УДК 514.18

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ПОКРИТТЯ ЗАДАНОЇ ОБЛАСТІ НЕОПУКЛИМИ БАГАТОКУТНИКАМИ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Соболь О.М., д.т.н.,
Кравців С.Я., к.т.н.
Національний університет цивільного захисту України
(м. Харків, Україна)

В даній роботі було розглянуто математичну модель покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками з урахуванням наступних обмежень: мінімум площі взаємного перетину об’єктів покриття; мінімум площі перетину об’єктів покриття та доповнення заданої області до двовимірного простору; параметри розміщення об’єктів покриття мають належати точкам у заданих підобластях із урахуванням пріоритетних підобластей; максимальне покриття заданих підобластей відповідними об’єктами; належність заданих підобластей об’єктам покриття; належність пріоритетних підобластей областям перетину заданої кількості об’єктів покриття; обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об’єктів покриття.

Аналіз загальної моделі покриття заданих областей свідчить про те, що дана задача відноситься до класу задач комбінаторної оптимізації, тобто для одержання її розв’язку необхідно здійснити перебір припустимих варіантів покриття, причому розв’язком буде той варіант, який забезпечує мінімум цільової функції.

В статті для одержання оптимального розв’язку задачі запропоновано модифікований метод Монте-Карло. Розроблений метод дозволяє знайти локальний екстремум цільової функції. Для реалізації модифікованого методу Монте-Карло необхідно задати кількість оптимізаційних серій. Потім необхідно побудувати перший рівень дерева рішень. На рівні дерева рішень випадковим чином обираються точки, в яких розміщується початок локальної системи координат об’єкта покриття. Здійснюється перевірка виконання обмежень задачі. Якщо дані обмеження повністю не виконано, то проводиться побудова наступного рівня дерева, в якому вже не враховується точка, що була обраною на попередньому рівні. Таким чином, процес побудови рівнів дерев рішень та випадкового вибору елементів на даних рівнях повторюється до тих пір, доки не будуть виконані всі обмеження задачі. Для кожної серії повторюється *процес побудови дерев рішень та одержання варіантів покриття. Після проведення всіх оптимізаційних серій із множини обирається той варіант покриття, для якого значення цільової функції є найменшим.*

Ключові слова: обмеження спеціального виду, загальна модель, метод Монте-Карло, дерево рішень.

Постановка проблеми. В наші дні існує велика кількість актуальних практичних задач, які у своїх постановках можуть бути зведеними до задач оптимального покриття заданої області відповідними геометричними об'єктами. Разом з тим, існує ціла низка задач покриття, розв'язання яких потребує розробки нових моделей та методів геометричного моделювання. Саме до таких відноситься задача оптимального покриття заданої області неопуклими багатокутниками з урахуванням обмежень спеціального виду.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі [1] сформульовано загальну постановку задачі оптимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. На основі побудованої загальної моделі необхідно розробити метод оптимального покриття заданої області, який має враховувати особливості даної задачі. Так, в роботі [2] було запропоновано модель та метод максимального покриття неопуклого багатокутника колами змінного радіусу, а також запропоновано новий погляд на формалізацію задач розміщення нерівних кіл у заданому колі. В результаті виділення комбінаторної структури задачі за допомогою додаткових змінних вдалося сформувати додаткову систему обмежень, що описують множину переставлень радіусів кіл. Подолати область тяжіння локальних екстремумів задачі дозволяє застосування змінних радіусів. Саме тому метод змінних радіусів насамперед слід розглядати як спосіб поліпшення локальних розв'язків задачі. Як приклад можна також навести роботу [3], в якій запропоновано покриття заданої області колами однакового радіусу.

Формулювання цілей статті. В даній роботі необхідно розробити метод оптимального покриття заданої області неопуклими багатокутниками з урахуванням обмежень спеціального виду для знаходження локального екстремуму цільової функції.

Основна частина. В роботі [1] було розроблено загальну модель оптимального покриття заданої області $S_0(m_0, u_0)$ (m_0 – метричні характеристики, u_0 – параметри розміщення $S_0(m_0, u_0)$, ($u_0 = \{0,0\}$), що являє собою початок глобальної системи координат) з урахуванням обмежень спеціального виду, яка має такий вигляд:

$$\min_{W} N\left(m_{c,1}, u_{c,1}, \ldots, m_{c,N}, u_{c,N}\right); \tag{1}$$

де W :

$$\omega_{\Omega}\left(m_{c,i}, m_{c,h}, u_{c,i}, u_{c,h}\right) \to 0; \tag{2}$$
$$i = 1, \ldots, N-1; \; h = i+1, \ldots, N;$$

