УДК 514.18

ОДНО- ТА ДВОРОЗМІРНІ ДІЙСНІ КОМПОЗИЦІЙНІ МАТРИЦІ

Верещага В.М., д.т.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького (Україна),
Адоньєв Є.О., д.т.н.
Запорізький національний університет (Україна),
Павленко О.М., к.т.н.
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького (Україна)
Лисенко К.Ю.[*], аспірантка

Надано визначення композиційних матриць (компоматриць), визначено які математичні об'єкти можуть бути елементами компоматриць. Показано вимоги щодо індексації одно-, дво-, тривимірних компоматриць та їх призначення. Встановлено умовне позначення дійсних компоматриць та вказано, що вони призначені для аналітичної формалізації опису геометричних фігур. Вказано, що необхідність введення поняття «композиційні матриці» викликана природою утворення геометричних фігур (ГФ). Визначено, що є уніфікацією ГФ і для чого вона потрібна у композиційному геометричному моделюванні. Надано правила щодо утворення компоматриці точкової та компоматриці параметричної та визначено умовне їх позначення. Досліджено, що компоматриці застосовуються для геометричного моделювання об'єктів, кожна точка яких є K-значною ($K = \overline{1,k}$), тобто, визначена k-координатами простору параметрів. Встановлено, що кількість елементів і форма їх запису у компоматрицях знаходиться у повній відповідності з кількістю точок та їх розташуванням на вихідній ГФ.

Надано, у компоматричній формі, запис геометричної моделі вихідної ГФ, і надано приклади її створення для одно- та дворозмірних компоматриць.

Визначено нульова та одинична компоматриці та їх позначення. Також показано утворення та позначення компоматриці числової. Надано правила запису та позначення для розрахункових (координатних) компоматриць.

Показано послідовність переходу від компоматричної форми запису ГФ до точкового поліному, що є інтерполянтом цієї ГФ.

---
[*] Науковий керівник – д.т.н., проф. Верещага В.М.

Пропонується компоматриця для інтерполянта, яку записано у розгорнутому вигляді, та показано послідовність її поділення на геометричну та параметричну складові у вигляді відповідних компоматриць. Досліджено, що компоматриця точкова інтерполянта є композиційною, а параметрична – комбінаційною. Проведено аналіз компоматриці параметричної для точкових поліномів, надається значення її сліду та детермінанту, вказується на особливості транспонованої компоматриці до вихідної параметричної. Головною особливістю транспонованої параметричної компоматриці є те, що вона дорівнює вихідній компоматриці, а це дозволяє без обмежень застосовувати для геометричного способу моделювання метод рухомого симплексу.

Ключові слова: однорозмірні та дворозмірні композиційні матриці, компоматричні рівняння, точковий поліном.

Постановка проблеми. Існуюча теорія матриць [4, 6, 7] вивчає матриці, які описують алгебраїчні форми (рівняння їх системи, нерівності, алгебраїчні вирази, сукупності, тощо), у описах яких їх складові елементи завжди знаходяться у певній залежності один від одного, тобто, у разі якщо змінюється будь-який із складових елементів алгебраїчної форми, то потребують відповідних змін решта інших елементів цієї форми.

Таку залежність елементів у алгебраїчних формах будемо називати – комбінацією. Наявність комбінації елементів алгебраїчних форм, за будь-яких змін окремих її елементів, потребують кожного разу нового повторного розв’язку. Окрім цього, завжди існують певні обмеження щодо свободи вибору складових алгебраїчних форм. Враховуючи сказане, у наших дослідженнях традиційні матриці будемо називати: «алгебраїчними матрицями». Усі елементи алгебраїчних матриць завжди знаходяться у певній відповідності з алгебраїчними формами, що використовуються для розв’язку задач.

З розвитком можливостей комп’ютерної техніки і відповідного зростання потужностей комп’ютерів, до розв’язку виявилися підсильними задачі більш складного характеру, вихідні умови яких складно піддаються опису за допомогою алгебраїчних форм. У зв’язку з цим, виникла потреба створення іншого типу матриць, які у роботах [1, 5] названо «композиційними матрицями». У даному дослідженні пропонується «композиційні матриці» називати скорочено одним словом: «компоматрицями». Компоматриці призначені для опису геометричних форм для формалізації геометричними методами моделювання складних процесів, систем, тощо, які, на наш погляд, є менш складними, більш потужними та наочними.

