УДК 514.18

АНАЛІТИЧНЕ ЗНАХОДЖЕННЯ РУХОМОГО І НЕРУХОМОГО АКСОЇДІВ ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ НАПРЯМНОЇ КРИВОЇ

Кресан Т.А., к.т.н*,
Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Грищенко І.Ю., к.т.н.,
Бабка В.М., к.т.н.
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

Супровідний тригранник Френе напрямної кривої лінії при русі по ній здійснює певний просторовий рух. В теоретичній механіці просторовий рух твердого тіла описується аналітично, причому в кожен момент часу він розглядається, як сума обертального і поступального рухів. Якщо супровідний тригранник розглядати, як тверде тіло, то його рух повністю зумовлений диференціальними характеристиками напрямної кривої, тобто кривиною і скрутом в точці знаходження тригранника.

Просторовий рух твердого тіла в кожен момент часу можна розкласти на безліч варіантів обертального і поступального переміщень, кожен із яких залежить від вибору точки твердого тіла, тобто полюса, по відношенню до якої здійснюється розкладання рухів. Для точок тіла, які виступає в ролі полюса, вектор і величина обертального руху є незмінними, а поступального – змінними. В твердому тілі в конкретний момент часу можна знайти полюс, для якого вектори обертального і поступального рухів будуть збігатися за напрямом. Цей напрям є віссю кінематичного гвинта. Навколо цієї осі в конкретний момент часу тіло обертається із певною кутовою швидкістю і ковзає вздовж неї теж із певною лінійною швидкістю. Співвідношення цих швидкостей є параметром кінематичного гвинта. При русі тіла вісь кінематичного гвинта змінює свій напрям і положення в тілі, тобто утворює лінійчату поверхню. Множину положень осей кінематичного гвинта можна розглядати по відношенню до нерухомої системи координат і по відношенню до рухомої (в нашому випадку – в системі тригранника Френе). В першому випадку отримаємо нерухомий аксоїд, а в другому – рухомий. При русі твердого тіла рухомий аксоїд обкочується по нерухомому і одночасно ковзає вздовж спільної прямої дотику.

В статті показано положення осі кінематичного гвинта в супровідному триграннику Френе, множина яких утворює рухомий

* Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

аксоїд, а також через напрямні косинуси знайдено положення в нерухомій системі, тобто знайдено нерухомий аксоїд. За розробленим алгоритмом можна побудувати нерухомий і рухомий аксоїди із спільною віссю кінематичного гвинта для будь-якої точки напрямної кривої. Наведено параметричні рівняння рухомого і нерухомого аксоїдів.

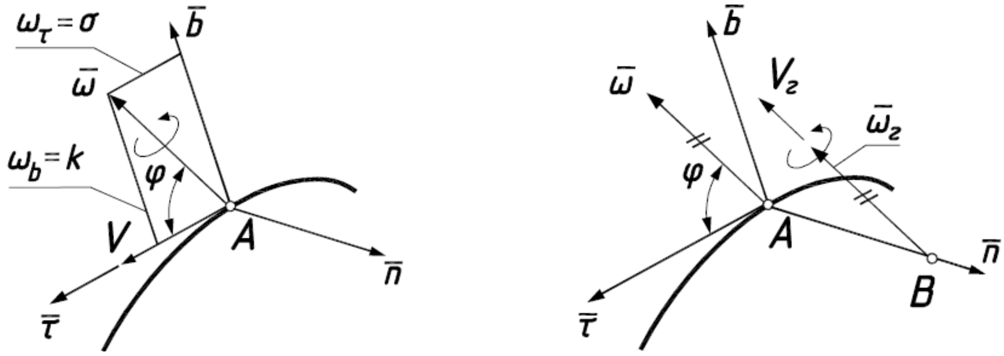
Ключові слова: рухомий і нерухомий аксоїди, кінематичний гвинт, тригранник Френе, напрямна крива, кривина, скрут.