$$\omega_{\Omega}\left(m_{c,i}, m_{cS_0}, u_{c,i}, u_{cS_0}\right) \to 0; \tag{3}$$
$$i = 1, \ldots, N; \; S_0 \bigcup cS_0 = R^2;$$

$$u_{c,i} \in P_{\xi}\left(x_{\xi}, y_{\xi}\right); \; i = 1, \ldots, N; \; \xi \in \left\{1, \ldots, N_{\xi}\right\}; \; N_{\xi} \geq N_k; \tag{4}$$

$$\omega_{\Omega}\left(m_{\bigcup\limits_{k=1}^{N_k} v_k}, m_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} S_{c,i}}, u_0, u_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} S_{c,i}}\right) = S\left(\bigcup_{k=1}^{N_k} v_k\left(m_k, u_0\right)\right); \tag{5}$$

$$O_{d,j}\left(x_{d,j}, y_{d,j}\right) \in \bigcap_{\mu}^{M_j} S_{c,\mu}\left(m_{c,\mu}, u_{c,\mu}\right), \; j = 1, \ldots, N_d; \tag{6}$$
$$\mu \in \left\{1, \ldots, N\right\};$$

$$m_{c,i} = f\left(t\right); \; i = 1, \ldots, N; \tag{7}$$

де N – кількість об’єктів покриття; $S_{c,i}\left(m_{c,i}, u_{c,i}\right)$, $i = 1, \ldots, N$ – об’єкти покриття підобластей $v_k\left(m_k, u_0\right)$; $v_k\left(m_k, u_0\right)$, $k = 1, \ldots, N_k$ – підобласті покриття, які являють собою неопуклі багатокутники і належать множині V; $m_{c,i} = \left\{x_{c,i,1}, y_{c,i,1}, \ldots, x_{c,i,n_{c,i}}, y_{c,i,n_{c,i}}\right\}$, $i = 1, \ldots, N$ – координати вершин у локальних системах координатах об’єктів покриття $S_{c,i}\left(m_{c,i}, u_{c,i}\right)$, $i = 1, \ldots, N$; $u_{c,i} = \left\{x_{c,i}, y_{c,i}\right\}$ – параметри розміщення початків локальних систем координат в глобальній системі координат; $G \subset V$ – підмножина, яка має пріоритет стосовно покриття та розміщення локальних систем координат об’єктів $S_{c,i}\left(m_{c,i}, u_{c,i}\right)$, $i = 1, \ldots, N$ та включає в себе підобласті $g_l\left(m_l, u_0\right) \in G$,

$l=1,\ldots,N_l$; $O_{d,j}\left(x_{d,j},y_{d,j}\right)$, $j=1,\ldots,N_d$ – точки в глобальній системі координат, які мають належати областям перетину заданої кількості M об’єктів покриття $S_{c,i}\left(m_{c,i},u_{c,i}\right)$, $i=1,\ldots,N$; $P_k\left(x_k,y_k\right)$ – точки розміщення об’єктів покриття $S_{c,i}\left(m_{c,i},u_{c,i}\right)$, $i=1,\ldots,N$, які мають належити підобластям $v_k\left(m_k,u_0\right)$, $k=1,\ldots,N_k$; $\omega_\Omega\left(m_{c,i},m_{c,h},u_{c,i},u_{c,h}\right)$ – ω-функція, що являє собою площу області взаємного перетину об’єктів покриття $S_{c,i}\left(m_{c,i},u_{c,i}\right)$, $i=1,\ldots,N$; $\omega_\Omega\left(m_{c,i},m_{cS_0},u_{c,i},u_{cS_0}\right)$ – ω-функція, що являє собою площу області перетину об’єктів покриття $S_{c,i}\left(m_{c,i},u_{c,i}\right)$, $i=1,\ldots,N$ та $cS_0\left(m_0,u_0\right)$ – доповнення області $S_0\left(m_0,u_0\right)$ до простору R^2; t – параметр, що впливає на метричні характеристики об’єктів покриття $m_{c,i}$, $i=1,\ldots,N$.

Основні характеристики загальної моделі покриття об’єктів з урахуванням обмежень спеціального виду:

– цільова функція є алгоритмічною, тобто обчислюється в процесі розв’язання задачі;

– обмеження задачі складаються з нелінійних, дискретних та кусочно-лінійних виразів;

– загальна кількість обмежень дорівнює $C_N^2+N_d+3N+1$.