Компоматриці призначені для опису геометричних фігур, вирази-елементи в компоматрицях існують незалежно один від одного у відповідності до того, що будь-яка геометрична фігура (ГФ), у кінцевому рахунку, визначається кількістю точок, що її утворюють і, при цьому, відсутні будь-які обмеження щодо розташування точок у цій ГФ. У процесі створення ГФ зміна розташування будь-якої однієї або декількох точок, що її визначають, не тягне за собою зміни розташування решти інших точок.

Відсутність обмежень і наявність можливих змін щодо розташування визначеної кількості точок ГФ, будемо називати зміною вхідної композиції ГФ. Точка є елементом композиції точок, що утворюють ГФ. Термін «композиція» щодо матриць та методу застосовується через те, що головною ознакою будь-якої композиції (музичної, художньої, архітектурної, тощо) у тому числі і геометричної є можливість зміни будь-якого одного або декількох елементів без зміни решти інших її елементів.

Отже, виходячи із сказаного, введення компоматриць у геометричне моделювання викликано зростаючими можливостями інформаційних систем і, у зв’язку з цим, можливість дослідження геометричними методами більш складних явищ та процесів. Таким чином, актуальною постає необхідність розробки правил складання, дослідження властивостей, виконання операцій та методів застосування компоматриць у геометричному моделюванні. Це потребує проведення певних досліджень, у цьому полягає виправданість появи цієї статті.

Метод дослідження. Методом геометричного способу створення моделей є композиційна геометрія (КГ).

КГ – це геометрія відношень частин геометричної фігури до цілого її елементу, яка побудована на засадах точкового числення Балюби-Найдиша, і у якій кожна вихідна геометрична фігура, будь-яка із її проекцій і здобутий розв’язок, в цілому, поділені на геометричну та параметричну складові, які можна, з метою локального управління формою геометричної фігури, що моделюється, змінювати незалежно одна від одної. Точкове числення Балюби-Найдиша розроблена у роботах [2, 3].

Потужним інструментом КГ є композиційні матриці (компоматриці) над полем дійсних чисел, тобто – дійсні компоматриці.

Композиція, у загальному сенсі, це дискретний набір функціонально взаємопов’язаних елементів, що утворюють цілісний, за своєю структурою та функціонуванням, об’єкт, що має певну внутрішню єдність і, при цьому, зміна або навіть заміна будь-якого або декількох з її елементів не тягне за собою ніяких змін для решти інших.

У композиційній геометрії застосовується геометрична композиція, за допомогою якої можна представити будь-яку іншу композицію. Геометрична композиція має своїми елементами непусту скінчену дискретну множину точок, частина з яких може утворювати певні підмножини і, при цьому, для кожного з елементів цієї геометричної композиції встановлено їх власні розміри та розміри, що визначають взаємне розташування усіх її елементів. Зміна або навіть заміна будь-якої або декількох точок геометричної композиції ніяким чином не впливає на положення чи властивості решти інших її точок.

Будь-яка геометрична композиція разом з вербальною складовою є основою для створення геометричної фігури.

Геометрична фігура (образ) – це деяка непуста скінчена упорядкована множина точок, для якої встановлені певні метричні (відстані, кути), позиційні (приналежність, взаємне розташування), диференціально-геометричні (дотичні, кривини) властивості, при цьому, множини точок геометричної фігури можуть бути зв'язаними (континуальними) або дискретними та утримувати різні підмножини у вигляді ліній, поверхонь, тіл. Це визначення надано, спираючись на роботу Найдиша В.М. [9].

Геометричний спосіб інтерполяції забезпечується характеристичними функціями, що формуються, виходячи з геометричних умов, закладених у вихідній геометричній композиції, і входять складовими до точкових поліномів, які у вузлах інтерполяції дорівнюють нулю або одиниці, за рахунок чого і здійснюється глобальна інтерполяція вихідних точок геометричним способом.

Точкові поліноми, що забезпечують геометричний спосіб інтерполяції, складаються із суми добутків вихідних базисних точок на відповідні параметри – характеристичні функції.

