УДК 514.18

ДЕЯКІ АСПЕКТИ МОДИФІКАЦІЇ ЛЕМНІСКАТИ БЕРНУЛЛІ

Борисенко В.Д., д.т.н.,
borisenko.valery@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0857-0708
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського
Устенко І.В., к.т.н.,
ustenko.irina@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1541-2414
Устенко А.С.,
austenko0@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0546-7019
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
(м. Миколаїв, Україна)

Стаття присвячена дослідженню модифікованих лемніскат Бернуллі. Модифікується рівняння лемніскати, записане в полярній системі координат. Метою модифікації є забезпечення необхідних кутів нахилу дотичних в початковій та кінцевій точках напівпелюстки лемніскати, розташованій в області додатних значень абсцис і ординат ортогональної системи координат. Звичайна лемніската має на початку цієї системи координат кут нахилу дотичної, рівний 45°. У точці перетину пелюстки лемніскати з віссю абсцис ортогональних координат дотична до неї розташовується перпендикулярно до цієї осі. Для модифікації лемніскати в її полярне рівняння вводяться два параметри, один з яких є степенем кореня, а другий є деяким раціональним додатним або від'ємним числом, але таким, що не призводить до від'ємного значення косинуса, що знаходиться під знаком кореня. Потрібне значення кута нахилу дотичної на початку ортогональної системи координат досягається відповідним вибором значення коефіцієнта, який стоїть при полярному куті косинус-функції полярного рівняння лемніскати. Зміна кута нахилу дотичної в початковій точці пелюстки лемніскати реалізується введенням під знак кореню додаткової компоненти, яка є тригонометричною функцією потрібного кута нахилу дотичної. Розроблено метод проведення дуги модифікованої лемніскати через деяку точку, задану в площині розташування лемніскати з довільними кутами нахилу дотичних в початковій та кінцевій точках модельованої дуги модифікованої лемніскати. Запропонований метод модифікації лемніскати реалізовано у вигляді комп'ютерного коду, який дозволяє, окрім числових результатів, отримувати графічні зображення модельованих кривих на екрані монітора комп'ютера. Він може бути застосований при побудові профілів лопаток турбін і перехідних кривих залізничних колій, а також в інших практичних застосуваннях, де потрібна побудова плавної кривої за умови, що задані кути нахилу дотичних та деяка проміжна точка, через яку має пройти модельована

лінія.

Ключові слова: лемніската Бернуллі, модифікація, дотична, кривина.

Постановка проблеми. Плоскі алгебричні лінії вищих порядків мають досить широке практичне застосування. Серед цих кривих провідне місце займає крива четвертого порядку – лемніската Бернуллі. Цій кривій притаманні певні переваги, обумовлені монотонністю зміни кривини, кута нахилу дотичної тощо. Проте лемніската має і недоліки. Так, на початку ортогональної системи координат пелюстка лемніскати має кут нахилу дотичної, рівний 45°, а в точці, що знаходиться на перетині лемніскати з віссю абсцис, цей кут дорівнює 90°. Ця обставина суттєво обмежує сферу застосування лемніскатних кривих, оскільки на практиці часто буває необхідним забезпечувати різноманітні комбінації кутів нахилу дотичних в указаних точках.

Аналіз останніх досліджень. Рівняння лемніскати вперше в математичній літературі зустрілося в 1694 році в статті Я. Бернуллі про приливи та відливи. Бернуллі відзначив схожість цієї лінії з цифрою 8 і з вузловою пов’язкою, яку він назвав "лемніском" (від грецького – пов'язка). Звідси і випливає назва цієї поширеної в практичному застосуванні кривої.

Її дослідженню присвячено достатньо публікацій, деякі з яких наведені у переліку літератури [1–5]. Цікаво, що в роботі [1] показано зв'язок між лемніскатою та овалами Касіні. Найбільш повно властивості лемніскати викладені в роботі [3]. Але у всіх перелічених публікаціях розглядаються саме "традиційні" лемніскати Бернуллі.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є розробка заходів, пов’язаних із забезпеченням впливу на кути нахилу дотичних до лемніскати шляхом модифікації певним чином її рівняння в полярній системі координат, зокрема, варіюванням показника степеня та коефіцієнта, який стоїть при полярному куті, додаванням до рівняння деяких компонентів.