Аналіз загальної моделі (1)÷(7) та її характеристик дозволив зробити висновок, що застосування існуючих методів оптимального покриття для розв’язання даної задачі є неможливим, оскільки до теперішнього часу в задачах покриття не враховувалися обмеження виду (6) та (7), причому формалізація обмеження (7) залежить від предметної області. У зв’язку з цим, необхідно розробити обґрунтований метод покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду.

Аналіз загальної моделі покриття заданих свідчить про те, що задача відноситься до класу задач комбінаторної оптимізації, тобто для одержання її розв’язку необхідно здійснити перебір припустимих варіантів покриття, причому розв’язком буде той варіант, який забезпечує мінімум цільової функції.

Для знаходження локального екстремуму цільової функції було запропоновано використання модифікованого методу Монте-Карло.

В першу чергу необхідно задати кількість оптимізаційних серій N_{series}. Далі необхідно побудувати перший рівень дерева рішень так, як це наведено на рис. 1. На даному рівні випадково обирається точка $P_{\xi}\left(x_{\xi}, y_{\xi}\right)$, $\xi \in \left\{1, \ldots, N_{\xi}\right\}$, в якій розміщується початок локальної системи координат об'єкта покриття $S_{c,1}\left(m_{c,1}, u_{c,1}\right)$. Здійснюється перевірка виконання обмежень задачі (1)÷(7). Якщо дані обмеження повністю не виконано, то проводиться побудова наступного рівня дерева, в якому вже не враховується точка, що була обраною на попередньому рівні. Таким чином, процес побудови рівнів дерев рішень та випадкового вибору елементів на даних рівнях повторюється до тих пір, доки не будуть виконані всі обмеження задачі.

Якщо одержаний варіант покриття на відповідній серії є припустимим, то він додається до множини $A = \left\{A_{\alpha}\right\}$, $\alpha = 1, \ldots$.

Для кожної серії повторюється процес побудови дерев рішень та одержання варіантів покриття.

Після проведення всіх оптимізаційних серій із множини A обирається той варіант покриття, для якого значення цільової функції (1) є найменшим.

Загальна структура модифікованого методу Монте-Карло для певної оптимізаційної серії наведена на рис. 1, причому на кожному рівні виділено елемент, який обрано випадково.

$$S_{c,1}\left(m_{c,1}, u_{c,1}\right): P_1\left(x_1, y_1\right), P_2\left(x_2, y_2\right), P_3\left(x_3, y_3\right), \ldots, P_{N_{\xi}}\left(x_{N_{\xi}}, y_{N_{\xi}}\right);$$

$$S_{c,2}\left(m_{c,2}, u_{c,2}\right): P_1\left(x_1, y_1\right), P_3\left(x_3, y_3\right), \ldots, P_{N_{\xi}}\left(x_{N_{\xi}}, y_{N_{\xi}}\right);$$

$$S_{c,3}\left(m_{c,3}, u_{c,3}\right): P_1\left(x_1, y_1\right), P_3\left(x_3, y_3\right), \ldots, P_{N_{\xi}-1}\left(x_{N_{\xi}-1}, y_{N_{\xi}-1}\right);$$

$$\vdots$$

Рис.1. Схема модифікованого методу Монте-Карло

Оцінка складності даного методу дорівнює:

$$O = N_{series} \cdot N, \tag{8}$$

де N_{series} – кількість оптимізаційних серій; N – кількість об'єктів покриття.

Недоліком даного способу є те, що можуть існувати випадки, коли задача (1)÷(8) не має розв'язків. Це можливо тоді, коли $A = \varnothing$.

Висновки. В даній роботі було розроблено модифікований метод Монте-Карло покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками з урахуванням наступних обмежень:

– мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття;

– мінімум площі перетину об'єктів покриття та доповнення заданої області до двовимірного простору;

– параметри розміщення об'єктів покриття мають належати точкам у заданих підобластях із урахуванням пріоритетних підобластей;

– максимальне покриття підобластей покриття об'єктами покриття;

– належність заданих підобластей об'єктам покриття;

– належність пріоритетних підобластей областям перетину заданої кількості об'єктів покриття;

– обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття.

Розроблений метод геометричного моделювання дозволяє здійснити комп'ютерне моделювання покриття заданої області неопуклими багатокутниками з урахуванням обмежень спеціального виду.

Подальші дослідження будуть направлені на розв'язання інших задачі, що витікають із загальної постановки, та на розробку методів геометричної оптимізації.