Характеристична функція – це раціональна функція у параметричній формі, що утворюється як добуток різниць між значеннями параметрів для базисних точок та поточним параметром $0 \le t \le 1$, мають наступний запис:

$$P_j(t) = \frac{1}{\lambda_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} (t_i - t), \; j = \overline{1,n}; \; 0 \le t \le 1,$$

де $\lambda_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} (t_i - t_j)$; $\frac{1}{\lambda_j}$ – коефіцієнт перетворення на одиницю характеристичної функції $P_j(t)$, коли $i = j$; i – індекс, що визначає степінь раціональної функції, який дорівнює $(n-1)$; j – номер вузла інтерполяції, $j = \overline{1,n}$; t – поточний параметр точкового поліному, $0 \le t \le 1$; t_j – значення вихідного параметру у j-му вузлі; t_i –

значення поточних параметрів у вузлах інтерполяції (базисних точках).

Базисні точки (вузли інтерполяції) обираються серед точок вхідної геометричної композиції і призначені для породження усієї континуальної множини точок шуканого точкового полінома (інтерполянта). Відносно базисних точок складається точкове рівняння точкового полінома, в результаті чого, він є вісьонезалежним, тобто, запис точкового рівняння точкового полінома не залежить від місця обрання або за результатом переміщення декартової системи координат. Точковий поліном глобально інтерполює базисні точки, а решта точок вихідної геометричної композиції ним апроксимуються.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомо [4,6,7,8], матриця є прямокутна таблиця (n_{ij}), $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. У той же час [8] не усяка таблиця є матрицею. У відповідності до [6, 8] теорія матриць розроблена для обслуговування алгебраїчних систем. Із вказаних джерел відомо, що лінійні системи, які описані за допомогою алгебраїчних матриць, ніколи не бувають хаотичними. Тому елементи алгебраїчних матриць обумовлюють певні обмеження, вимоги, тощо.

В результаті цього, зміна будь-якого одного з елементів алгебраїчної матриці тягне за собою відповідну зміну решти її елементів. Отже, елементи алгебраїчних матриць створюють певну комбінацію, а самі алгебраїчні матриці є комбінаційними.

У зв’язку з розвитком інформаційних технологій та комп’ютерної техніки у бік збільшення їхньої потужності та інших можливостей, наразі виникла можливість і нагальна потреба розв’язання задач та побудови геометричних моделей процесів, що описуються композиційними матрицями [1, 5]. У композиційних матриць набір елементів є хаотичним або випадковим, при цьому, стає можливим змінювати або замінювати будь-який або декілька її елементів. Зміни окремих елементів композиційної матриці не чіпають решти її інших елементів. На підтвердження необхідності введення композиційних матриць з’явилися і інші роботи аналогічного характеру [10, 11]. Однак, не розв’язаною лишається систематизація знань щодо теорії композиційних матриць. Запропоноване дослідження є першим кроком у розв’язанні цього питання.

Формулювання цілей статті. Надати визначення дійсним композиційним матрицям, пояснити утворення одно- та дворозмірних компоматриць, показати способи їх позначення. Навести приклади копмоматриць, компоматричного рівняння геометричної фігури, точкового поліному. Сформулювати властивості компоматриці параметричної точкового поліному.

Основна частина. Композиційна матриця (компоматриця) – це таблиця елементів, записи яких у цій таблиці за кількістю і за формую розташування знаходяться у повній відповідності з розташуванням та кількістю точок у вхідній геометричній композиції. Елементами компоматриці можуть бути функції, вирази, константи, тощо. Кожний елемент компоматриці може бути змінений або замінений незалежно від решти інших її елементів.

Положення кожного елементу компоматриці визначається: 1) одинарним індексом, якщо вона відображає однопараметричну геометричну фігуру (І-ГФ); 2) подвійним індексом, якщо компоматриця відображає двопараметричну (ІІ-ГФ); 3) потрійним індексом, якщо компоматриця відображає трипараметричну (ІІІ-ГФ).

Компоматриця-рядок, або компоматриця-стовпчик мають елементи з одинарним індексом. Такі компоматриці названо нами – однорозмірними, які призначені для створення лінійних інтерполянтів – точкових поліномів. Компоматриця, що має елементи з подвійними індексами, утримує і рядки і стовпці. При цьому, перший індекс вказує на номер рядка, а другий – номер стовпця, в якому знаходиться її елемент. Такі компоматриці названі нами – дворозмірними, які призначені для створення точкових рівнянь-поверхонь, що інтерполюють відповідні вихідні геометричні композиції.

