УДК 514.18

АНАЛІЗ РОБОТИ АЛГОРИТМУ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУСА НА ЕЛЕМЕНТАРНИХ АЛГЕБРИЧНИХ ФУНКЦІЯХ

Сидоренко Ю.В., к.т.н.,
Городецький М.В.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)

У статті проводиться аналіз роботи інтерполяційної функції Гауса на прикладі елементарних математичних функцій, результати порівнюються з поліномом Лагранжа, а також розглядається удосконалення Гаус-функції за рахунок зміни значень варіативного коефіцієнта α, що призводить до зменшення похибки інтерполяції.

У процесі роботи математичних моделей використовують розрахунковий апарат з різним функціональним наповненням. Одним з видів роботи з даними, отриманими під час експериментальних досліджень, є інтерполяція. Розрахунковий апарат математичних моделей налічує багато різних методів інтерполяції, та на практиці найчастіше застосовується поліном Лагранжа як класичний метод поліноміальної інтерполяції.

У статті наведені результати роботи деяких алгоритмів інтерполяції. Розглянуто та проаналізовано результати інтерполяції елементарних алгебричних функцій класичним методом Лагранжа та трьома видами інтерполяційної функції Гауса з невеликою кількістю вузлів інтерполяції та з постійним кроком. Проведено тестування цих методів зі змінним кроком інтерполяції. Крім того, наведені результати інтерполяції при зміні варіативного параметра α, зроблено висновки щодо доцільності використання зміни цього параметра для різних функцій.

Для аналізу обробки довільних функцій також розглядається інтерполяція експериментальних даних за допомогою інтерполяційної функції Гауса на прикладі розповсюдження COVID-19 на території України, зроблено висновки щодо застосування різних значень варіативного параметру для інтерполяції експериментальних даних з мінімальною похибкою.

На основі застосування математичного апарату інтерполяційної функції Гауса була створена комп’ютерна система аналізу роботи Гаус-функції на прикладі елементарних математичних функцій з постійним та змінним кроками, та з можливістю керувати значенням варіативного параметру, що дозволило зменшити похибку інтерполяції.

Ключові слова: інтерполяція, інтерполяційна функція Гауса, похибка інтерполяції, варіативний коефіцієнт.

Постановка проблеми. Використання поліному Лагранжа в задачах інтерполяції може призводити до осциляцій при великій кількості вузлів, оскільки степінь поліному Лагранжа дорівнює кількості заданих точок, а чим вища ступінь інтерполюючого поліному, тим більші похибки при інтерполяції. Поліном Лагранжа має і інші недоліки. Наприклад, відомо, що на виникнення небажаних осциляцій впливає різка зміна кривизни функції. Також на похибку обчислення може вплинути нерівномірний крок інтерполяції. Цей недолік було вирішено перевірити за допомогою комп'ютерного експерименту та запропонувати інші методи інтерполяції, за допомогою яких цього недоліку можна уникнути. Таким методом є інтерполяційний метод Гауса та його модифікації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У попередніх публікаціях було проведено параметризацію інтерполяційної функції Гауса та наведено способи побудови гладких ліній у такий спосіб [1], були наведені приклади застосування параметричних інтерполяційних кривих Гауса у хімії та фізиці [2,3]. Аналіз роботи Гаус-функції показав, що на похибку обчислення може впливати як різні варіанти функції [4], так і значення варіативного параметру α, що входить до формули обчислень. Розширення варіативності інтерполяційної функції Гауса є важливою проблемою у наш час.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є удосконалення інтерполяційної функції Гауса для розв'язання задач інтерполяції зі змінним кроком, створення програмного забезпечення для дослідження роботи різних варіантів Гаус-функції в залежності від умов поставленої задачі та адаптація методу до сучасних вимог моделювання.

Основна частина. У попередніх публікаціях інтерполяційна функція Гауса була визначена як сума функцій щільності нормального закону розподілу, яка у заданих вузлах x_i отримує значення y_i, і має такий вигляд [1]:

$$G(x)=\tilde{y}_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2}+\tilde{y}_2 e^{-\alpha(x-x_2)^2}+\ldots+\tilde{y}_n e^{-\alpha(x-x_n)^2}.$$

Для отримання параметричної і сумарної функцій Гауса [2,3] необхідно виразити змінні через параметр t:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},$$

$$x(t)=\tilde{x}_1 e^{-\alpha(t-t_1)^2}+\tilde{x}_2 e^{-\alpha(t-t_2)^2}+\ldots+\tilde{x}_n e^{-\alpha(t-t_n)^2};$$

$$y(t) = \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t-t_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t-t_n)^2}.$$

У випадку параметричної функції Гауса t приймає значення 0,1,…,n-1; а у сумарній функції - дорівнює набігаючій довжині ламаної.