Основна частина. Перш за все визначимося з характеристичною властивістю лемніскати Бернуллі, яка полягає в тому, що ця крива є геометричним місцем точок M, добуток відстаней від яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (названих фокусами) є величиною сталою і дорівнює квадрату половини відстані між фокусами. Лемніската Бернуллі складається з двох пелюсток (рис. 1). Початок ортогональних координат, в яких вона побудована, є для неї подвійною точкою з дотичними $y = \pm x$. Ці дотичні є асимптотами кривої і вони взаємно перпендикулярні.

Рівняння лемніскати в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = b\sqrt{2\cos(2\varphi)},$$

де ρ, φ – полярні радіус і кут; b – параметр лемніскати.

У літературі рівняння лемніскати дуже часто записують наступним чином:

$$\rho = a\sqrt{\cos(2\varphi)}, \qquad (1)$$

де a – параметр лемніскати, який дорівнює $a = b\sqrt{2}$.

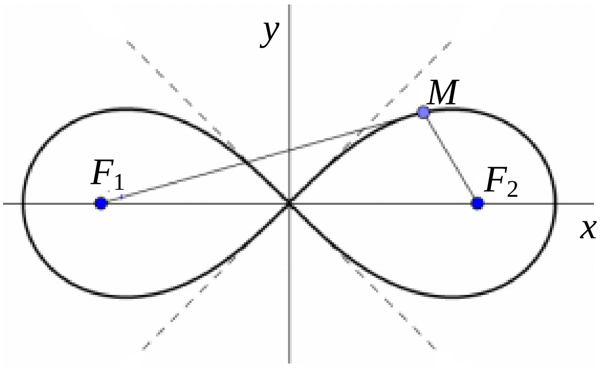

Рис. 1. Лемніската Бернуллі

З розгляду рис. 1 випливає, що "звичайна" лемніската в початковій точці ортогональної системи координат має кут нахилу дотичної, рівний 45°. Розробимо заходи, які б дозволили в цій точці мати довільний кут нахилу дотичної. Для цього в рівнянні (1) замість коефіцієнта 2, який стоїть при куті φ, візьмемо параметр *n*.

Отже, модифікуємо рівняння лемніскати та застосуємо його у більш загальному вигляді:

$$\rho = a\sqrt{\cos(n\varphi)}, \qquad (2)$$

де *n* – параметр, який є деяким раціональним додатним або від'ємним числом, але таким, що не призводить до від'ємного значення косинуса, оскільки при цьому неможливо знайти дійсний квадратний корінь.

Як показав аналіз і проведені на його підставі розрахунки, параметр *n* має визначатися в залежності від потрібного кута нахилу дотичної до лемніскати на початку ортогональної системи координат, зокрема, він знаходиться як величина, що дорівнює результату ділення 90° на значення потрібного кута нахилу дотичної:

$$n = 90/\alpha_0, \qquad (3)$$

де α_0 – кут нахилу дотичної, який береться у градусах.

Гранична величина полярного кута φ при побудові кривих має дорівнювати куту α_0. Це легко підтверджується розглядом рівняння "звичайної" лемніскати, у якій кут нахилу дотичної дорівнює 45°, а параметр *n* за формулою (3) є рівним двом.

Результати побудови шести гілок кривих за рівнянням (2) наведені на рис. 2.

Ці криві змодельовані з поступовим зменшенням кута нахилу дотичної в кінцевій точці (яка розташована на початку ортогональної системи координат) від 90° (крива *1*) з кроком 15° до значення 15° (крива *6*). При цьому параметр *n* поступово приймав значення 1,0; 1,2; 1,5; 2,0; 3,0 і

6,0. Крива *4* відповідає "традиційній" лемніскаті.