Компоматриця, що має елементи з потрійними індексами, утримує рядки у додатному напрямку першого параметру; утримує стовпці зі зростанням номера у додатному напрямі другого параметру; утримує стовпці зі зростанням номера індексу у додатному напрямі третього параметру. Такі компоматриці названо нами – трирозмірними, які призначені для створення точкових рівнянь-інтерполянтів для об’ємних геометричних фігур. Позначаються компоматриці прописною латинською літерою, яку узято у подвійні квадратні чи то круглі дужки – $[[M]]$.

Отже, компоматриці призначені для аналітичної формалізації опису геометричних фігур. Необхідність уведення, в сучасні методи геометричного моделювання, поняття: «компоматриці» викликана природою утворення геометричних фігур як певної композиції точок. Кожна геометрична композиція має супроводжуватися поясненнями щодо геометричної фігури, яку треба створити на її основі, тобто мати вербальну складову. Окрім вербальної складової кожна геометрична фігура, у композиційній геометрії, має поділятися ще на дві складові (цей процес названо уніфікацією вихідної геометричної фігури), на геометричну і параметричну. Будь-яка ГФ довільної форму, що створюється на вихідній геометричній композиції, визначається наявною кількістю точок, при цьому, відсутні будь-які обмеження щодо розташування цих точок. Виходячи з цього, у композиційній геометрії, кожна ГФ представляється у вигляді трьох складових – вербальної, геометричної та параметричної.

Геометрична складова уніфікованої ГФ описується у вигляді точкової компоматриці, елементами якої є *K*-значні точки вихідної геометричної композиції A_j; $j=\overline{1,n}$; $K=\overline{1,k}$.

Компоматриця точкова позначається прописною літерою латинського алфавіту, з обов’язковим записом індексу у вигляді літери «*T*», яка розміщується у подвійних квадратних або круглих дужках. Позначення компоматриці точкової – $[\![A_T]\!]$.

Компоматриця точкова – таблиця, елементами якої є *K*-значні точки (для $K=\overline{1,k}$) вихідної геометричної композиції, які записані у цій таблиці, за кількістю та розташуванням, у повній відповідності із їх розташуванням та кількістю на вихідній геометричній фігурі, компоматриця точкова являє собою формалізовану геометричну складову у точковому компоматричному рівнянні інтерполянта.

Подвійні дужки для позначення компоматриць застосовуються на відміну від позначень традиційних алгебраїчних матриць.

Параметрична складова уніфікованої ГФ описується у вигляді компоматриці параметричної, елементами якої є параметри, що визначають взаємне розташування точок вихідної геометричної композиції.

Компоматриця параметрична позначається прописною літерою латинського алфавіту, з обов’язковим записом індексу у вигляді прописної літери «*П*» – українського алфавіту, прописна літера розміщується у подвійних квадратних або круглих дужках – $[\![A_П]\!]$.

Отже, компоматриця параметрична – це таблиця, елементами якої є параметри, що визначають взаємне положення точок вихідної ГФ, які за кількістю і розташуванням знаходяться у повній відповідності з вихідною геометричною композицією, компоматриця параметрична являє собою формалізовану параметричну складову у точковому композиційно-матричному (компоматричному) рівнянні геометричної фігури, яке позначимо через $[\![M_Ф]\!]$:

$$[\![M_Ф]\!]=[\![A_T]\!]\cdot[\![A_П]\!], \tag{1}$$

де $[\![A_T]\!]$ – компоматриця точкова-рядок, або -стовпчик;

$[\![A_П]\!]$ – компоматриця параметрична-рядок, або -стовпчик.