Література

1. Соболь О.М., Кравців С.Я. Модель покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.14. С. 171-178. URL : http://magazine.mdpu.org.ua/index.php/spm/article/view/2552.
2. Яковлев С. В., Карташов О. В., Коробчинський К. П. Метод змінних радіусів в задачі розміщення нерівних кіл. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання*: зб. тез доп. міжнар. наук.-практ. конф., м. Івано-Франківськ, 11–16 верес. 2017 р., Івано-Франківськ. 2017. С. 319–322. URL: http://itcm.comp-sc.if.ua/2017/Yakovlev.pdf.
3. Коссе А.Г. Метод раціонального розміщення пожежних депо при проектуванні і оновленні районів міста : автореф. дис. … канд. техн. наук : 21.06.02. Харків, 2001. 19 с.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ПОКРЫТИЯ ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ НЕВЫПУКЛЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Соболь А.Н., Кравцив С.Я.

В данной работе была рассмотрена математическая модель покрытия заданной области невыпуклыми многоугольниками с переменными метрическими характеристиками с учетом следующих ограничений: минимум площади взаимного пересечения объектов покрытия; минимум площади пересечения объектов покрытия и дополнения заданной области до двумерного пространства; параметры размещения объектов покрытия должны принадлежать точкам в заданной подобласти с учетом приоритетных подобластей; максимальное покрытие заданных подобластей соответствующими объектами; принадлежность заданных подобластей объектам покрытия; принадлежность приоритетных подобластей областям пересечения заданного количества объектов покрытия; ограничения специального вида, влияющие на метрические характеристики объектов покрытия.

Анализ общей модели покрытия заданных областей свидетельствует о том, что данная задача относится к классу задач комбинаторной оптимизации, то есть для получения ее решения необходимо осуществить перебор допустимых вариантов покрытия, причем решением будет тот вариант, который обеспечивает минимум целевой функции.

В статье для получения оптимального решения задачи предложен модифицированный метод Монте-Карло. Разработанный метод позволяет найти локальный экстремум целевой функции. Для реализации модифицированного метода Монте-Карло необходимо задать количество оптимизационных серий. Затем необходимо построить первый уровень дерева решений. На уровне дерева решений случайным образом выбираются точки, в которых размещается начало локальной системы координат объекта покрытия. Осуществляется проверка выполнения ограничений задачи. Если данные ограничения полностью не выполнены, то проводится построение следующего уровня дерева, в котором уже не учитывается точка, которая выбрана на предыдущем уровне. Таким образом, процесс построения уровней деревьев решений и случайного выбора элементов на данных уровнях повторяется до тех пор, пока не будут выполнены все ограничения задачи. Для каждой серии повторяется процесс построения деревьев решений и получения вариантов покрытия. После проведения всех оптимизационных серий *из множества выбирается тот вариант покрытия, для которого значение целевой функции является наименьшим*

Ключевые слова: ограничения специального вида, общая модель, метод Монте-Карло, дерево решений.

MODIFIED MONTE-CARLO METHOD FOR COVERING A PARTICULAR AREA BY NON-CONVEX POLYGONS WITH SPECIAL TYPE RESTRICTIONS

Sobol O., Kravtsiv S.

In this paper we have considered a mathematical model of covering a given area by convex polygons with variable metric characteristics, taking into account the following limitations: minimum cross-sectional area of the coverage objects; minimum area of intersection of coverage objects and addition of a given area to two-dimensional space; the placement parameters of the coverage objects must be points in the specified subregions, taking into account the priority subregions; the maximum coverage of the specified subregions of the corresponding objects; the relevance of the specified subregions to the coverage objects; the prioritization of subregions by the intersection of a given number of coverage objects; special-type restrictions that affect the metric characteristics of coverage objects.

The analysis of the general model of the set coverage indicates that the task belongs to the class of combinatorial optimization tasks, that is, in order to obtain its solution, it is necessary to search for acceptable coverage options, and the solution will be the one that provides the minimum of the objective function.

A modified Monte Carlo method is proposed in the article for a solution to the general coverage model. The developed method allows to find local solutions of the problem. To implement a modified Monte Carlo method, you must specify the number of optimization series. Then you need to build the first level of the decision tree. At the decision tree level, the points at which the local coordinate system's coordinate system originates are randomly selected. The task constraints are checked. If these constraints are not completely fulfilled, then the next level of the tree is built, in which the point selected at the previous level is no longer taken into account. Thus, the process of constructing decision tree levels and randomly selecting elements at these levels is repeated until all constraints of the problem are met. For each series, the process of building decision trees and obtaining coverage options is repeated. After performing all the optimization series from the set, the coverage option for which the value of the objective function is the lowest is selected

Keywords: special type restrictions, general model, Monte Carlo method, decision tree.