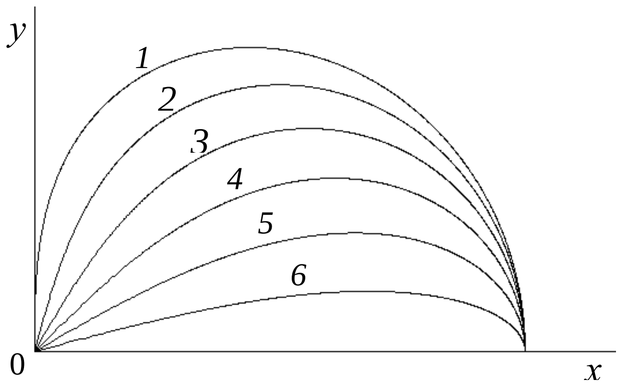

Рис. 2. Вплив параметра *n* на лемніскатні криві

Графічні дані, наведені на рис. 2, наочно підтверджують той факт, що зміною значення параметра *n* можна впливати на величину кута нахилу дотичної в точці 0. Відповідним вибором цього параметра можливо досягти потрібного значення кута нахилу дотичної в указаній точці.

З розгляду рис. 2 також випливає, що всі шість кривих в початкових своїх точках, тобто в точках, які розраховувалися з кутом φ, рівним нулю градусів, мають дотичні, розташовані вертикально, що відповідає куту їх нахилу до осі абсцис, рівному 90°. Тобто впливу на цей кут при моделюванні кривих із застосуванням рівняння (2) не відбувається.

Додамо також, що крива *1* фактично моделювалася з кутами нахилу дотичних в початковій та кінцевій точках, рівними 90°.

Для підтвердження того, що побудовані криві мають дві пелюстки на рис. 3 показані результати візуалізації кривих у повному обсязі.

Позначення кривих на рис. 3 ідентичне їх індексації, застосованій на рис. 2.

Криві, показані на рис. 3, мають дві пелюстки, які нагадують цифру 8. Вони мають дві осі симетрії. Їх також можна вважати лемніскатами, оскільки повністю відповідають критеріям Бернуллі. Хоча отримані "вісімки" мають суттєво здеформовану форму.

Повернемося до рівняння (1) і застосуємо в ньому довільне додатне значення показника кореня шляхом введення параметра *m*:

$$\rho = a\sqrt[m]{\cos(2\varphi)}, \tag{4}$$

де *m* – параметр.

Розглянемо вплив цього параметра на змодельовані криві. Побудуємо криві із застосуванням модифікованого рівняння лемніскати (4), в якому параметру m будемо надавати значення 1; 2 і 4. Побудовані при цьому криві показані на рис. 4.

З розгляду цього рисунка випливає, що всі криві мають кут нахилу дотичної в початкових своїх точках, рівний 90°, а в кінцевих точках цей кут дорівнює 45°.

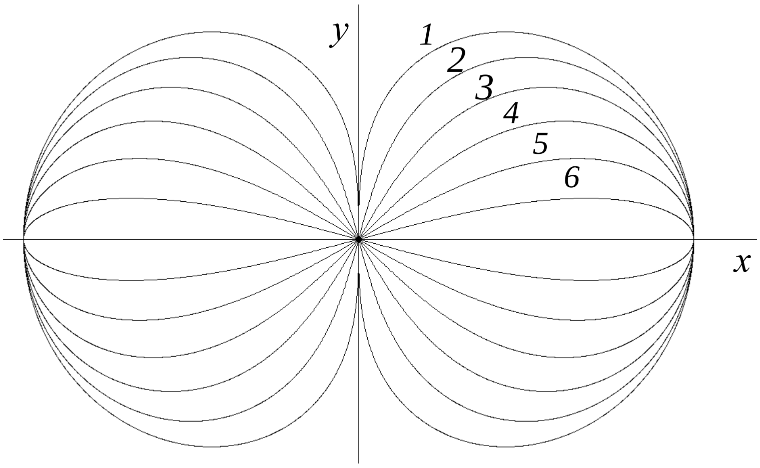

Рис. 3. Вплив параметра *n* на криві

Крива *1*, яка моделювалася з *m* = 1, фактично є полярною кривою косинуса з подвійною величиною кута φ, збільшеного в *a* разів. Крива *2*, для якої параметр *m* = 2 є результатом візуалізації "звичайної" лемніскати. І тільки крива *3* є візуалізацією модифікованої лемніскати, побудованої з *m* = 4.

Треба зазначити, що з ростом показника *m* максимальна величина ординати *y* також зростає.

Подає певний інтерес розгляд кривих, змодельованих за наступним рівнянням:

$$\rho = a\sqrt[m]{\cos(n\varphi)}, \tag{5}$$

в якому присутні обидва коефіцієнти *m* і *n*.

