УДК 514.18

ВИКОРИСТАННЯ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ВИМІРЮВАННІ ВЕЛИЧИНИ КУТІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З КОЛОМ

Ванін В.В., д.т.н.,
Юрчук В.П., д.т.н.,
Грубич М.В., аспірантка[I],
Козловський А.Г., аспірант[II]
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)

У статті розглянуто можливі випадки положення величини кутів відносно кола та сформульовано основи і принципи метода структурно - параметричного моделювання при вимірюванні величини кутів, пов'язаних з колом. При цьому метод структурно-параметричного моделювання дозволяє на першій стадії, якою є розміщення вершини кута, визначати його величину на основі узагальнених принципів залежностей, які визначає опублікована авторами раніше теорема про вимірювання величини кутів, пов'язаних з колом, [1]. Випадки положення вершини кутів відносно кола були зведені до трьох наступних можливих розміщень, а саме: - у колі: - на колі та за його межами. Окремо, було виділено випадки положення вершини кута в центрі кола (центральний кут) та поза колом, за умови, коли вершина кута прямує до нескінченності (січні вершини кута – паралельні між собою). Такий метод доцільно використовувати при побудові геометричних залежностей на схемі модифікованого кінематичного гвинта, оскільки для побудови спряжених поверхонь необхідно точно визначати геометричні параметри величини кутів у колі. Велике значення такий підхід має також при побудові кутів на колесі, що має велике значення у кінематиці. За допомогою визначення структурно-параметричних залежностей, спираючись на розглянуті випадки, зручно моделювати сукупність складних геометрично спряжених гвинтових поверхонь з подібними характеристиками, змінюючи лише відповідні аналітичні значення. Таким чином, описані вище випадки дозволяють вирішувати певні задачі геометричного моделювання, а завдяки варіативності величини кута (від нуля до 180°) при його вершині роблять її є справедливо для всіх можливих випадків. Тому, для подальшого моделювання складних геометричних поверхонь доцільно

[I] Науковий керівник – д.т.н., професор Ванін В.В.
[II] Науковий керівник – д.т.н., професор Юрчук В.П.

застосовувати дані структурно-параметричні залежності у колі (колесі).

Ключові слова: величини кутів, коло, колесо, моделювання, складні геометричні поверхні, центральний кут, вписаний кут, дотична, січна.

Постановка проблеми. В інженерній практиці досить часто виникають задачі на знаходження геометричних параметрів кола (колеса), зокрема, на визначення величини кутів на діаграмі кінематичного гвинта. Тому, систематизувавши геометричні задачі, можна виділити як певні так і спільні ознаки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У джерелах [1,2] розглянуто приклади застосування параметрів визначення величини кутів, пов'язаних з колом, та виконано узагальнені приклади для можливого використання діаграми кінематичного гвинта для побудови спряжень кінематичних поверхонь, описаних для конкретних випадків застосування структурно-параметричної схеми.

Формулювання цілей статті. З метою покращення методів проектування гвинтових поверхонь було поставлено завдання розробити схему про вимірювання величини кутів у колі (колесі) шляхом використання параметрів переміщення вершини кута.

Виклад основного матеріалу. Оскільки величина кута, зв'язаного з колом, визначається через кутову величину відповідних дуг даного кола, то спочатку уточнимо визначення величини дуги в залежності від положення сторін. Так початком кожної з дуг, якими визначається шуканого величина кута, пов'язаного з даним колом, є точки даної дуги, спільні для кола і для однієї і тієї ж із двох прямих, що утворюють даний кут.