Зазвичай такий підхід дозволяє інтерполювати замкнені каркаси точок. Але його можна застосовувати і у випадку однозначних функцій. Параметричну функцію доречно застосовувати у випадку постійного кроку інтерполяції, а сумарну - при нерівномірному кроці.

Для аналізу роботи Гаус-функцій та порівняння результатів з поліномом Лагранжа була створена комп'ютерна система за допомогою якої були отримані такі результати.

Якщо кількість точок інтерполяції невелика (наприклад, 6 вузлів) та крок обрано постійним, то поліном Лагранжа для більшості випадків має найменшу похибку з обраних методів. На рис. 1 для прикладу наведено функцію $y = \sqrt{x}$.

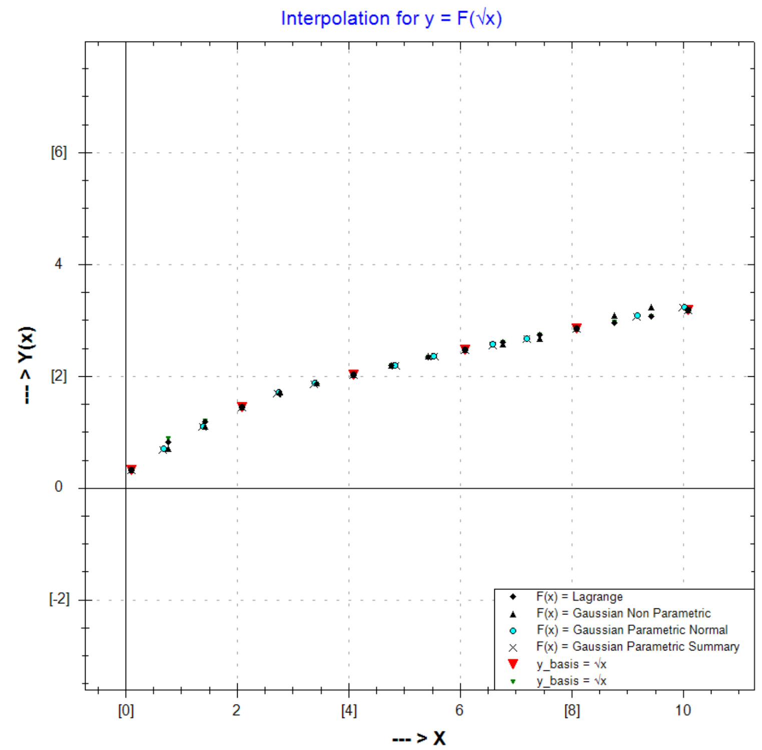

Рис. 1. Інтерполяція функції $y = \sqrt{x}$ з постійним кроком

X є [0,1;10,1]. Кількість точок = 6

Крок = [1 = 0,17 2 = 0,25 3 = 0,33 4 = 0,42 5 = 0,50 6 = 0,58]

Оцінка похибки алгоритмів:

Lagrange	0,0000002952253100
Gaussian Non Parametric	0,0000121249819220
Gaussian Parametric Normal	0,0000121249813968
Gaussian Parametric Summary	0,0000265981724273

Але у випадку, коли крок змінний, поліном Лагранжа може давати осциляції, і його у таких випадках використовувати недоцільно, так як наявність осциляцій може нівелювати результат обчислень. Для усунення великих похибок, інтерполяцію краще проводити за допомогою різних варіантів інтерполяційної функції Гауса: звичайної, параметричної та сумарної[4].

На рис. 2 наведено результати інтерполяції тієї ж функції $y = \sqrt{x}$ та вказані похибки кожного з обраних методів.