Подібні криві показані на рис. 5. Вони моделювалися зі значенням коефіцієнта *n* = 3, що за формулою (3) призводило до кута нахилу дотичної в початковій точці ортогональної системи координат, рівному 30°.

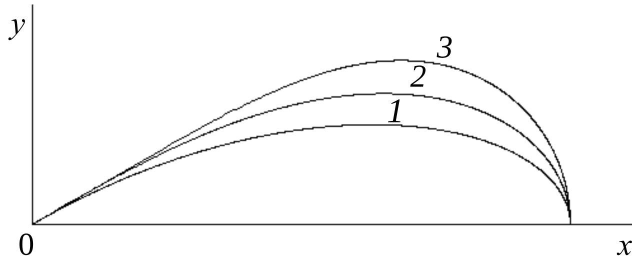

Рис. 5. Вплив параметрів *m* на форму лемніскати при *n* = 3

Параметр *m* при моделюванні цих кривих змінювався в межах, застосованих в попередньому прикладі. Але і цього разу параметр *m* не впливав на величини кутів нахилу дотичних в початкових і кінцевих точках. З його зростанням збільшувалася максимальна ордината графіків кривих. Крім того, збільшувалися також абсциси точок максимального підйому кривих.

Для зміни кута нахилу дотичної в початковій точці введемо під знак кореню додаткову компоненту Δ. За цих дій модифіковане рівняння лемніскати набуде вигляду:

$$\rho = a\sqrt[m]{\cos(n\varphi) + \Delta}.$$

Додаткова компонента має задовольняти наступним умовам: в початковій точці лемніскати $\Delta = 0$; в кінцевій точці підкореневий вираз також має дорівнювати нулю: $\cos(n\varphi) + \Delta = 0$.

Означеним умовам задовольняє вираз:

$$\Delta = -\mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi). \quad (6)$$

З розгляду цього виразу випливає, що при $n\varphi = 0$ величина $\Delta = 0$, а при $n\varphi = \pi - \alpha_1$ підкорений вираз $\cos(n\varphi) + \Delta = 0$.

Остаточно рівняння модифікованої лемніскати для моделювання кривих візьмемо у вигляді:

$$\rho = a\sqrt[m]{\cos(n\varphi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi)}\ . \quad (7)$$

Це рівняння дозволяє будувати лемніскати з різними комбінаціями кутів нахилу дотичних в початковій і кінцевій точках модельованої лінії.

На рис. 6 показані три модифіковані лемніскати, побудовані за рівнянням (7). Крім лемніскат, на цьому рисунку зображені дотичні до початкової та кінцевої точок кривої. Лемніскати моделювалися з кутами α_1 = –60° в початковій точці кривої і α_0 = 75° в кінцевій точці та різними значеннями параметра *m*. Так, крива *1* будувалася з *m* = 1,25; крива *2* – з *m* = 1,50; крива *3* – з *m* = 1,75.

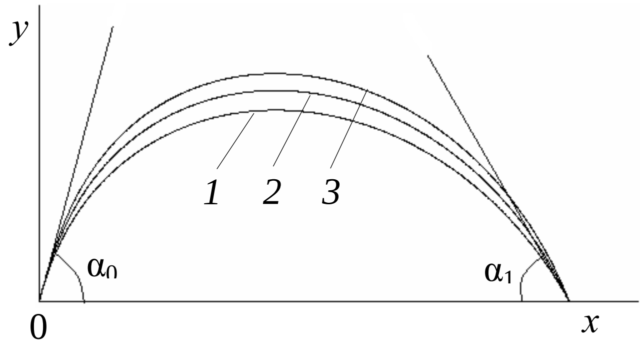

Рис. 6. Модифіковані лемніскати

З розгляду рис. 6 випливає, що всі три лемніскати в точці 0 мають однаковий кут нахилу дотичної. Це свідчить про те, що параметр *m* не впливає на величину кута α_0. У той же час кут нахилу дотичної в початкових точках лемніскат залежить від параметра *m*. Зі зростанням цього параметра кут нахилу дотичної α_1 збільшується.

Таким чином, для забезпечення заданої величини кута α_1 необхідно розробити алгоритм визначення величини параметра *m*.