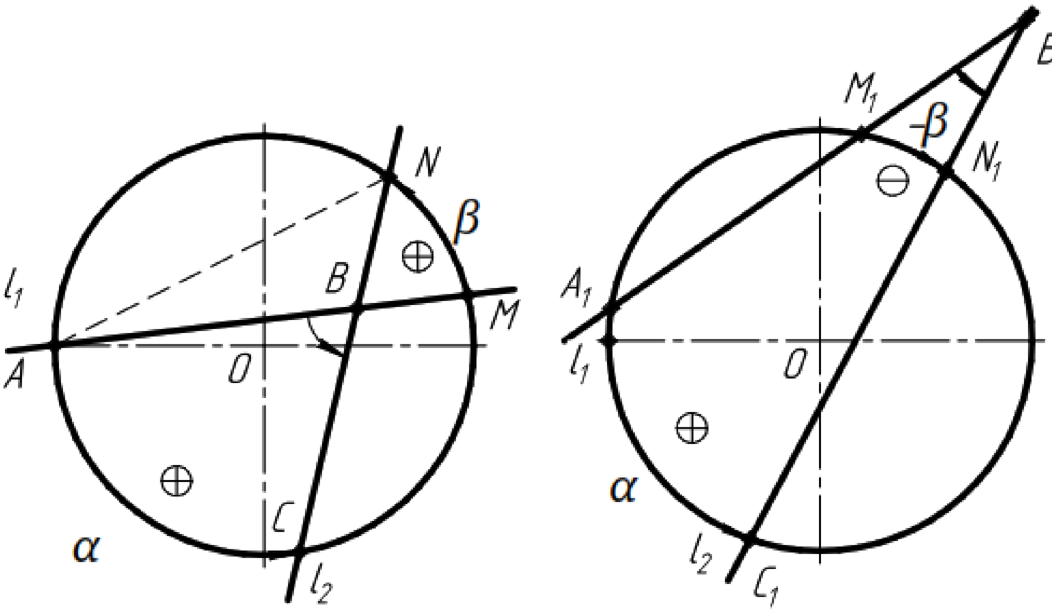
Наприклад, нехай $\angle ABC$ утворюють прямі $AB - l_1$ і $CB - l_2$. За початок відліку дуг *(* $AC = \alpha$ *і* $MN = \beta$) приймемо точки однієї і тієї ж прямої, наприклад l_1 що є спільними для даного кола і прямої l_2. *(α* – між сторонами кута, *β* – між їхнім продовженням).

Розглянемо наступні два випадки:

1) на рис. 1, а зображено положення вершини $\angle ABC$ – точку B – всередині кола. Тому $AC = \alpha > 0$ *і* $MN = \beta > 0$, оскільки напрям обох дуг – проти годинникової стрілки, то обидві дуги будуть мати однаковий знак – позитивний або негативний.

2) на рис. 1, б зображено положення вершини $\angle A_1B_1C_1$ – точку B_1 – поза колом. Тому $\cup A_1C_1 = \alpha > 0$, а $\cup M_1N_1 = -\beta < 0$ (за годинниковою стрілкою). Обидві дуги лежать між сторонами даного

кута і величина меншої дуги має від'ємний знак, тобто протилежний знаку іншої дуги.



а) б)

Умовні позначки:
т. B і т. B_1 – вершини $\angle ABC$ *і* $\angle A_1B_1C_1$ відповідно;
AM, CN, A_1B_1, C_1B_1 – прямі;
α, β – дуги; т. O – центр кола

Рис. 1. Положення вершини кутів: а) – всередині кола та б) – за межами кола

Нехай між сторонами $\angle ABC$ (див. рис. 1, а) $\cup AC = \alpha$ більшої величини, а дуга меншої величини – між продовженням сторін MN: $MN = \beta$ (β – обидві дуги розміщені між сторонами кута $A_i B_j C_k$, а в іншому випадку (див. рис. 1, б) отримаємо $A_1C_1 = \alpha$ і $M_1N_1 = -\beta$. Тому, $|\alpha| \geq \pm\beta$.

Необхідно довести, що $ABC = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ і відповідно $A_1B_1C = \dfrac{\alpha + (-\beta)}{2}$.

