якості функції $f(x,y)$ пропонувалося розглядати суми з M інтерполяційних або апроксимаційних радіально-базисних функцій [3], зокрема зворотних квадратичних або мультиквадратичних функцій.

Формулювання цілей статті. Продемонструвати підходи до формування інтерполяційних та апроксимаційних базисних функцій, які слугуватимуть цільовими функціями для подальшої оптимізації геометричних моделей систем водопостачання.

Основна частина. На сьогоднішній день радіально-базисні функції формують один із головних напрямків досліджень у галузі чисельного аналізу. Зокрема, завдяки специфіці характеру їх візуального представлення та функціональної поведінки, вони набули широкого ужитку в дослідженнях та моделюванні штучних нейронних мереж [4] та штучного інтелекту в цілому.

Великою перевагою інтерполювання на основі радіально-базисних функцій є можливість відносно легкого управління їх характером у областях розміщення опорних (базових) точок інтерполяції.

Базуючись на дослідженнях, присвячених застосуванню радіально-базисних функцій у моделюванні нейромереж [4, 8, 13] та сисематизації нерегулярних даних у цілому [5 – 15], продемонструємо математичні основи здійснення тривимірної інтерполяції для подальшої оптимізації двовимірної геометричної моделі мережі водопостачання у формі планарного або непланарного графа.

Загалом, задачу інтерполяції у тривимірному просторі можна сформулювати наступним чином: для заданої множини з N точок $\{\mathbf{x}_i \in \Re^m \mid i=1,2,\ldots,N;\ m=3\}$ та відповідної множини з N дійсних чисел $\{d_i \in \Re^1 \mid i=1,2,\ldots,N\}$ знайти функцію $f : \Re^N \to \Re^1$, яка задовільнятиме наступній інтерполяційній умові:

$$f(\mathbf{x}_i) = d_i, (i = 1,2,\ldots,N). \tag{4}$$

Для визначеної таким чином задачі інтерполяційна поверхня (тобто функція скалярного поля f) має проходити через усю множину N базових точок, що міститимуть інформацію про питомі вартісні показники зведення та експлуатації елементів системи водопостачання d_i. Застосування методу радіально-базисних функцій [4] зводитиметься до підбору функції f, що матиме вигляд:

$$f(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \phi_i, \tag{5}$$

де

$$\phi_i = \varsigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) = \varsigma(r_i). \tag{6}$$

У формулах (5) та (6): w_i – вагові коефіцієнти, які мають на меті забезпечення проходження інтерполяційної поверхні через усі базові точки; $\{\phi_i \mid i=1,2,\ldots,N\}$ – множина з N нелінійних (й при необхідності довільних) радіально-базисних функцій; $\mathbf{x} = (x, y)$ – координати досліджуваної точки на площині; $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ – наперед задані координати точок із відомими показниками питомих вартостей d_i, які обираються в якості умовних центрів радіально-базисних функцій; $\|\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_i\ \| = r_i$ – Евклідова норма (хоча в загальному випадку й не обов’язково Евклідова).

Прирівнюючи праві складові тотожностей (4) та (5), та складаючи систему з одержаних рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \phi_{1,i} = d_1, \\ \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \phi_{2,i} = d_2, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \phi_{j,i} = d_j, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \phi_{N-1,i} = d_{N-1}, \\ \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \phi_{N,i} = d_N, \end{cases} \tag{7}$$

де функції $\phi_{j,i}$ у кожному рівнянні матимуть таку форму:

$$\phi_{j,i} = \varsigma(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) = \varsigma(r_{j,i}), (i, j) = 1,2,\ldots,N. \tag{8}$$

Систему (7) можна записати у матричній формі наступним чином:

$$\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{d}. \tag{9}$$

тут **w** – вектор вагових коефіцієнтів, розмірності N, що має такий вид:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{Bmatrix}; \tag{10}$$

d – вектор питомих вартостей, розмірності N, що має вигляд:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{Bmatrix}; \tag{11}$$

Ф – матриця інтерполяційних складових, розмірності $N \times N$, яка містить радіально-базисні функції $\phi_{j,i}$,:

$$\mathbf{\Phi} = \{\phi_{j,i} \mid (i, j) = 1,2,\ldots,N\}, \tag{12}$$

та, інакше кажучи, має такий вигляд:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,N} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N,1} & \phi_{N,2} & \cdots & \phi_{N,N} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Розв’язання системи (9) можна записати у наступній формі:

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{d}. \tag{14}$$

В результаті будуть знайдені вагові коефіцієнти w_i, використовуючи які можна побудувати єдину інтерполяційну радіально-базисну функцію (5).