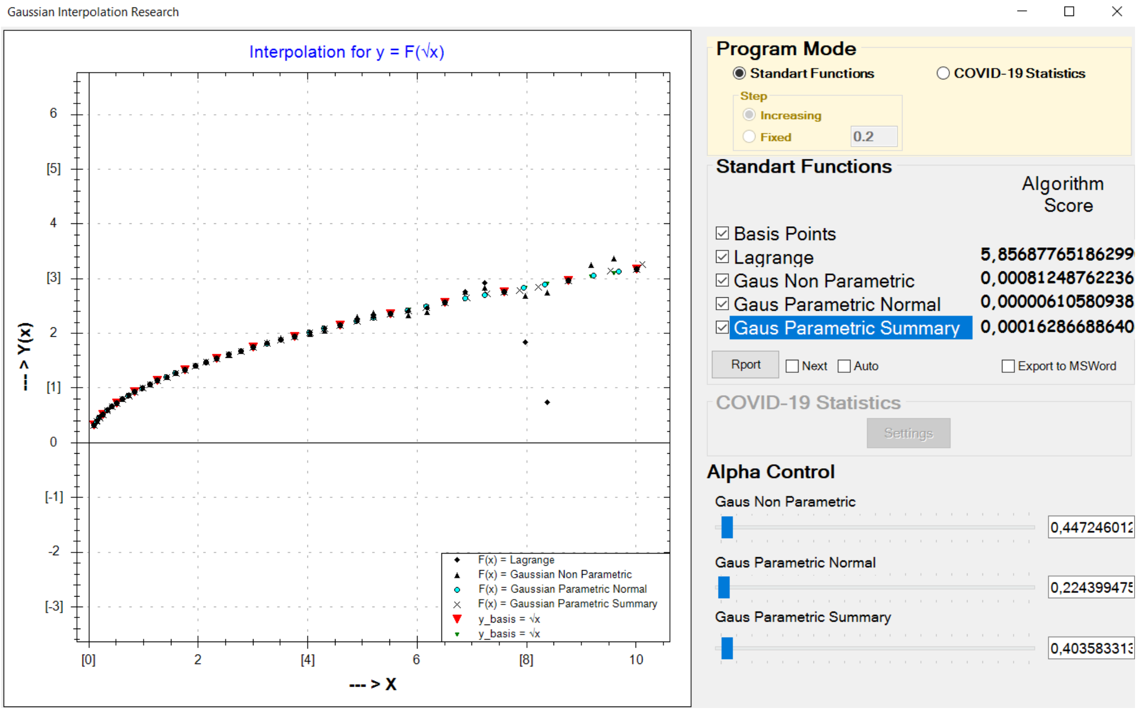

Рис. 2. Інтерполяція функції $y = \sqrt{x}$ зі змінним кроком

X є [0,1;10,1]. Кількість точок = 15

Крок = [1 = 0,17 2 = 0,25 3 = 0,33 4 = 0,42 5 = 0,50 6 = 0,58 7 = 0,67 8 = 0,75 9 = 0,83 10 = 0,92 11 = 1,00 12 = 1,08 13 = 1,17 14 = 1,25 15 = 1,33]

Оцінка похибки алгоритмів:

Lagrange	5,85687765186299
Gaussian Non Parametric	0,00081248762236
Gaussian Parametric Normal	0,00000610580938
Gaussian Parametric Summary	0,00016286688640

За рахунок зміни значення варіативного параметру α похибку кожного з методів Гауса можна зменшувати, для чого було запропоновано вводити цей коефіцієнт довільно, і стежити за зміною похибки. Таким чином було отримано оптимальні значення варіативного коефіцієнту для різних алгебричних функцій.

На рис. 3 наведено результати інтерполяції функції $y = \sqrt{x}$ та вказані похибки кожного з обраних методів із застосуванням зміненого коефіцієнту α.