Постановка проблеми. Зазвичай в механіці рух твердого тіла в просторі розглядається у функції часу. Завдяки аналітичному опису його положення можна відшукати в будь-який момент. Аналогічно для будь-якої точки напрямної кривої можна знайти положення супровідного тригранника. В цьому випадку незалежною змінною буде не час, а змінна, яка визначає точку на кривій, тобто незалежна змінна кривої. Очевидно, що положення тригранника, якого приймемо за тверде тіло, залежатиме від диференціальних характеристик напрямної кривої в конкретній її точці. Отже, і положення осі кінематичного гвинта, множина яких утворює рухомий і нерухомий аксоїди, теж залежатиме від цих характеристик. Аксоїди є важливими елементами для опису просторового руху твердого тіла. Дослідження аксоїдів супровідного тригранника напрямної кривої дає можливість знайти їх форму в залежності від класу кривої.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В прикладній геометрії аксоїди застосовують для конструювання кінематичних поверхонь. До них відносяться ротативні поверхні, при утворенні яких беруть участь аксоїди, що обкочуються один по другому без ковзання [1], та спіроїдальні, де ковзання аксоїдів присутнє [2]. Дослідження ротативних і спіроїдальних поверхонь розглянуто в праці [3]. Елементи кінематичної геометрії кривої лінії наведено в праці [4]. Нерухомий і рухомий аксоїди супровідного тригранника Френе плоскої напрямної кривої і їх взаємозв’язок досліджено в праці [5]. Те ж само, але для просторової кривої укосу розглянуто в праці [6].

Формулювання цілей статті. Розробити аналітичний опис рухомого і нерухомого аксоїдів супровідного тригранника просторової кривої та здійснити їх візуалізацію на прикладі циліндричних ліній.

Основна частина. Рух супровідного тригранника Френе по напрямній кривій можна розглядати, як рух твердого тіла, кінематика якого визначається диференціальними характеристиками кривої. Оскільки тригранник рухається вздовж кривої, то його переміщення можна розглядати, як суму двох складових рухів: поступального вздовж орта дотичної $\bar{\tau}$ із швидкістю V і обертального навколо миттєвої осі обертання $\overline{\omega}$ з кутовою швидкістю ω (рис. 1,а). Ці два рухи можна звести до гвинтового руху навколо миттєвої осі обертання і ковзання $\overline{\omega}_г$, тобто до кінематичного гвинта (рис. 1,б). Однопараметрична множина осей кінематичного гвинта по відношенню до нерухомої системи координат утворює нерухомий аксоїд, а по відношенню до системи рухомого тригранника – рухомий.



а б

Рис. 1. Варіанти розкладання поступального і обертального рухів тригранника Френе просторової кривої:

а) обертальний рух навколо вектора Дарбу і поступальний вздовж орта дотичної;

б) обертальний рух навколо миттєвої осі обертання і ковзання і поступальний вздовж неї

Миттєва вісь обертання $\overline{\omega}$ розташована в спрямній площині тригранника і складає кут φ із ортом $\overline{\tau}$ (рис. 1,а). Величина і напрям даного вектора, який носить назву вектора Дарбу, залежить від значень кривини k і скруту σ кривої в точці A розташування тригранника, причому його проекція на орт $\overline{\tau}$ чисельно рівна скрутові σ, а на орт бінормалі $\overline{b}$ - кривині k. Звідси можна знайти модуль вектора Дарбу $\overline{\omega}$, тобто чисельне значення кутової швидкості ω (в подальшому прийнято, що швидкість руху тригранника по кривій рівна одиниці: *V=1 м/с:*

$$\left|\overline{\omega}\right| = \omega = \sqrt{k^2 + \sigma^2}\ . \qquad (1)$$