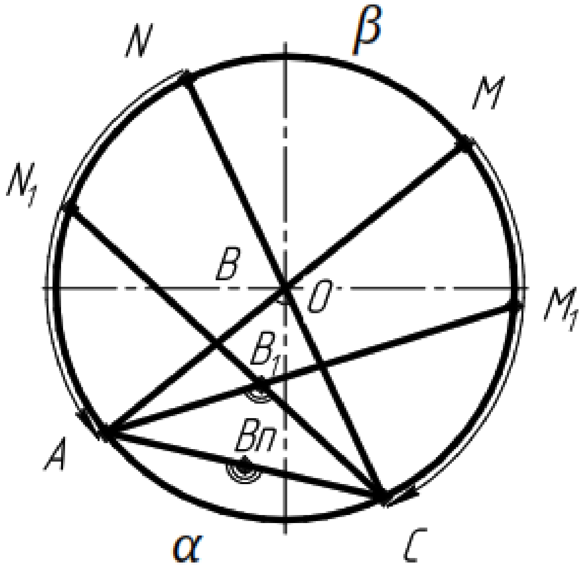
Знак величини кута в кожному випадку буде визначатися знаком дуги більшої довжини α.Нехай $\alpha \geq 0$ (у випадку якщо $\alpha < 0$ визначення l величина кута буде мати від'ємне значення у всіх розглянутих нижче випадках).

Для доведення поставленої теореми розглянемо наступні можливі деякі випадків (хоча їх може бути значно більше і описані вони у навчальній літературі) [1].

Випадок 1. Вершина $\angle ABC$ в середині кола (рис. 1, а). Тому $AC = \alpha,\ MN = \beta,$ де точки $A,M \in (AB)$ і належать колу $(0;R),$ а $C,N \in CB$ і належать колу $(0;R).$ У ΔABN $\angle ABC$ – зовнішній, а $\angle ANB$ і $\angle BAN$ – внутрішній кут. Отже, $ABC = ANB + BAN,$ але оскільки $\angle ANC$ і $\angle MAN$ – вписані кути, тоді:

$$ABC = \frac{AC}{2} + \frac{MN}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}. \quad (1)$$

Випадок 2. Вершина кута $B = 0$ – центр кола, $\angle ABC$ і $\angle MBN$ – центральні кути і $\angle ABC$ – конгруентний $\angle MBN,$ як вертикальні, тому $\cup AC$ конгруентна $\cup MN$, тобто $\alpha = \beta$ (рис. 2).



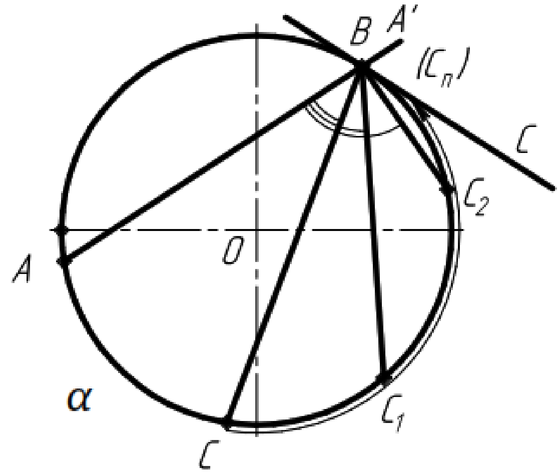
Умовні позначки:
т. *B*, т. B_1, т. B_n – вершини $\angle ABC$, $\angle AB_1C$ *і* $\angle AB_nC$ відповідно;
AM, AM_1, CN, CN_1 – прямі;
α,β – дуги; т. *O* – центр кола
Рис. 2. Положення вершин кутів всередині кола

Отже,

$$A'BC' = ABC = \frac{\alpha+0}{2} = \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Випадок 3. Вершина $\angle B$ належить колу $(0;R), \angle ABC$ – кут між хордою $[A,B]$ і дотичною BC (див. рис. 3).

Нехай для вписаного $\angle ABC_0$ т. A – фіксована точка даного кола, а точка C_0 прямує по $\cup AC_0B$ до вершини $B: C_0 \to C_1 \to C_2 \to \ldots \to C_n = B$.