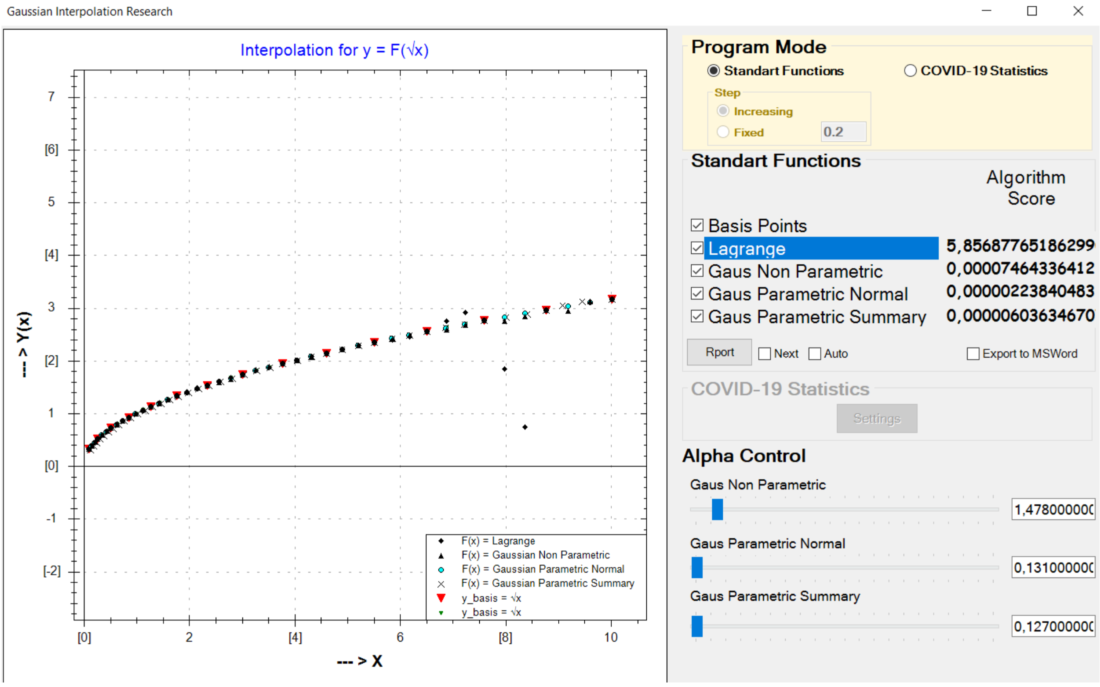

Рис. 3. Інтерполяція функції $y = \sqrt{x}$ зі змінним кроком

Оцінка похибки алгоритмів:

Lagrange	5,85687765186299
Gaussian Non Parametric	0,00007464336412
Gaussian Parametric Normal	0,00000223840483
Gaussian Parametric Summary	0,00000603634670

Для перевірки роботи алгоритму інтерполяційної функції Гауса на експериментальних даних було запропоновано провести інтерполяцію на прикладі розповсюдження захворювання COVID-19 на території України. Приклади роботи алгоритму представлено на рис. 4.

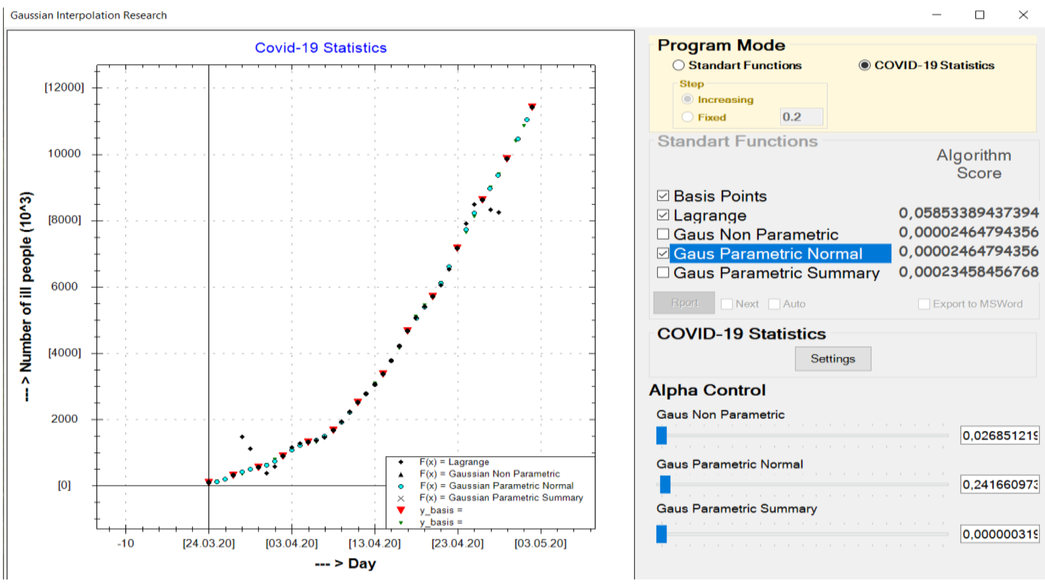

Рис. 4. Розповсюдження COVID-19 на території України

Висновки. У результаті роботи було проведено комп'ютерний аналіз чотирьох методів інтерполяції, а саме: класичного методу Лагранжа, звичайного методу Гауса, параметричного та сумарного методів Гауса. Дослідження було проведено для низки елементарних алгебричних функцій, отримано похибки всіх перелічених методів, наведено результати інтерполяції при різних значеннях варіативного параметру α, проведено інтерполяцію експериментальних даних на прикладі даних з розповсюдження захворювання COVID-19 на території України.