Відомо, що кут нахилу дотичної до кривої пов’язаний з похідною від рівняння, яким описується крива. Зазначимо, що визначення похідної функції, заданої в полярних координатах, пов’язане з певними проблемними моментами. Похідну краще визначати в ортогональних координатах, розглядаючи досліджувану функцію як параметричну. При цьому параметром виступає полярний кут φ.

Похідна параметричної функції dy/dx є результатом ділення похідної $dy/d\varphi$ на похідну $dx/d\varphi$.

Ортогональні координати будь-якої точки полярно заданої кривої визначаються як добуток полярного радіуса на відповідну тригонометричну функцію полярного кута. Диференціюємо ці залежності і отримуємо вираз для похідної dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi}. \tag{8}$$

Полярний радіус ρ модифікованої лемніскати визначається залежністю (7), яку для зручності запишемо у вигляді:

$$\rho = a\left[\cos(n\varphi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi)\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{9}$$

Для розрахунку похідної dy/dx за виразом (8) необхідно мати похідну ρ'. Знайдемо цю похідну, для чого продиференціюємо залежність (7) по полярному куту φ. У підсумку будемо мати:

$$\begin{gathered}\rho' = \frac{-na}{m}\left[\cos(n\varphi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi)\right]^{\frac{1-m}{m}} \times \\ \times\left[\sin(n\varphi) + \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\cos(n\varphi)\right].\end{gathered} \tag{10}$$

Підставивши (9) і (10) до формули (8), отримаємо вираз для розрахунку похідної. Арктангенс цієї похідної визначатиме величину кута нахилу дотичної. Прийнявши кут φ рівним нулю градусів, матимемо значення кута нахилу дотичної в початковій точці кривої.

Для визначення параметра *m*, який має забезпечувати заданий кут нахилу дотичної в початковій точці кривої, розроблено процедуру-функцію. В цій процедурі розраховувалася величина похідної, а, отже, кут нахилу дотичної при деякому значенні параметра *m*. Отриманий кут порівнювався з заданим кутом. Різниця кутів, яка при цьому утворювалася, зводилася до нуля завдяки застосуванню алгоритму, запропонованому в роботі [6].

На рис. 7 наведені результати моделювання трьох модифікованих лемніскат, отриманих при трьох різних кутах нахилу дотичної в початкових точках кривих. Цей кут зменшувався від –60° до –80° з кроком 10°. Кут нахилу дотичних в кінцевих точках кривих був однаковим і дорівнював 75°. Відрізки прямих, проведених в початкових точках лемніскатних кривих, наочно свідчать про те, що вони є дотичними до цих кривих.

Треба також зазначити, що криві моделювалися не тільки з поступовим зменшенням кута α_1, але й зі збільшенням параметра лемніскати *a*. Зроблено це було з метою відокремлення кривих шляхом віддалення кожної кривої від іншої, що надало можливість уникнути взаємного накладення кривих в початковій точці.

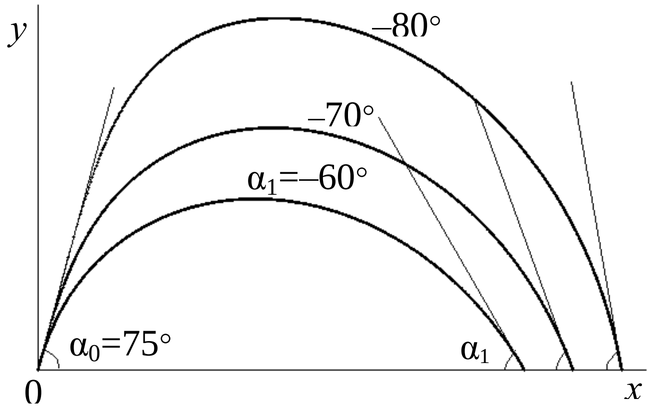

Рис.7. Вплив кута α_1 на модифіковані лемніскати

У результаті проведених розрахунків були знайдені величини параметра m, які забезпечували задані кути нахилу дотичних в початкових точках. Зокрема, вони мали наступні значення: 1,200; 2,013; 4,288. Максимальна похибка визначення параметра m становила $4{,}275 \times 10^{-6}$, що є вельми прийнятним для практичного застосування.