Обертальний і поступальний рухи тригранника можна замінити одним гвинтовим рухом. Він буде обертатися навколо нової осі $\overline{\omega}_г$ з тією ж кутовою швидкістю ω і ковзати вздовж неї із новою швидкістю $V_г$:

$$V_г = V\sigma / \sqrt{k^2 + \sigma^2}\ . \qquad (2)$$

Нова вісь $\overline{\omega}_г$ називається миттєвою віссю обертання і ковзання, або кінематичним гвинтом (рис. 1,б). Вона паралельна вектору Дарбу і зміщена вздовж додатного напряму головної нормалі $\bar{n}$ тригранника на відстань [4]:

$$AB = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}. \qquad (3)$$

Якщо задана просторова крива параметричними рівняннями, то завжди можна знайти залежності кривини і k і скруту σ в будь-якій поточній точці кривої. Цими двома характеристиками визначається кінематика супровідного тригранника в даній точці: кут φ, тобто напрям кінематичного гвинта в системі тригранника, величина кутової швидкості ω обертання тригранника (1), швидкість його ковзання (2) вздовж вектора кінематичного гвинта і відстань AB (3). В загальному випадку всі ці величини будуть змінними і залежатимуть від точки на кривій, в якій в даний момент знаходиться тригранник. Отже, положення вектора кінематичного гвинта в системі тригранника буде змінюватися по мірі його руху вздовж кривої. Рух осі кінематичного гвинта в системі тригранника, множина положень якої утворює рухомий аксоїд, цілком визначений: він повертається на кут φ навколо головної нормалі $\bar{n}$ і ковзає вздовж неї згідно (3). При такому русі лінійчата поверхня (рухомий аксоїд, який рухається разом із тригранником, але в його системі є нерухомим) утворюється відомим способом, характерним для побудови коноїда: пряма лінія (вісь кінематичного гвинта) перетинає напрямну пряму (головну нормаль тригранника) під прямим кутом, ковзає вздовж неї і одночасно обертається навколо неї.

Знайдемо напрям миттєвої осі обертання $\bar{\omega}$ (рис. 1,а) в нерухомій системі координат $Oxyz$. Координати одиничного вектора осі в проекціях на орти тригранника запишуться через кривину і скрут кривої в даній точці:

$$\omega_\tau = \frac{\tau}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}; \qquad \omega_n = 0; \qquad \omega_b = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}.. \qquad (4)$$

Для того, щоб перейти до координат одиничного вектора (4) в нерухомій системі $Oxyz$, потрібно знати дев’ять кутів, які утворює кожен орт тригранника із осями нерухомої системи координат. Якщо позначити через α_τ , β_τ , γ_τ кути, що утворює орт дотичної $\bar{\tau}$ з осями Ox, Oy, і Oz нерухомої системи координат і аналогічно для головної нормалі $\bar{n}$ і бінормалі $\bar{b}$ - через α_n , β_n, γ_n і α_b , β_b , γ_b, то проекції вектора (4) на нерухому систему запишеться [7]:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_\tau \cos\alpha_\tau + \omega_n \cos\alpha_n + \omega_b \cos\alpha_b; \\ \omega_y &= \omega_\tau \cos\beta_\tau + \omega_n \cos\beta_n + \omega_b \cos\beta_b; \\ \omega_z &= \omega_\tau \cos\gamma_\tau + \omega_n \cos\gamma_n + \omega_b \cos\gamma_b. \end{aligned} \qquad (5)$$

Після підстановки (4) в (5) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{1}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\alpha_\tau + k\cos\alpha_b\right);\\
\omega_y &= \frac{1}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}_{\tau}\left(\tau\cos\beta_\tau + k\cos\beta_b\right);\\
\omega_z &= \frac{1}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\gamma_\tau + k\cos\gamma_b\right).
\end{aligned}\tag{6}$$