Розкриємо компоматриці-рядки, наприклад, для трьох елементів:

$$[\![A_T]\!]=[\![A_j]\!]=[\![A_1\ \ A_2\ \ A_3]\!],\ j=\overline{1,3}; \tag{2}$$

$$[[A_{П}]]=[[a_j]]=[[a_1\ \ a_2\ \ a_3]],\ j=\overline{1,3}. \tag{3}$$

Тоді компоматриця ГФ:

$$[[M_{Ф}]]=[[A_1\ \ A_2\ \ A_3]]\cdot[[a_1\ \ a_2\ \ a_3]]=[[A_1\cdot a_1\ \ A_2\cdot a_2\ \ A_3\cdot a_3]]. \tag{4}$$

Аналогічно для компоматриць-стовпців:

$$[[A_{Т}]]=[[A_i]]=\left[\left[\begin{matrix}A_1\\A_2\\A_3\end{matrix}\right]\right],\ i=\overline{1,3}; \tag{5}$$

$$[[A_{П}]]=[[a_i]]=\left[\left[\begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix}\right]\right],\ i=\overline{1,3}. \tag{6}$$

Тоді компоматриця ГФ матиме вигляд:

$$[[M_{Г}]]=\left[\left[\begin{matrix}A_1\\A_2\\A_3\end{matrix}\right]\right]\cdot\left[\left[\begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix}\right]\right]=\left[\left[\begin{matrix}A_1\cdot a_1\\A_2\cdot a_2\\A_3\cdot a_3\end{matrix}\right]\right],\ i=\overline{1,3}. \tag{7}$$

Під кожним з наведених позначень, однорозмірних компоматриць можна вказувати літерою l – кількість елементів у рідку чи то стовпчику: $\underset{l}{[[M_{Ф}]]}$, $\underset{l}{[[A_{Т}]]}$, $\underset{l}{[[A_{П}]]}$.

Також, для однорозмірних компоматриць можна застосовувати інші позначення, що вказують на кількість елементів у них і на те, що компоматриця є рядком чи стовпчиком, $\underset{1\times m}{[[M_{Ф}]]}$, $\underset{1\times m}{[[A_{Т}]]}$, $\underset{1\times m}{[[A_{П}]]}$, тут $(1\times m)$: 1 – вказує, що компоматриця має один рядок; m – вказує на кількість елементів рядку. $\underset{l\times 1}{[[M_{Ф}]]}$, $\underset{l\times 1}{[[A_{Т}]]}$, $\underset{l\times 1}{[[A_{П}]]}$, тут $(l\times 1)$: l – вказує на кількість елементів у стовпчику; 1 – вказує, що компоматриця має один стовпчик.

Двоирозмірні композиційні матриці (компоматриця) розміру $l\times m$ здатні описувати ГФ у тривимірному (фізичному) просторі (трипросторі), при цьому, точки цієї ГФ можуть бути K-значними, тобто визначатися $K=\overline{1,k}$ координатами простору параметрів.

Дворозмірні компоматриці позначаються аналогічно однорозмірним

$\underset{l\times m}{[[A_{Т}]]}$ – дворозмірна компоматриця точкова;

$\underset{l\times m}{[[A_{П}]]}$ – дворозмірна компоматриця параметрична;

$\underset{l\times m}{[[M_{\Phi}]]}$ – дворозмірна компоматриця геометричної фігури.

У наведених позначеннях запис $l\times m$ означає, що компоматриці складаються з *l* рядків та *m* стовпчиків.

Для дворозмірних компоматриць буде правдивим компоматричне рівняння (1).

У разі, коли дворозмірна компоматриця є прямокутною і $l=m$, то така дворозмірна компоматриця є квадратною.

Однорозмірна *l*-компоматриця або дворозмірна $l\times m$-компоматриця: 1) називаються 0-компоматрицями (нульова компоматриця), якщо усі їх елементи дорівнюють нулю; 2) називаються 1-компоматрицею (одиничною компоматрицею), якщо усі її елементи дорівнюють одиниці; 3) називається числовою, якщо усі її елементи є однаковими і дорівнюють якомусь числу.

Нульова компоматриця позначається: $\underset{l}{[[0]]}$ – однорозмірна; $\underset{l\times m}{[[0]]}$ – дворозмірна, для $l=\overline{1,l}$; $m=\overline{1,m}$. Одинична компоматриця позначається: $\underset{l}{[[1]]}$ – однорозмірна; $\underset{l\times m}{[[1]]}$ – дворозмірна, для $l=\overline{1,l}$; $m=\overline{1,m}$.