Проведені додаткові розрахунки при сталому значенні параметра a лемніскати показали, що цей параметр не вплинув на зазначені вище результати розрахунків.

Розглянемо задачу, пов'язану з проведенням дуги модифікованої лемніскати через точку, довільно задану в площині розташування лемніскати. Основним питанням в розв'язанні цієї задачі є визначення параметра m.

Абсцису деякої заданої точки A можна подати наступним чином:

$$x_A = a\sqrt[m]{\cos(n\varphi_A) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi_A)}\cos\varphi_A. \tag{11}$$

Оскільки координати точки A відомі, то полярний кут φ_A цієї точки можна визначити за формулою:

$$\varphi_A = \mathrm{arctg}\frac{y_A}{x_A}.$$

Логарифмуючи (11), після перетворень отримаємо вираз для визначення параметра *m:*

$$m = \frac{\ln\left[\cos(n\varphi_A) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi_A)\right]}{\ln\dfrac{x_A}{a\cos\varphi_A}}. \tag{12}$$

На рис. 8 побудована довільна дуга модифікованої лемніскати (середня крива), знизу та зверху якої проведені дві криві. На цих кривих маленькі кола відповідають точкам, через які треба було провести модифіковані лемніскати.

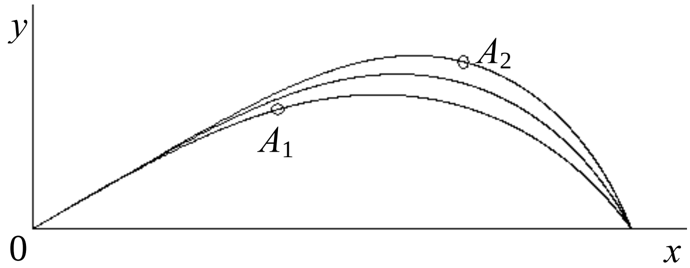

Рис. 8. Проведення модифікованих лемніскат через задані точки

Як випливає з розгляду рис. 8 поставлена задача була розв’язана, тобто були за виразом (12) визначені величини параметрів m такі, які забезпечили проходження модифікованих лемніскат через задані точки A_1 і A_2.

Дивлячись на криві, показані на рис. 8, можна прийти до наступних висновків:

1) всі криві на початку ортогональної системи координат мають однаковий нахилу дотичних;

2) у початкових точках модифіковані лемніскати мають різні кути нахилу дотичних. Це пов’язано з тим, що визначення параметрів m було зорієнтовано головним чином на забезпечення проходження модифікованих лемніскат через задані точки;

3) отримані результати свідчать про те, що в застосованому рівнянні (7), яким подаються модифіковані лемніскати, не вистачає ступенів свободи для одночасного проведення кривих через задані точки та збереженні кутів нахилу дотичних в початкових точках кривих. Таким чином, потрібна розробка додаткових заходів для збереження кутів нахилу дотичних в точці, де полярний кут дорівнює нулю.

Кривина кривої k, заданої в полярних координатах, визначається наступною формулою:

$$k = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\left[\rho^2 + (\rho')^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

Як випливає з розгляду цієї формули, для визначення кривини кривої, заданої в полярних координатах, необхідно, крім полярного радіуса, мати вирази для першої та другої похідних.

Для знаходження першої похідної запишемо рівняння модифікованої лемніскати у вигляді:

$$\rho^m = a^m\left[\cos(n\varphi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi)\right].$$

Диференціюванням обох частин цього рівняння по φ отримаємо:

$$m\rho^{m-1}\rho' = -na^m\left[\sin(n\varphi) + \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\cos(n\varphi)\right],$$

звідки

$$\rho' = -\frac{na^m\left[\sin(n\varphi) + \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\cos(n\varphi)\right]}{m\rho^{m-1}}. \qquad (14)$$

Для знаходження другої похідної треба продиференціювати записаний вище вираз першої похідної по φ:

$$m(m-1)\rho^{m-2}\rho' + m\rho^{m-1}\rho'' = -n^2a^m\left[\cos(n\varphi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi)\right].$$

Після перетворень цей вираз набуде вигляду:

$$\rho'' = -\frac{m(m-1)\rho^{m-2}\rho' + n^2a^m\left[\cos(n\varphi) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha_1)\sin(n\varphi)\right]}{m\rho^{m-1}}. \qquad (15)$$

Отже, підставивши до формули (13) вирази (9), (14) і (15), матимемо можливість розраховувати кривину модифікованої лемніскати для кутів φ, які варіюються в області від нуля градусів до кута α_0.