Врази кутів α_τ , β_τ , γ_τ , α_n , β_n , γ_n , α_b , β_b , γ_b залежать від точки на напрямній кривій, в якій знаходиться супровідний тригранник. Їх косинуси, які є напрямними косинусами для ортів $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ в системі *Oxyz*, можна визначити через перші і другі похідні параметричних рівнянь напрямної кривої [7]:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_\tau &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};\\
\cos\beta_\tau &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};\\
\cos\gamma_\tau &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};\\
\cos\alpha_n &= \frac{Bz'-Cy'}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\left(A^2+B^2+C^2\right)}};\\
\cos\beta_n &= \frac{Cx'-Az'}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\left(A^2+B^2+C^2\right)}};\\
\cos\gamma_n &= \frac{Ay'-Bx'}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\left(A^2+B^2+C^2\right)}};\\
\cos\alpha_b &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\\
\cos\beta_b &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\\
\cos\gamma_b &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};
\end{aligned}\tag{7}$$

де $A = y'z'' - y''z'; \quad B = z'x'' - z''x'; \quad C = x'y'' - x''y'.$

За формулами (6) знаходимо координати одиничного напрямного вектора осі кінематичного гвинта в нерухомій системі координат. Сама вісь проходить через точку *B* (рис. 1,б), яка в системі тригранника має координати:

$$\omega_{\text{г}\tau} = 0; \qquad \omega_{\text{г}n} = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}; \qquad \omega_{\text{г}b} = 0. \tag{8}$$

Підстановкою координат (8) у (5) замість ω_τ, ω_n, ω_b отримаємо координати точки *B* в нерухомій системі координат за умови, що її початок координат збігається із початком координат тригранника:

$$\omega_{\text{г}x} = \frac{k\cos\alpha_n}{k^2 + \sigma^2}; \qquad \omega_{\text{г}y} = \frac{k\cos\beta_n}{k^2 + \sigma^2}; \qquad \omega_{\text{г}z} = \frac{k\cos\gamma_n}{k^2 + \sigma^2}. \tag{9}$$

Але вершина тригранника знаходиться в точці *A* кривої (рис. 1,а). Якщо параметричні рівняння кривої мають вигляд залежностей *x=x(t), y=y(t), z=z(t),* де *t* – незалежна змінна, положення тригранника на кривій визначається поточним значенням змінної *t*. Це означає, що координати точки *B* в нерухомій системі отримаємо сумуванням виразів (9) з поточними координатами точки *A* на кривій:

$$\begin{aligned} x_B &= x(t) + \frac{k\cos\alpha_n}{k^2 + \sigma^2}; \\ y_B &= y(t) + \frac{k\cos\beta_n}{k^2 + \sigma^2}; \\ z_B &= z(t) + \frac{k\cos\gamma_n}{k^2 + \sigma^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Нерухомим аксоїдом є множина осей кінематичного гвинта в нерухомій системі координат, де положення окремої осі залежить від поточного значення змінної *t*. Вісь, тобто прямолінійна твірна, проходить через точку *B* з координатами (10) паралельно напрямному вектору (6). Зважаючи на це, можемо записати параметричні рівняння лінійчатої поверхні, яка є нерухомим аксоїдом:

$$\begin{aligned} X_{\text{н}} &= x(t) + \frac{k\cos\alpha_n}{k^2 + \sigma^2} + \frac{u}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}\left(\tau\cos\alpha_\tau + k\cos\alpha_b\right); \\ Y_{\text{н}} &= y(t) + \frac{k\cos\beta_n}{k^2 + \sigma^2} + \frac{u}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}_{\tau}\left(\tau\cos\beta_\tau + k\cos\beta_b\right); \\ Z_{\text{н}} &= z(t) + \frac{k\cos\gamma_n}{k^2 + \sigma^2} + \frac{u}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}\left(\tau\cos\gamma_\tau + k\cos\gamma_b\right), \end{aligned} \tag{11}$$

де *u* – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної.

Кривина *k* і скрут σ напрямної кривої визначаються через перші, другі і треті похідні її параметричних рівнянь за відомими формулами.