Умовні позначки:
т. B – вершина $\angle ABC$; AA', CB, C_1B, C_2B – прямі;
CC_n – дотична; α – дуга; т. O – центр кола

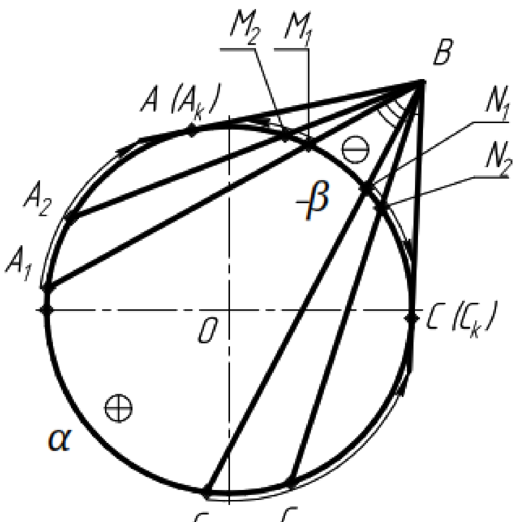
Рис. 3. Положення вершин кутів ззовні колі (вписаний кут)

В крайньому положенні, коли $C_n = B$; січна BC_0 стане дотичною BC і величина дуги між сторонами кута $\alpha = AC_0B$, а величина дуги між продовженням його сторін стане $\beta = 0$.

Випадок 4. Тільки одна вершина $\angle B$ належить колу $(0;R)$, що утворює $\angle A`BC`$ (рис. 3). Тому:

$$ABC = \frac{\alpha + 0}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{AC_0B}{2}. \qquad (3)$$

Випадок 5. На рис. 4 зображено вершину $\angle B$, яка знаходиться поза колом.



Умовні позначки:
т. B – вершина $\angle ABC$; A_1B, A_2B, C_1B, C_2B – прямі;
A_kB, C_kB – дотична; α, β – дуги; т. O – центр кола.

Рис. 4. Положення вершин кутів за межами кола

У ΔA_1BN_1 $\angle A_1N_1C_1$ – зовнішній, $\angle A_1BN_1$ *і* $\angle BA_1N_1$ – внутрішні.

Тому,

$$A_1BN_1 = A_1N_1C_1 - BA_1N_1. \quad (4)$$

Для вписаних кутів:

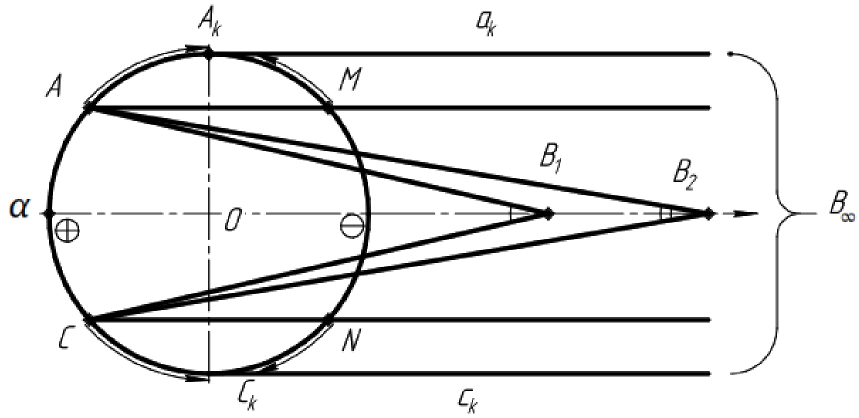
$$A_1N_1C_1 = \frac{A_1C_1}{2},\ M_1A_1N_1 = BA_1N_1 = \frac{M_1N_1}{2},$$

$$A_1BC_1 = A_1BN_1 = \frac{A_1C_1}{2} - \frac{M_1N_1}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+(-\beta)}{2}. \quad (5)$$

Випадок 6. Вершина кута віддаляється від кола в нескінченність (рис. 5). Тому можливі два наступних випадки:

1) якщо $\cup AC$ – фіксована (α – постійна), то при $B = B_\infty$ січні $(AM)||(CN)$, а $\cup MN$ конгруентна $\cup AC$ і $|-\beta|=|\alpha|$. Тобто,

$$AB_\infty C = \frac{\alpha+(-\beta)}{2} = 0^\circ. \quad (6)$$



Умовні познаки:
т. B_1, т. B_2, т. B_3 – вершини;
т. B_∞ - вершина, що прямує до безкінечності; AB_1, AB_2, CB_1, CB_2 – прямі;
AM, *CN* – січні; a_k, c_k – дотичні; α, β – дуги; т. *O* – центр кола

Рис. 5. Положення вершин кутів за межами кола вершина прямує до нескінченності

Тоді в цьому випадку вимірюється найменша величина кута (між паралельними прямими AM і CN;

2) якщо $A \to A_k$ і $C \to C_k$, то паралельні січні (AM) і (CN) у граничному положенні є паралельні дотичні $(AM) \to a_k$, $(CN) \to c_k$, де $a_k \,||\, c_k$. Тому $\alpha = A_kACC_k = 180^\circ$ і $\beta = C_kNMA_k = 180^\circ$, а кут між паралельними прямими a_k і c_k як і в попередньому випадку рівний нулю (5).

Можливі випадки положень вершини кутів відносно кола зображено на рис.6.

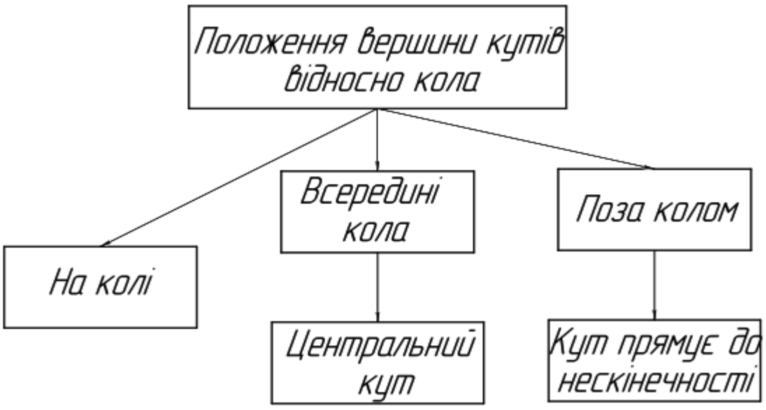


Рис.6. Структурно-параметрична схема можливих положень вершин кутів відносно кола

Застосування даної теореми має багатогранне значення, зокрема в галузях прикладної механіки, нарисної геометрії та різних галузей машинобудування для формування складних кінематичних поверхонь [3]. Одним із прикладів такого застосування останніх є моделювання спряжених гвинтових поверхонь, що виключають інтерференцію [4].

Висновки.

1. Для спрощеного використання діаграми кінематичного гвинта та раціонального проектування гвинтових поверхонь доцільно використовувати запропоновану структурно-параметричну схему вимірювання величини кутів у колі для спрощеного знаходження числових значень кутів та вирішення задач, пов’язаних з колом (колесом).
2. Наведена схема справедлива для всіх можливих випадків, при цьому величина кута, пов’язаного з колом (колесом), може змінюватись від 0° до 180°.

Література

1. Юрчук В.П., Омельчук П.К., Грубич М.В. Узагальнена теорема про вимірювання кутів, пов’язаних з колом. *Журнал «Математика в школі»*, 2006. №2. С.24-26.
2. Ванін В.В., Юрчук В.П., Грубич М.В. Математичне дослідження гвинтових ліній змінного (аксіального) кроку. *Матеріали V – Всеукраїнської науково-практичної конференції.*, НТУУ «КПІ», 2016 р., с. 47-49.
3. *Николаев А.Ф.* Диаграмма винта и ее применение к определению сопряженных линейчатых поверхностей с линейным касанием. *Тр. семинара по теории механизмов и машин.* АН СССР. Ин-т Машиноведения, т. 10. Вып. 37. М., 1950. С. 52-106.