Для застосування продемонстрованого підходу рекомендується застосовувати одну із найбільш універсальних та добре досліджених радіально-базисних функцій, зокрема мультиквадратичної (15), зворотної квадратичної (16) або зворотної мультиквадратичної функкій у наступній модифікованій формі:

$$\phi_{j,i} = a_i \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot r_{j,i}^2}, (\varepsilon > 0; a_i \geq 0; r_{j,i} \in \Re); \tag{15}$$

$$\phi_{j,i} = a_i \Big/ (1 + \varepsilon^2 \cdot r_{j,i}^2), (\varepsilon > 0; a_i \geq 0; r_{j,i} \in \Re); \tag{16}$$

$$\phi_{j,i} = a_i \Big/ \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot r_{j,i}^2}, (\varepsilon > 0; a_i \geq 0; r_{j,i} \in \Re). \tag{17}$$

Даний інтерполяційний підхід є точним, але може вимагати витрат значних обчислювальних потужностей комп’ютерного обладнання. В результаті цього ітераційний процес розв'язання системи (1) може бути значно ускладнений, оскільки його реалізація потребує написання додаткових розрахункових алгоритмів.

Відтак, доцільно розглянути й інший – апроксимаційний – підхід, що може передбачати практично будь-яку точність визначення показників питомих витрат на будівництво й експлуатацію трубопроводів мережі водопостачання при її оптимізації.

Для цього пропонується замість розв'язання системи рівнянь типу (7) одразу задавати апроксимаційні поверхні (або скалярні поля *f*) у формі наступних середньозважених радіально-базисних зворотних мультиквадратичних модифікованих функцій:

$$f(x_i, y_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i \cdot [a_i/(r_i + \varepsilon)]}{\sum_{i=1}^{N} [a_i/(r_i + \varepsilon)]}, (\varepsilon > 0; a_i \geq 0; d_i \geq 0; r_i \in \Re), \qquad (18)$$

$$f(x_i, y_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i \cdot [a_i/(r_i^k + \varepsilon)]}{\sum_{i=1}^{N} [a_i/(r_i^k + \varepsilon)]}, (k > 0; \varepsilon > 0; a_i \geq 0; d_i \geq 0; r_i \in \Re). \qquad (19)$$

Функції (18) властивий досить плавний характер викривлення і вона являється частковим випадком функції (19), коли параметр $k = 1$. Однак, зі зростанням параметру k, характер функції (19) стає більш різким у місцях переходу між значеннями даної функції, близькими до двох різних параметрів a_i та a_j ($[(i,j) = 1,2,\ldots,N] \wedge [i \neq j]$); $\wedge$ – кон'юнкція.

Очевидно, що чим нижчими є значення параметру ε, тим вища точність застосування апроксимаційної функції, й тим ближчим процес апроксимації стає до процесу інтерполяції. Зокрема, при $\varepsilon \to 0$ функції (18) та (19) стають інтерполяційними. Однак, в такому разі значення даної функції є невизначеними у точках розміщення базових вузлів, оскільки у цих точках відбувається операція ділення на 0.

Висновки. Продемонстровані підходи до побудови цільових функцій техніко-економічних показників систем водопостачання дозволяють відносно просто описувати розподіл їх питомих вартісних показників у формі поверхонь або скалярних полів, утворених на основі радіально-базисних функцій. Користуючись даними полями можна здійснювати оптимізацію геометричних моделей відповідних систем ще на етапі проектування. Це дає змогу в подальшому уникати перевитрат матеріальних, фінансовим та трудових ресурсів під час будівництва, обслуговування, ремонту та експлуатації мереж.

У подальших дослідженнях буде приділено більше уваги впливу параметрів функцій (18) і (19) на характер окремих ділянок поля.