Рухомим аксоїдом є множина осей кінематичного гвинта в рухомій системі координат. Рух осі кінематичного гвинта в системі тригранника цілком визначений: він повертається на кут φ навколо головної нормалі $\bar{n}$ (рис. 1) і ковзає вздовж неї на відстань *AB* згідно із залежністю (3). При такому русі лінійчата поверхня (рухомий аксоїд, який рухається разом із тригранником, але в його системі є нерухомим) утворюється відомим способом, характерним для побудови коноїда: пряма лінія (вісь кінематичного гвинта) перетинає напрямну пряму (головну нормаль тригранника) під прямим кутом, ковзає вздовж неї і одночасно обертається навколо неї. В системі тригранника утворюється лінійчата поверхня (рухомий аксоїд), всі прямолінійні твірні якої перетинають головну нормаль. Побудову рухомого аксоїда будемо здійснювати в нерухомій системі координат, у якої орт $\bar{\tau}$ збігається із віссю *Ox*, орт $\bar{n}$ – із віссю *Oy*, орт $\bar{b}$ – з віссю *Oz*. В такому випадку параметричні рівняння поверхні запишуться:

$$X_p = \frac{u\tau}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}; \qquad Y_p = \frac{k}{k^2+\sigma^2}; \qquad Z_p = \frac{uk}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}, \qquad (12)$$

де u – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної.

В кожен момент часу нерухомий і рухомий аксоїди дотикаються один до одного вздовж спільної прямолінійної твірної. Щоб побудувати їх в такому положенні, потрібно для конкретного значення змінної t знайти в нерухомому і рухомому аксоїдах відповідні прямолінійні твірні і систему тригранника з рухомим аксоїдом (12) в ньому повернути і перенести так, щоб ці твірні збіглися.

Висновки. Якщо задана крива параметричними рівняннями, то для неї завжди можна побудувати рухомий і нерухомий аксоїди. Вони є множинами осей кінематичного гвинта супровідного тригранника, який при русі по кривій здійснює певне просторове переміщення. В кожен момент часу в триграннику, як у твердому тілі, існує вісь кінематичного гвинта, положення і напрям якої в системі тригранника повністю визначається значенням кривини і скруту в точці знаходження тригранника на кривій. В статті знайдено параметричні рівняння лінійчатих поверхонь, якими є рухомий і нерухомий аксоїди.

Література

1. Ядгаров Д.Я. Шоломов И.Х. Применение дифференциальных уравнений к конструированию ротативных поверхностей с аксоидами торс-торс. *Исслед. в области теории дифференциальных уравнений и теории приближений*. Ташкент, 1982. С. 96–100.
2. Кирилов С.В. Параметрические уравнения некоторых спироидальных поверхностей. *Кибернетика графики и прикладная*

геометрия поверхностей: Труды МАИ. М.: МАИ, 1972. Вып. 296. С. 81 – 85.
3. Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л. Исследование и визуализация ротативных и спироидальных поверхностей. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Технічні науки.* Мелітополь, 2011. Вип. 4. Т. 49. С. 33–41.
4. Панчук К.Л. Элементы кинематической геометрии кривой линиию *Омский научный вестник.* Омск: ОГТУ, 2005. № 2 (31). С. 68–69.
5. Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Кремець Я.С. Нерухомий і рухомий аксоїди супровідного тригранника Френе плоскої напрямної кривої. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2018. № 13. С. 83–91.
6. Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Бабка В.М., Федорина Т.П. Нерухомий і рухомий аксоїди супровідного тригранника Френе просторової кривої укосу. *Вісник Херсонського національного технічного університету.* Херсон, 2019. № 2 (69). Частина 3. С. 265–273.
7. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия. Л.: Кубуч, 1934. 332 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОТЫСКАНИЕ ПОДВИЖНОГО И НЕПОДВИЖНОГО АКСОИДОВ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ

Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Грищенко И.Ю., Бабка В.Н.

Сопровождающий трехгранник Френе направляющей кривой линии при движении по ней осуществляет определенное пространственное движение. В теоретической механике пространственное движение твердого тела описывается аналитически, причем в каждый момент времени оно рассматривается как сумма вращательного и поступательного движений. Если сопровождающий трехгранник рассматривать как твердое тело, то его движение полностью обусловлено дифференциальными характеристиками направляющей кривой, то есть кривизной и кручением в точке нахождения трехгранника.