4. *Юрчук В.П., Козловський А.Г.* Використання теореми про вимірювання кутів пов'язаних з колом в машинобудуванні. *XXI Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні проблеми геометричного моделювання"* 4 - 7 червня 2019 р., м. Мелітополь, Україна.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ УГЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОКРУЖНОСТЬЮ

Ванин В.В., Юрчук В.П., Грубич М.В., Козловский А.Г.

В статье рассмотрены возможные случаи положения величины углов относительно круга и сформулированы основы и принципы метода структурно - параметрического моделирования при измерении величины углов, связанных с окружностью. При этом метод структурно-параметрического моделирования позволяет на первой стадии, которой является размещение вершины угла, определять его величину на основе обобщенных принципов зависимостей, определяет опубликована авторами ранее теорема об измерении величины углов, связанных с окружностью. Случаи положение вершины углов относительно круга были сведены к трем следующих возможных размещений, а именно: - в кругу: - на круге и за его пределами. Отдельно было выделено случаи положение вершины угла в центре круга (центральный угол) и вне круга, при условии, что вершина угла стремится к бесконечности (январе вершины угла - параллельные между собой). Большое значение такой подход имеет также при построении углов на колесе, имеющий большое значение в кинематике. Такой метод целесообразно использовать при построении геометрических зависимостей на схеме модифицированного кинематической винта, поскольку для построения сопряженных поверхностей необходимо точно определять геометрические параметры величины углов в кругу. Большое значение такой подход имеет также при построении углов на колесе, имеющий большое значение в кинематике. С помощью определения структурно-параметрических зависимостей, опираясь на рассмотренные случаи, удобно моделировать совокупность сложных геометрически сопряженных винтовых поверхностей с подобными характеристиками, меняя только соответствующие аналитические значения. Таким образом, описанные выше случаи позволяют решать определенные задачи геометрического моделирования, а благодаря вариативности величины угла (от нуля до 180 °) при его вершине делают ее является справедливо для всех возможных случаев. Поэтому, для дальнейшего моделирования *сложных геометрических поверхностей целесообразно применять данные структурно-параметрические зависимости в круге (колесе).*

Ключевые слова: величины кутов, коло, колесо, моделирование, складные геометрические поверхности, центральный кут, вписанный кут, касательная, секущая.

USE OF STRUCTURAL-PARAMETRIC MODELING IN MEASURING THE SIZE OF ANGLES RELATED TO A CIRCLE

Vanin V., Yurchuk V., Grubych M., Kozlovsky A.

The article considers the possible cases of the position of the magnitude of the angles relative to the circle and formulates the basics and principles of the method of structural - parametric modeling in measuring the magnitude of the angles associated with the circle. The method of structural-parametric modeling allows at the first stage, which is the location of the vertex of the angle, to determine its value on the basis of generalized principles of dependences, which is determined by the previously published theorem on measuring the magnitude of angles associated with a circle. The cases of the position of the vertex of the angles relative to the circle were reduced to the following three possible placements, namely: - in the circle: - on the circle and outside it. Separately, there were cases of position of the vertex of the angle in the center of the circle (central angle) and outside the circle, provided that the vertex of the angle goes to infinity (secant vertices of the angle - parallel to each other). This method should be used when constructing geometric dependences on the scheme of the modified kinematic screw, because to construct conjugate surfaces it is necessary to accurately determine the geometric parameters of the magnitude of the angles in the circle. This approach is also important when constructing angles on the wheel, which is of great importance in kinematics. By determining the structural-parametric dependences, based on the considered cases, it is convenient to model a set of complex geometrically conjugate helical surfaces with similar characteristics, changing only the corresponding analytical values. Accordingly, the cases described above allow us to solve certain problems of geometric modeling, and due to the variability of the value of the angle (from zero to 180 °) at its apex make it true for all possible cases. Therefore, for further modeling of complex geometric surfaces it is expedient to use these structural-parametric dependences in a circle (wheel).

Keywords: a magnitude of angles, circle, a wheel, modeling, difficult geometrical surfaces, a central angle, an inscribed angle, a tangent, secant.