Література

1. Сидоренко Ю.В. Побудова гладких ліній за допомогою параметризованих функцій Гаусса. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.:КДТУБА, 2001. Вип.69. С.63-67.
2. Сидоренко Ю.В. Параметрична інтерполяційна функція Гауса. Комп'ютерне моделювання в хімії, технологіях і системах сталого розвитку. КМХТ, 2014: *Збірник наукових статей Четвертої міжнар. наук.- прак. конф.* Київ:НТУУ "КПІ", 2014. С.67-73.
3. Сидоренко Ю.В., Третяк В.А. Обчислення коефіцієнта об'ємної теплоємності при моделюванні процесів плавлення сплавів. ScienceRise. 2015. № 5/2 (10). С. 60-64.
4. Сидоренко Ю.В., Городецький М.В. Варіанти інтерполяційної функції Гауса. *Сучасні проблеми наукового забезпечення енергетики: Матеріали XVII Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених та студентів, м. Київ, 23–26 квітня 2019 р.* У 2 т. К.: "КПІ ім. Ігоря Сікорського", 2019. Т.2. С.87.

АНАЛИЗ РАБОТЫ АЛГОРИТМА ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ГАУССА НА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Сидоренко Ю.В., Городецкий Н.В.

В статье проводится анализ работы интерполяционной функции Гаусса на примере элементарных математических функций, результаты сравниваются с полиномом Лагранжа, а также рассматривается усовершенствование Гаусс-функции за счёт изменения значений вариативного коэффициента α, что приводит к уменьшению погрешности интерполяции.

В процессе работы математических моделей используют расчетный аппарат с различным функциональным наполнением. Одним

из видов работы с данными, полученными в ходе экспериментальных исследований, является интерполяция. Расчетный аппарат математических моделей насчитывает много различных методов интерполяции, но на практике чаще всего применяется полином Лагранжа как классический метод полиномиальной интерполяции.

В статье приведены результаты работы некоторых алгоритмов интерполяции. Рассмотрены и проанализированы результаты интерполяции элементарных алгебраических функций классическим методом Лагранжа и тремя видами интерполяционной функции Гаусса с небольшим количеством узлов интерполяции и с постоянным шагом. Проведено тестирование этих же методов с переменным шагом интерполяции. Кроме того, приведены результаты интерполяции при изменении вариативного параметра α, сделаны выводы о целесообразности использования изменения этого параметра для различных функций.

Для анализа обработки произвольных функций также рассматривается интерполяция экспериментальных данных с помощью интерполяционной функции Гаусса на примере распространения COVID-19 на территории Украины, сделаны выводы по применению различных значений вариативного параметра для интерполяции экспериментальных данных с минимальной погрешностью.

На основе применения математического аппарата интерполяционной функции Гаусса была создана компьютерная система анализа работы Гаусс-функции на примере элементарных математических функций с постоянным и переменным шагом и с возможностью управлять значением вариативного параметра, что позволило уменьшить погрешность интерполяции.

Ключевые слова: интерполяция, интерполяционная функция Гаусса, погрешность интерполяции, вариативный коэффициент.

ANALYSIS OF GAUSSIAN INTERPOLATION FUNCTION ALGORITHM ON ELEMENTARY ALGEBRAIC FUNCTIONS

Sydorenko Iu., Horodetskyi M.

The paper deals with an analysis of Gaussian interpolation function algorithm on elementary algebraic functions, the results have been compared with the Lagrange polynomial and the algorithm is improved by changing the variational coefficient α, that lead to decreasing interpolation error.

Set of mathematical tools with different functional content are used with working mathematical model. Interpolation is one of the types of work with experimental data. Set of tools of mathematical models has many different interpolation methods, but Lagrange polynomial is used most often on practice as classic method of polynomial interpolation.

The results of some interpolation algorithms are presented in the article. Results of interpolation of elementary algebraic functions by classical Lagrange method and three types of Gaussian interpolation functions with a small number of interpolation nodes and a steady step have been considered and analyzed. These methods have been tested with variable interpolation step. In addition, the results of interpolation with different variable parameter α are presented. It has been concluded that it is appropriate to change this parameter for different functions.

For the arbitrary function analysis, also consider the interpolation of experimental data using the Gauss interpolation function on the example of COVID-19 distribution in Ukraine. It has been concluded about the use of different values of the variable parameter for the interpolation of experimental data with minimal error.

Based on using Gauss interpolation function, computer system for analyzing a working principle of the Gauss function by the example of elementary mathematical functions with constant and variable steps and with ability to control the value of the variable parameter, which reduced the interpolation error has been created.

Keywords: interpolation, Gaussian interpolation function, interpolation error, variable coefficient.