Пространственное движение твердого тела в каждый момент времени можно разложить на множество вариантов вращательного и поступательного перемещений, каждый из которых зависит от выбора точки твердого тела, то есть полюса, в отношении которого осуществляется разложение движений. Для точек тела, которые выступают в роли полюса, вектор и величина

вращательного движения являются неизменными, а поступательного - переменными. В твердом теле в конкретный момент времени можно найти полюс, для которого векторы вращательного и поступательного движений будут совпадать по направлению. Это направление является осью кинематического винта. Вокруг этой оси в конкретный момент времени тело вращается с определенной угловой скоростью и скользит вдоль нее тоже с определенной линейной скоростью. Соотношение этих скоростей является параметром кинематической винта. При движении тела ось кинематической винта изменяет свое направление и положение в теле, то есть образует линейчатую поверхность. Множество положений осей кинематической винта можно рассматривать по отношению к неподвижной системе координат и по отношению к подвижной (в нашем случае - в системе трехгранника Френе). В первом случае получим неподвижный аксоид, а во втором - подвижный. При движении твердого тела подвижный аксоид обкатывается по неподвижному и одновременно скользит вдоль общей прямой соприкосновения.

В статье показано положение оси кинематического винта в сопровождающем трехграннике Френе, множество которых образует подвижной аксоид, а также через направляющие косинусы найдено положение в неподвижной системе, т.е. найдено неподвижный аксоид. По разработанному алгоритму можно построить неподвижный и подвижный аксоиды с общей осью кинематического винта для любой точки направляющей кривой. Приведены параметрические уравнения подвижного и неподвижного аксоидов.

Ключевые слова: подвижный и неподвижный аксоиды, кинематический винт, трехгранник Френе, направляющая кривая, кривизна, кручение.

ANALYTIKAL SEARCHING OF MOVING AND FIXED AXOIDS OF THE FRENET THRIHEDRAL OF THE DIRECTING CURVE

Kresan T., Pylypaka S., Grischenko I., Babka V.

The accompanying Frenet trihedral of a directing curve at movement on it carries out some spatial movement. In theoretical mechanics, the spatial motion of a solid body is described analytically, and at each instant it is considered as the sum of rotational and translational motions. If the accompanying trihedral is regarded as a solid body, its motion is entirely *due to the differential characteristics of the directing curve, viz the curvature and torsion at the point of location of the trihedral.*

The spatial motion of a solid body at any given time can be decomposed into many variants of rotational and translational displacement, each of which depends on the choice of the point of the solid body , that is, the pole with respect to which the motion is decomposed. For the points of the body acting as a pole, the vector and the magnitude of the rotational motion are unchanged and for the translational motion they are variable. In a solid at a particular point in time, you can find the pole for which the vectors of rotational and translational motions will coincide in the direction. This direction is the axis of the kinematic screw. Around this axis, at a specific point in time, the body rotates at a certain angular velocity and slides along it at a certain linear velocity. The relation between these velocities is a parameter of the kinematic screw. When moving the body, the axis of the kinematic screw changes its direction and position in the body, that is, it forms a ruled surface. Multitude of the positions of the axes of the kinematic screw can be considered with respect to the fixed coordinate system and with respect to the movable one (in our case, in the Frenet trihedral system). In the first case we get a fixed axoid, and in the second - a moving axoid. When moving a solid body, the moving axoid rolls over a fixed one and simultaneously slides along a common directing line of contact.

The article shows the position of the axis of the kinematic screw in the accompanying Frenet trihedral, the set of which forms a moving axoid, and also, through the directing cosines, the position in a fixed system is found, that is, a fixed axoid is found. According to the developed algorithm, it is possible to construct fixed and moving axoids with a common axis of the kinematic screw for any point of the directing curve. Parametric equations of moving and fixed axoids are given.

Keywords: moving and fixed axoids, kinematic screw, Frene trihedral, directing curve, curvature, torsion.