Числова компоматриця позначається:

$$\underset{l}{[[L]]}=[[\lambda_i]] \text{ – однорозмірна, для } i=\overline{1,l}; \tag{8}$$

$$\underset{l\times m}{[[L]]}=[[\lambda_{ij}]] \text{ – дворозмірна, для } i=\overline{1,l},\ j=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Для композиційного моделювання, з використанням компоматриць, застосовуються координатні компоматриці, які будемо позначати:

$$[[A(K)]]=[[A_{ij}(K)]],\ i=\overline{1,l};\ j=\overline{1,m}.$$

Прямокутна компоматриця ГФ: $[[M_{\Phi}]]$ перетворюється у точковий поліном *M* шляхом знаходження суми усіх її елементів, кількість яких дорівнює добутку кількості рядків – *l* та кількості стовпчиків – *m*, тобто $l\times m$. Отже, точковий поліном *M*, для двопараметричної ГФ матиме наступний вигляд:

$$M=\sum_{j=1}^{l\times m}A_{ij}\cdot a_{ij}, \text{ або } M=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\cdot a_{ij}, \text{ для } n=l\times m,\ i=\overline{1,l}, \tag{10}$$

де

A_{ij} – базисні точки вихідної ГФ;

a_{ij} – параметри у вузлах інтерполяції (базисних точках) вихідної геометричної фігури; $a_{ij}=a_{ij}(U,V)$.

Для двопараметричного точкового поліному також складається композиційна матриця – компоматриця інтерполянта, яка завжди є квадратною з кількістю членів $l \times m$, тут l та m визначають розміри двовимірної компоматриці ГФ, тобто з $\underset{l\times m}{[[M_{\Phi}]]}$.

Компоматрицю інтерполянта будемо позначати:

$$[[M_I]] = \|A_{ij} \cdot a_{ij}\|. \tag{11}$$

Розкриємо компоматрицю (11):

$$[[M_I]] = \underset{n\times n}{\|A_{ij} \cdot a_{ij}\|} =$$

$$= \left[\left[\begin{matrix} A_{11}\cdot a_{11} & A_{12}\cdot a_{12} & \dots & A_{1(n-1)}\cdot a_{1(n-1)} & A_{1n}\cdot a_{1n} \\ A_{21}\cdot a_{21} & A_{22}\cdot a_{22} & \dots & A_{2(n-1)}\cdot a_{2(n-1)} & A_{2n}\cdot a_{2n} \\ \dots\dots & & \dots & \dots & \dots \\ A_{(n-1)1}\cdot a_{(n-1)1} & A_{(n-1)2}\cdot a_{(n-1)2} & \dots & A_{(n-1)(n-1)}\cdot a_{(n-1)(n-1)} & A_{(n-1)n}\cdot a_{(n-1)n} \\ A_{n1}\cdot a_{n1} & A_{n2}\cdot a_{n2} & \dots & A_{n(n-1)}\cdot a_{n(n-1)} & A_{nn}\cdot a_{nn} \end{matrix}\right]\right]. \tag{12}$$

Компоматриця точкового поліному (інтерполянта) (12) схожа на традиційні алгебраїчні матриці, тому для аналізу її властивостей скористаємося відомими фактами із теорії матриць [4, 6, 7].

Розкладаємо компоматрицю інтерполянта (12) на дві компоматриці:

$$\underset{n\times n}{\|A_{ij} \cdot a_{ij}\|} = \underset{n\times n}{\|A_{ij}\|} \cdot \underset{n\times n}{\|a_{ij}\|},\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Компоматриця $\|A_{ij}\|$ – являє собою геометричну складову вихідної уніфікованої ГФ, яка описує композиційну (геометричну) складову, для якої є відсутніми будь-які обмеження щодо обрання її елементів. Тобто, зміна будь-якого з елементів компоматриці – $\|A_{ij}\|$; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$ зовсім не чіпає параметричну складову уніфікованої ГФ, тобто, компоматрицю $\|a_{ij}\|$; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$ з (13). Ця параметрична компоматриця елементами своїми має параметри, які є алгебраїчними комбінаціями з параметрів вихідної ГФ. На відміну від композиції, комбінація не допускає довільних змін її елементів. Тобто, будь-яка зміна одного з елементів матриці $\lfloor a_{ij} \rfloor$ тягне за собою необхідність зміни для усіх решти інших елементів.