На рис. 9 для прикладу наведені графіки розподілу кривини в залежності від координати *x* трьох кривих, які показані на рис. 8. Криві пронумеровані, їх нумерація збігається з нумерацією вихідних кривих. Цифрою *2* позначена крива, відносно якої будувалися дві інші криві.

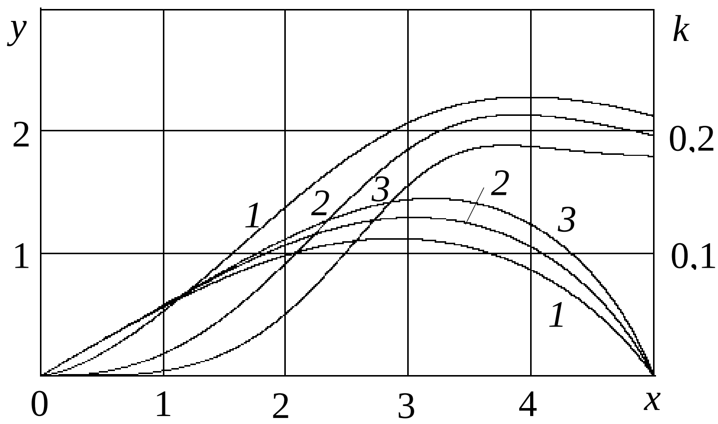

Рис. 9. Графіки модифікованих лемніскат та їх кривини

Як випливає з розгляду цього рисунку кривина кривої *2* при зростанні кута φ дещо збільшується, а потім плавно зменшується до нульового значення. Тобто вона є одноекстремальною кривою.

Щодо інших двох кривих розподілу кривини, то характер їх проходження майже ідентичний кривій. Деякі відмінності на початковій ділянці (з точки зору кута φ) має крива *3*.

Наприкінці всі три криві мають нульове значення кривини. Найбільшу ділянку зі значенням кривини, яке прагне до нульового значення, має крива *3*. Модифікована лемніската з таким же номером на своєму початку має найбільший кут нахилу дотичної, їй також притаманний найбільший підйом. Проте після максимального підйому крива стрімко "спрямляється". Наслідком цього є швидке зменшення кривини.

Таким чином, показано, що запропонованими заходами можна впливати на лемніскати, модифікуючи їх з метою отримання бажаного результату.

Висновки

1. Виконаний аналіз геометричних особливостей лемніскати Бернуллі показав, що ця крива цікавить фахівців різних галузей науки та техніки, проте існують певні недоліки, притаманні лемніскаті, подолання яких змогло б поширити сферу її практичного застосування.
2. Запропоновані заходи дозволили впливати на кути нахилу дотичних в початковій та кінцевій точках ділянки кривої, розташованої в області додатних значень абсцис та ординат її точок.
3. Показано, що відповідним вибором застосованих параметрів модифікованої лемніскати можна забезпечити проходження кривої через задану точку площини.
4. Подальші дослідження мають бути спрямовані на поширення сфери застосування модифікованих лемніскат.

Література

1. Иванов В.Н. Овал Кассини, лемниската и лемнискатные поверхности. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 5. С. 3–9.
2. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. Москва: ГИТТЛ. 1952. 32 с.
3. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 294 с.
4. Farin G. Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A Practical Guide. Academic Press, 1990, 444 p.
5. Lockwood E.H. A book of curves. Cambridge: Cambridge university press. 1961. 199 p.
6. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 1980. 279 с.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МОДИФИКАЦИИ ЛЕМНИСКАТЫ БЕРНУЛЛИ

Борисенко В.Д., Устенко И.В., Устенко А.С.

