UDC 514.74

APPROXIMATION BY RATIONAL SURFASES OF BEZIER AND NURBS-SURFASES

Badayev Yu. I., Doctor of Technical Sciences,
Lagodina L.P., Ph.D.
National Technical University of Ukraine «KPI name Igor Sikorsky» (Kyiv, Ukraine)

Relevance. Rational Bezier surfases and NURBS-surfases are widely used in modeling curviliniar objects due to the great flexibility and efficiency of the method. Therefore, it is sense to develop an approximation method by these surfases

Method. The work is devoted to the development of a new approach to approximation surfases, represented by a set of discret points. The analytical description of the desired surfases is implemented a rational Bezier surfases and a NURBS-surfases. To solve this problem, two approaches are propozed. The first approach is that the weights of the control points are set in advance and then the coordinates of the points of the approximation rational Bezier surfase as well as the NURBS-surfase are calculated. The second approach is that the coordinates of the control points are set in advance and then the weights of the control points of Bezier surfase as well as the NURBS-surfase are calculated. At the beginning of the process, are set only coordinates, but also parameters are set to a discret points, that is, each points has the following definition: T(x,y,z,u,v) in the three-dimensional space, where u,v – parameters. To solve the approximation problem, the least squares method is used. In the beginning, a sum of squared functional of the term of the differences between the analytic formula of the surface and the coordinate of the given point is created. The optimization problem of minimizing this functional is solved. For this, a system of linear equations is created, each equation of which is derivatev of the functional with respect to a given parameter and equated to zero. In the first approach, the desired parameters are coordinates of points, and the second weights of given.

Results. Tho methods of approximation of a point series by rational Bezier surfase were developed.

Conclusions. The test cases carried out of using computer programs fnd calculation of results confirm the validity of the proposed methods.

Keywords: approximation, uftional Bezier surfaces, NURBS-surfaces.

Formulation of the problem. To date, when constructing surfases in various automation systems, rational Bezier surfases and NURBS surfases are often used. It is a very flexible tool that allows you to create smooth splines of any order, shapes, and also easy to carry out local control over the surfase.

The surfase is represented in a parametric form and for controlling the shape of the surfase using control points and weight coefficients of nodes [1].

Rational nonuniform Bezier surfases refer to NURBS and are based on Bernstein's basic functions. The practical application of NURBS surfases is very diverse, for example: they are often used in computer graphics to draw smooth surfases that accurately describe the shape of the three-dimensional objects depicted in drawings, for the task of the surfases of building the surfaces of rotation, as well as the simulation of the trajectories of motion on surfase and space in the course of time.The parametric representation of the surfases allows it to be used in multidimensional spaces. Interpolation of these surfases enables them to be used in modeling objects with complex geometric shapes.

Analysis of recent publications. In work [1] on page 135 offers an algorithm for interpolation with NURBS curves, which is based on the fact that control points in the second stage are projected onto a curve and these new points are taken as new control points. In practice, such an algorithm is difficult to implement and achieves precise results. In the works [2] and [3] it does not specify how to calculate the weight of control points, which prevents the construction of an algorithm for interpolation.

The purpose of the article. The purpose of the article is to develop real algorithms for approximation with rational Bezier surfases and NURBS surfases for a given point series.

Main part.

The Rational surface of Besier is determined by a formula [1]:

$$r = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij}} \quad , \tag{1}$$

where

$$B_i^n(v) = \sum_{i=0}^{n} K_i^n v^i (1-v)^{(n-i)} \quad ;$$

$$B_j^m(\mathrm{u}) = \sum_{j=0}^{m} K_j^m u^j (1-u)^{(\mathrm{m}-j)} \quad ;$$

$K_i^n = \dfrac{n!}{i!(\mathrm{n}-\mathrm{i})!}$ - binomial coefficient;

p – control points of surface;

w – weight control points of surface.

The NURBS-surfase is determinated by the formula:

$$r = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{ik}^{n}(v)\,\mathrm{N}_{jp}^{m}(u) w_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{ik}^{n}(v)\,\mathrm{N}_{jp}^{m}(u) w_{ij}} \;; \qquad (2)$$

where – $N_{ik}(u)$ normalized basic power function degrees k.