Виходячи зі сказаного матриця $\lfloor a_{ij} \rfloor$; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$, з (13) є традиційною алгебраїчною квадратною ($n \times n$) матрицею. Також $\lfloor a_{ij} \rfloor$; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$; є діагональною одиничною матрицею, тобто її головні діагональні елементи дорівнюють одиниці, а решта інших дорівнює нулю. Слід цієї матриці завжди дорівнює n-кількості базисних точок вихідної ГФ:

$$Sp\lfloor a_{ij} \rfloor = n;\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Визначник – завжди дорівнює нулю:

$$\det\lfloor a_{ij} \rfloor = 0;\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Виходячи з (15), транспонована компоматриця параметрична $[\![A_{П}^{T}]\!]$ до параметричної компоматриці $[\![A_{П}]\!]$, або за іншими позначеннями параметрична матриця $\lfloor\!\lfloor a_{ij} \rfloor\!\rfloor$, та транспонована до неї $\lfloor\!\lfloor a'_{ji} \rfloor\!\rfloor$, завжди дорівнюють одна одній

$$[\![A_{П}]\!] = [\![A_{П}^{T}]\!];\ \text{або}\ \lfloor\!\lfloor a_{ij} \rfloor\!\rfloor = \lfloor\!\lfloor a'_{ji} \rfloor\!\rfloor;\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

тобто, є сіметрійськими, у яких елементи головних діагоналей дорівнюють один одному: $a_{ij} = a'_{ji}$.

Як відомо [7], сіметрійські матриці (16) скласти неможливо без застосування певних алгебраїчних комбінацій, у нашому випадку застосовується алгебраїчний спосіб формування характеристичних функцій, які забезпечують геометричний спосіб інтерполяції вихідної ГФ. Окрім того, рівність вихідної та транспонованої композиційних матриць (16) дозволяє без обмежень застосовувати метод рухомого симплексу для геометричного способу моделювання кривих та поверхонь.

Висновки. Систематизовано відомості щодо одно- та дворозмірних композиційних матриць, розроблено способи їх позначення, наведено властивості компоматриці параметричної точкового поліному, що надасть більшого обґрунтування у їхньому застосуванні під час створення композиційних моделей. У подальших дослідженнях планується розробити операції над компоматрицями. Наведені у цьому дослідженні відомості сприяють подальшому розвитку нової теорії композиційних матриць. Застосування компоматриць у геометричному моделюванні дозволяє у найбільш скороченому вигляді робити описи аналітичних розв’язків, які виконуються геометричними способами. Компоматриці є основою побудови точкових поліномів, застосування яких у композиційниій геометрії дозволяє створювати геометричні моделі ліній, поверхонь, а також об’ємних об’єктів довільної форми за наперед визначеними умовами. При цьому, застосування точкових поліномів дозволяє виконувати інтерполяції ліній з кратними точками і навіть таких, що виродилися у точку; виконувати інтерполяції поверхонь з нерегулярними сітками, що утримують трикутникові чарунки; створювати точкові трипараметричні рівняння точкових поліномів, за допомогою яких визначається, на сегменті об’ємної геометричної фігури, положення будь-якої поточної точки не тільки на поверхні, а й всередині сегменту.

Література

1. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … доктора тех. наук. Макеевка: МИСИ, 1995. 227 с.
3. Балюба И.Г. Точечное исчисление. / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. Верещаги В.М. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015. 234 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. инд. перераб. М.: Наука, 1980, 996 с.
5. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017. 108 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. Лит., 1988. 552 с.
7. Корн Г.А. Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: «Наука», 1978. 277 с.
8. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.3. М.: Советская энциклопедия, 1982. 613 с.
9. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція. Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. 250 с.
10. Холковський Ю.Р. Геометричне моделювання локального забруднення прилеглих територій автотранспортних магістралей із використанням дискретно-інтерполяційного методу. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2018. Вип.13. С. 185-191.
11. Холковський Ю.Р. Комплексний підхід щодо геометричного моделювання локальних забруднень прилеглих територій транспортних шляхів. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.15. С. 173-179.

ОДНО- И ДВУРАЗМЕРНЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ

Верещага В.М., Адоньев Е.А., Павленко А.М., Лысенко К.Ю.