Статья посвящена исследованию модифицированных лемнискат. Модифицируется уравнение лемнискаты, записанное в полярной системе координат. Целью модификации является обеспечение необходимых углов наклона касательных в начальной и конечной точках *половины лепестка лемнискаты, расположенной в области положительных значений абсцисс и ординат ортогональной системы координат. Обычная лемниската имеет в начале этой системы координат угол наклона касательной, равный 45°. В точке пересечения лепестка лемнискаты с осью абсцисс ортогональных координат касательная к ней располагается перпендикулярно к этой оси. Для модификации лемнискаты в ее полярное уравнение вводятся два параметра, один из которых является степенью корня, а второй – некоторым рациональным положительным или отрицательным числом, но таким, который не приводит к отрицательному значению косинуса, находящегося под знаком корня. Нужное значение угла наклона касательной в начале ортогональной системы координат достигается соответствующим выбором значения коэффициента, стоящего при полярном угле косинус-функции уравнения лемнискаты. Изменение угла наклона касательной в начальной точке лепестка лемнискаты реализуется введением под знак корня дополнительной компоненты, являющейся тригонометрической функцией нужного угла наклона касательной. Разработан метод проведения дуги модифицированной лемнискаты через некоторую точку, заданную в плоскости расположения лемнискаты с произвольными углами наклона касательных в начальной и конечной точках моделируемой дуги модифицированной лемнискаты. Предложенный метод модификации лемнискаты реализован в виде компьютерного кода, позволяющего, кроме числовых результатов, получать графические изображения моделируемых кривых на экране монитора компьютера. Метод может быть применен при построении профилей лопаток турбин и переходных кривых железнодорожных путей, а также в других практических приложениях, где требуется построение плавной кривой при условии, что заданные углы наклона касательных и некоторая промежуточная точка, через которую должен пройти моделируемая линия.*

Ключевые слова: лемниската, модификация, касательная, кривизна.

SOME ASPECTS OF MODIFICATION OF BERNULLI'S LEMNISCATE

Valeriy Borisenko, Iryna Ustenko, Andrey Ustenko

The article is devoted to the study of modified lemniscates. The lemniscate equation written in the polar coordinate system is modified. The purpose of the modification is to provide the necessary angles of inclination of the tangents at the start and end points of the half of the lemniscate petal located in the region of positive values of the abscissas and ordinates of the orthogonal coordinate system. An ordinary lemniscate has a tangent inclination angle of 45° at the origin of this coordinate system. At the point of *intersection of the petals of the lemniscate with the abscissa axis of the orthogonal coordinates, the tangent to it is perpendicular to this axis. To modify the lemniscate, two parameters are introduced into its polar equation, one of which is the power of the root, and the second is some rational positive or negative number, but one that does not lead to a negative cosine value under the root sign. The required value of the angle of inclination of the tangent at the origin of the orthogonal coordinate system is achieved by the appropriate choice of the value of the coefficient at the polar angle of the cosine function of the lemniscate equation. The change in the angle of inclination of the tangent at the starting point of the petal of the lemniscate is implemented by introducing an additional component under the root sign, which is a trigonometric function of the desired angle of inclination of the tangent. A method is developed for drawing the arc of the modified lemniscate through a certain point specified in the plane of the lemniscate with arbitrary angles of inclination of the tangents at the initial and end points of the modeled arc of the modified lemniscate. The proposed method for modifying the lemniscate is implemented in the form of a computer code that allows, in addition to numerical results, to obtain graphic images of the simulated curves on the computer monitor screen. The method can be applied when constructing profiles of turbine blades and transition curves of railway tracks, as well as in other practical applications where it is required to build a smooth curve, provided that the given angles of inclination of the tangents and some intermediate point through which the modeled line must pass.*

Key words: lemniscate, modification, tangent, curvature.

References

1. Ivanov, V.N., (2014). *Oval Cassini, lemniscate and lemniscate surfaces. Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*, 5, 3–9 {in Ukrainian}.
2. Markushevich, A.I.(1952). *Great curves.* Moscow: GITTL {in Russian}.
3. Savelov, A.A.(1960). *Flat curves. Taxonomy, properties, applications (reference guide).* Moscow: Gosudarstvennoe izdatel`stvo fiziko-matematicheskoj literatury` {in Russian}.
4. Farin, G.(1990). *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A Practical Guide.* Academic Press {in English}.
5. Lockwood, E.H. (1961). *A book of curves.* Cambridge: Cambridge university press {in English}.
6. Forsyth, J., Malcolm, M., Mouler, K. (1980). *Machine methods of mathematical calculations.* Moscow: Mir {in Russian}.