Література

1. Скочко В.І., Плоский В.О., Гегер А.Д., Скочко Л.О. Скорочення тепловтрат систем теплопостачання шляхом оптимізації їх геометричних моделей при проектуванні. *Наук. тех. журн.: Енерго-ефективність в буд. та арх.*, 2018. Вип. 10. С. 15-28.
2. Орел Ю.М., Чернишев Д.О., Скочко В.І., Кожедуб С.А. Дискретне моделювання оптимальних параметрів зовнішніх мереж водопостачання засобами прикладної геометрії. *International Scientific-Practical Conference of young scientists "Build-Master-Class-2019": Conference Proceedings.* 2019. С. 288-289.
3. Iske A. Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol., Torino, 2003. № 61 (3). P. 247–284.
4. Haykin S.: Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Upper Saddle River. New Jersey, 2006, 1105p.
5. Ball K., Sivakumar N., and Ward J.D., On the sensitivity of radial basis interpolation to minimal data separation distance, Constr. Approx., 8 (1992), 401–426.
6. Baxter B. J. C., Norm estimates for inverses of distance matrices, in Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II, T. Lyche and L. Schumaker (eds.), Academic Press, New York, 1992, P. 9–18.
7. Baxter B.J.C., Preconditioned conjugate gradients, radial basis functions, and Toeplitz matrices, Comput. Math. Appl. 43 (2002), P. 305–318.
8. Beatson R.K., Cherrie J.B., and Mouat C.T., Fast fitting of radial basis functions: methods based on preconditioned GMRES iteration, Adv. Comput. Math. 11 (1999), P. 253–270.
9. Driscoll T.A. and Fornberg B., Interpolation in the limit of increasingly flat radial basis functions, Comput. Math. Appl. 43 (2002), P.413–422.
10. Dyn N., Interpolation and approximation by radial and related functions, in Approximation Theory VI, C. Chui, L. Schumaker, and J. Ward (eds.), Academic Press, New York, 1989, P. 211–234.
11. Hon Y.C. and Schaback R., On nonsymmetric collocation by radial basis functions, Appl. Math. Comput. 119 (2001), P. 177–186.
12. Rudin W., Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973, 350p.
13. Sarra S.A., Accurate derivative approximations using radial basis functions, preprint, Marshall University, 2003. 245p.
14. Schaback R., Multivariate interpolation by polynomials and radial basis functions, preprint, Universit¨at G¨ottingen, 2002. 180p.
15. Wendland H., Sobolev-type error estimates for interpolation by radial basis functions, in Surface Fitting and Multiresolution Methods, A. Le M´ehaut´e, C. Rabut, and L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt

University Press, Nashville TN, 1997, 337–344.

ПОСТРОЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Орел Ю.М., Чернишев Д.О., Плоский В.А., Скочко В.И.

В процессе проектирования наружных систем водоснабжения должны быть учтены технико-экономические аспекты их возведения и последующей эксплуатации. Эти показатели должны быть максимально привлекательными с финансово-экономической точки зрения. Соответственно, если речь идет о расходах на строительство и обслуживание с последующим ремонтом, то их удельные значения должны быть минимизированы. Если же речь идет об экономических характеристиках, связанных с прогнозируемыми объемами сбережений, то они должны быть максимальными. При классическом подходе, оптимизация системы водоснабжения требует построения целевой функции, экстремумы которой будут найдены и исследованы в процессе поиска лучших геометрических параметров данной системы.

Если рассматривать в качестве целевой функции стоимость строительства и дальнейшей эксплуатации всей протяженности трубопроводов сети водоснабжения, как сумму затрат на отдельные ее отрезки между узлами разветвления, то для определения стоимости каждого такого отрезка необходимо будет задаться удельным показателям соответствующих затрат на единицу длины трубопровода. Однако, такие удельные показатели будут разными на разных участках территории, в зависимости от сложности рельефа, наличия или отсутствия других инженерных систем или сооружений, а также от инженерно-геологических условий.

В конечном итоге, понадобится построить специальную непрерывную функцию распределения удельных показателей стоимости работ по возведению и эксплуатации звеньев системы водоснабжения, как дискретной геометрической модели на плоскости – планарного или непланарного графа. На основе соответствующей целевой функции и предлагается осуществлять процесс формообразования дискретной геометрической модели путем выполнения последовательных приближений при вычислениях.

Ключевые слова: системы водоснабжения, дискретное геометрическое моделирование, радиально-базисные функции.

CONSTRUCTION OF SPECIAL OBJECTIVE FUNCTIONS IN THE OPTIMIZATION OF GEOMETRIC MODELS OF WATER SUPPLY SYSTEMS

Orel Yu., Chernyshev D., Ploskyi V., Skochko V.

In the process of designing external water supply systems, the technical and economic aspects of their construction and subsequent operation should be taken into account. These indicators should be as attractive as possible from a financial and economic point of view. Accordingly, when it comes to the costs of construction and maintenance with subsequent repairs, their specific values should be minimized. If we are talking about economic characteristics associated with projected volumes of savings, then they should be maximum. In the classical approach, the optimization of the water supply system requires the construction of an objective function, the extrema of which will be found and investigated in the search for the best geometric parameters of this system.

If we consider as the objective function the cost of construction and further operation of the entire length of the pipelines of the water supply network, as the sum of the costs for its individual sections between the branch nodes, then to determine the cost of each such section, it will be necessary to set specific indicators of the corresponding costs per unit length of the pipeline. However, such specific indicators will be different in different parts of the territory, depending on the complexity of the terrain, the presence or absence of other engineering systems or structures, as well as on geotechnical conditions.

Ultimately, it will be necessary to construct a special continuous distribution function for specific indicators of the cost of the construction and operation of the links of the water supply system as a discrete geometric model on a plane — a planar or non-planar graph. Based on the corresponding objective function, it is proposed to carry out the process of forming a discrete geometric model by performing successive approximations in the calculations.

Keywords: water supply systems, discrete geometric modeling, radial basis functions.