Let given point series R_l , l=1,2,3,… P. Acceptable for each point specific parameters u_l, v_l. We will have a point series R_l (x_l ,y_l ,z_l,u_l,v_l). We will approximate the given point series of the surfase (1). To do this we will create an equation system:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij}} - R_l\right] = 0 \;, \; i=0,1,\ldots n;\; j=0,1,\ldots m. \qquad (3)$$

or

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} p_{ij} - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} R_l\right] = 0 \;, \qquad (4)$$

$$i=0,1,\ldots n;\; j=0,1,\ldots m.$$

As an example, we take the rational Bezier surfase built by curves of the second degree:

$B^2{}_0$ =1.0,

$B^2{}_1$ =2.0,

$B^2{}_2$ =1.0.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} &= w_{00}(1-v)^2[w_{00}(1-u)^2 + 2w_{01}(1-u)u + w_{02}u^2] \\ &+ \; 2w_{10}(1-v)v[w_{10}(1-u)^2 + 2w_{11}(1-u)u + w_{12}u^2] \\ &+ w_{20}v^2[w_{20}(1-u)^2 + 2w_{21}(1-u)u + w_{22}u^2].\end{aligned} \qquad (5)$$

for

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(v) B_j^m(u) w_{ij} p_{ij} \;.$$

will be the same as (5), but instead of w_{ij} you need to set (p_{ij} w_{ij}).

Using (5) we compose the functional:

$$F=\sum_{l=0}^{k}\ \{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\ [\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}p_{ij}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}}-R_l]^2=\min, \mathrm{l}=0,1,2,\ldots\mathrm{k}.;$$

(6)

$$F=\sum_{l=0}^{k}\ \{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\ [\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}p_{ij}-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}R_l]^2=\min,$$

l=0,1,2,...k.

And take derivatives from it:

$$\frac{dF}{dp_{ij}}=\sum_{l=0}^{k}2\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\ [\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}p_{ij}-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}R_l]\}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}=0.$$

$$\frac{dF}{dw_{ij}}=\sum_{l=0}^{k}2\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\ [\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}p_{ij}-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)w_{ij}R_l]\}$$

$$\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)p_{ij}-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(v)B_j^m(u)p_{ij}R_l\}=0.$$

were l=0,1,2,…k.

Thus, we have a system of linear equations for k + 1 equations.

Solving them, we find all p_{ij} and w_{ij}.

Analyzing (1) and (2), we see that the NURBS- surface differs only in that N^n_{ik} is taken instead of B^n_i.

Conclusions: Two methods of approximation of point row are worked out by the rational surfaces of Bezier and NURBS - surfaces.

Test examples by means of the computer program, that validity offer methods, are conducted.

Referenses

1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М: Физматлит, 2002. 272 с.
2. Юдин О.А. Интерполяция NURBS-кривыми в многомерном пространстве. Наукові ВНТУ, 2008. № 4, С.1-4.
3. Юдин О.А. Расширение интерполяции по Лагранжу с использованием кривых Безье: Нові технології, 2005. №3(9). С.117-120.
4. David F. Rodgers,Rae A. Earnshav(editor) «State of the Art in Computer Graphics»-Visualization and Modeling», 1991. P. 225-269.

5. Кветний Р.Н. Методи комп’ютерних обчислень. Вінниця: ВДТУ, 2001. 148 с.
6. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. М:Бином. Лаборатория знаний, 2007. 423 с.
7. Бадаєв Ю.І., Блиндарук А.О. Керування кривиною NURBS-кривої 3-го порядку за допомогою ваги контрольних точок. Водний транспорт: зб. наукових праць Київської державної академії водного транспорту. 2014. №3(21). С.103-105.
8. Бадаєв Ю.І., Блиндарук А.О. Можливості локальної модифікації гладкої NURBS-кривої. *Современные информационные и электронные технологии: XV Международная научно-практическая конференция*: научн. труды. Одесса, 2014. Т.1. С. 26-27.
9. Бадаєв Ю.І., Блиндарук А.О. Комп’ютерна реалізація проектування криволінійних обводів методом NURBS-технологій вищих порядків. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2014. С.3-6.

АППРОКСИМАЦІЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПОВЕРХНЯМИ БЕЗЬЄ І NURBS-ПОВЕРХНЯМИ

Бадаєв Ю.І. , Лагодіна Л.П.

Раціональні поверхні Безьє і NURBS-поверхні широко застосовуються в моделюванні криволінійних об’єктів завдяки великій гнучкості і працездатності метода. Тому актуальним є розробка методу апроксимації цими поверхнями дискретного ряду точок в тривимірному просторі.

Робота присвячена розробці нового підходу до апроксимації раціональною поверхнею Безьє, поданої множиною дискретних точок.

Аналітичний опис шуканої поверхні реалізується із застосуванням раціональної поверхні Безьє і NURBS-поверхні. Для розв’язання цієї задачі пропонується два підходи.

Перший підхід полягає в тому, що заздалегідь задаються ваги контрольних точок і далі розраховуються координати контрольних точок інтерполюючій раціональної поверхні Безьє а також NURBS-поверхні. Другий підхід полягає в тому, що заздалегідь задаються

координати контрольних точок і далі розраховуються ваги контрольних точок поверхні Безьє а також NURBS-поверхні. На початку створюється функціонал як сума квадратів відмінності між аналітичною формулою поверхні та координатою заданої точки. Далі вирішується проблема мінімізації цього функціоналу.*

Таким чином маємо систему із N лінійних рівнянь, де N – кількість апроксимуючих точок Невідомими є контрольні точки поверхні або в другому випадку ваги контрольних точок поверхні.

Розроблені два метода апроксимації\ точкового ряду раціональною поверхнею Безьє і NURBS-поверхнею.

Проведені тестові приклади за допомогою комп'ютерної програми, які підтверджують достовірність запропонованих методів.

Ключові слова: апроксимація, раціональні поверхні Безьє, NURBS- поверхні.

АППРОКСИМАЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ БЕЗЬЕ И NURBS-ПОВЕРХНОСТЯМИ.

Бадаев Ю.И., Лагодина Л.П.

Рациональные поверхности Безье и NURBS- поверхности широко применяются в моделировании криволинейных объектов благодаря большой гибкости и работоспособности метода. Поэтому актуальной является разработка метода аппроксимации этими поверхностями дискретного ряда точек в трехмерном пространстве.

Работа посвящена разработке нового подхода к аппроксимации рациональной поверхностью Безье, поданной множеством дискретных точек. Аналитическое описание искомой поверхности реализуется с применением рациональной поверхности Безье и NURBS- поверхности. Для решения этой задачи предлагается два подхода.

Первый подход заключается в том, что заранее задаются веса контрольных точек и дальше рассчитываются координаты контрольных точек интерполирующей рациональной поверхности Безье а также NURBS- поверхности. Второй подход заключается в том, что заранее задаются координаты контрольных точек и дальше рассчитываются веса контрольных точек поверхности Безье

а также NURBS- поверхности.

В начале процесса дискретному ряду точек задаются не только координаты, но и также параметры, то есть каждая точка имеет следующее определение: T (x, y, z, u, v) в трехмерном пространстве, где u, v - параметры.

В начале создается функционал как сумма квадратов различия между аналитической формулой поверхности и координатами заданной точки. Далее решается проблема минимизации этого функционала.

Таким образом имеем систему с N линейных уравнений, где N - количество аппроксимирующих точек Неизвестными являются контрольные точки поверхности или во втором случае веса точек поверхности.

Разработаны два метода аппроксимации точечного ряда рациональной поверхностью Безье и NURBS- поверхностью.

Проведены тестовые примеры с помощью компьютерной программы, которые подтверждают достоверность предложенных методов.

Ключевые слова: аппроксимация, рациональные поверхности Безье, NURBS - поверхности.