Дано определение композиционных матриц (компоматриц), определены математические объекты могут быть элементами *компоматриц. Показаны требования по индексации одно-, двух-, трёхразмерных компоматриц и их назначения. Установлено условное обозначение настоящих компоматриц и указано, что они предназначены для аналитической формализации описания геометрических фигур. Указано, что необходимость введения понятия «композиционные матрицы» вызвана природой образования геометрических фигур (ГФ). Определено, что является унификацией ГФ и для чего она нужна в композиционном геометрическом моделировании. Предоставлены правила образования компоматрицы точечной и компоматрицы параметрической и определены условные их обозначения. Доказано, что компоматрицы применяются для геометрического моделирования объектов, каждая точка которых K-значной, то есть, определенная k-координатами пространства параметров. Установлено, что количество элементов и форма их записи в компоматрицях находится в полном соответствии с количеством точек и их расположением на исходной ГФ.*

Предоставлено, в компоматричной форме, запись геометрической модели исходной ГФ, и даны примеры ее создания для одно- и двуразмерных компоматриц.

Определены нулевая и единичная компоматрицы и их обозначения. Также показаны образования и обозначения компоматрицы числовой. Предоставлены правила записи и обозначения для расчетных (координатных) компоматриц.

Показана последовательность перехода от компоматричной формы записи ГФ к точечному полиному, что является интерполянтом этой ГФ. Предлагается компоматрица для интерполянта, которую записано в развернутом виде, и показана последовательность ее разделения на геометрическую и параметрическую составляющие в виде соответствующих компоматриц. Доказано, что компоматрица точечная интерполянта является композиционной, а параметрическая - комбинационной. Проведен анализ компоматрицы параметрической для точечных полиномов, придается значение ее следа и детерминанту, указывается на особенности транспонированной компоматрицы к исходной параметрической. Главной особенностью транспонированной параметрической компоматрицы является то, что она равна исходной компоматрице, что позволяет без ограничений применять для геометрического способа моделирования метод подвижного симплекса.

Ключевые слова: одноразмерные и двуразмерные композиционные матрицы, компоматричные уравнения, точечный полином.

ONE AND TWO-DIMENSIONAL VALID COMPOSITION MATRICES

Vereshchaha V., Adoniev Y., Pavlenko O., Lysenko K.

The definition of compositional matrices (compomatrixes) is given, mathematical objects are defined that can be elements of compomatrixes. Shown are the requirements for indexing one-, two-, and three-dimensional compomatrixes and their purpose. The symbol designation of the real compromomats is established and it is indicated that they are intended for the analytical formalization of the description of geometric figures. It is indicated that the need to introduce the concept of "composite matrices" is caused by the nature of the formation of geometric figures (GF). It is determined what is the unification of the GF and why it is needed in compositional geometric modeling. The rules for the formation of a point compomatrix and a parametric compomatrix are provided, and their conventions are defined. It is proved that compomatrixes are used for geometric modeling of objects, each point of which is K-valued, that is, defined by the k-coordinates of the parameter space. It has been established that the number of elements and the form of their recording in the compatrix are in complete accordance with the number of points and their location on the original GF.

A representation of the geometric model of the initial HF is provided, in a complimentary form, and examples of its creation are given for one- and two-dimensional compatatrices.

The zero and single compomatrixes and their notation are defined. Also shown are the formations and designations of the numeric compomatrix. Recording rules and notation for calculated (coordinate) compomatrixes are provided.

The sequence of transition from the compatrix form of a GF to a point polynomial, which is an interpolant of this GF, is shown. A compatrix is proposed for the interpolant, which is written in expanded form, and the sequence of its separation into geometric and parametric components in the form of the corresponding compomatrix is shown. It is proved that the pointwise interpolant compomatrix is composite, and the parametric is combinative. The analysis of the parametric compatrix for point polynomials is carried out, its trace and determinant are given importance, the features of the transposed compomatrix to the original parametric are indicated. The main feature of the transposed parametric compomatrix is that it is equal to the original compomatrix, which allows the mobile simplex method to be used without restrictions for the geometric modeling method.

Keywords: one-dimensional and two-dimensional composite matrices, compomatic equations, point polynomial.