УДК 515.2

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ КРИВОЙ С МОНОТОННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ КРИВИЗНЫ

Холодняк Ю.В., к.т.н.,
yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269
Гавриленко Е.А., к.т.н.,
yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X
Ивженко А.В., к.т.н.,
oleksandr.ivzhenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1559-3825
Чаплынский А.П.
andrii.chaplinskyi@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9213-5452
Таврический государственный агротехнический университет имени Дмитрия Моторного (г. Мелитополь, Украина)

В работе рассматривается задача моделирования плоских одномерных обводов по заданным условиям. Разработана геометрическая схема и алгоритм для формирования обводов с монотонным изменением дифференциально-геометрических характеристик: положений касательных к обводу и значений кривизны в его точках. Исходными данными для формирования обвода являются координаты принадлежащих ему точек, порядок гладкости и характер изменения характеристик вдоль обвода. Параметрами управления формой обвода являются положения центров кривизны и нормалей к кривой, которые назначаются в исходных точках. Кривая моделируется по предварительно сформированной эволюте, которая представляет собой выпуклый обвод первого порядка гладкости. Эволюта монотонной кривой формируется с учетом следующих требований: эволюта является выпуклой кривой; нормали к кривой являются касательными к эволюте, которая ее определяет; длина эволюты равна разности радиусов кривизны в точках, ограничивающих соответствующий участок кривой.

Обвод формируется внутри области возможного расположения кривой, отвечающей задачи. Ограниченность диапазона решения позволяет контролировать отсутствие осцилляции и обеспечивать необходимые требования к характеристикам и гладкости обвода. Особенностью метода является многократное повторение расчетных алгоритмов, которое приводит к замене с заданной точностью исходного геометрического образа сопровождающей ломаной линией

Программное обеспечение, разработанное на основе предложенных в работе алгоритмов, может быть использовано при моделировании линейных элементов каркаса поверхностей с повышенными динамическими качествами. Повышенные динамические свойства необходимы поверхностям, которые взаимодействуют со средой и *ограничивают корпусные изделия авиа-, автомобиле-, судостроения, лопатки турбин, каналы двигателей внутреннего сгорания, трубопроводы, рабочие органы сельскохозяйственных машин.*

Ключевые слова: дискретно представленная кривая, эволюта, эвольвента, монотонное изменение кривизны, нормаль, радиус кривизны, центр кривизны.

Постановка проблемы. Пространственные одномерные обводы используются в качестве элементов определителя дискретно представленной поверхности. Пространственными являются осевые линии поверхностей, транспортирующих среду, линии стыковки отсеков составных поверхностей, траектории обтекания поверхности средой.

При моделировании поверхностей с повышенными аэро- и гидродинамическими свойствами необходимо обеспечить динамику изменения кривизны и кручения, наличие или отсутствие особых точек, второй порядок гладкости обвода [1]. Повышенные динамические качества необходимы поверхностям, ограничивающим корпусные изделия авиа-, автомобиле-, судостроения, лопатки турбин и смесителей, каналы двигателей внутреннего сгорания, трубопроводы, рабочие органы сельскохозяйственных машин.

Для эффективного моделирования поверхностей с повышенными динамическими свойствами необходимы методы, обеспечивающие заданную точность и гибкость формирования геометрических характеристик обводов, допускающие локальность решения и его корректировки, обеспечивающие отсутствие осцилляции [2,3]. Данная задача может быть решена методами вариативного дискретного геометрического моделирования [4].

При формировании обводов с монотонным изменением кривизны, в точках исходного ряда назначаются касательные и значения радиуса кривизны, соответствующие форме кривой. При проведении сгущений точечного ряда, точки сгущения и касательные к формируемому обводу в них, должны назначаться таким образом, чтобы конфигурация получаемой дискретно представленной кривой (ДПК) соответствовала условиям поставленной задачи.

Анализ последних исследований и публикаций. Результаты предыдущих исследований по теме предлагаемой статьи опубликованы в [5,6]. В работе [5] предложен алгоритм определения положения точек сгущения при формировании обвода с монотонным изменением кривизны. Точки сгущения назначаются внутри базисных треугольников, образуемых хордой, соединяющей две последовательные точки ДПК, и касательными к обводу в этих точках. Предложен алгоритм формирования обводов с монотонным изменением кривизны методом сгущений, позволяющий одновременно назначать положение касательных и значения радиусов кривизны в точках сгущения. Алгоритм обеспечивает достижение, в процессе последовательных сгущений, значений радиусов кривизны, назначенных в точках формируемого обвода.

В работе [6] предложена методика определения положения касательных к конструируемому обводу в точках исходной ДПК, позволяющая формировать цепочку базисных треугольников, обеспечивающую формирование, в результате последующих сгущений, обвода с монотонным изменением кривизны.

Формулирование целей статьи. Целью статьи является дальнейшая разработка способа формирования, в процессе сгущения точечного ряда, цепочки базисных треугольников, определяющих ДПК с монотонным изменением кривизны.

Основная часть. Конструируется ДПК с монотонным изменением кривизны методом сгущений.

Исходный базисный треугольник *i, T, i+1* (*T* – точка пересечения касательных, проведенных через исходные точки i и $i+1$) определяет значения радиусов кривизны в точках формируемого обвода (*R*) для точек *i* и *i+1*:

$$R^{\circ}{}_{i} = \frac{L^3}{S}; \qquad R^{\circ}{}_{i+1} = \frac{T^3}{S},$$

где (см.рис. 1) $L = |i;T|$; $T = |T;i+1|$; *S* – площадь треугольника *i,T,i+1*.

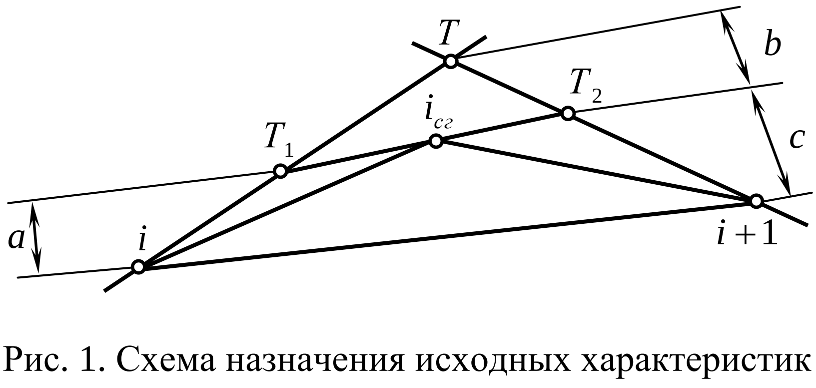

Рис. 1. Схема назначения исходных характеристик

После назначения точки сгущения $i_{сг}$ и касательной (T; T_2) получаем два новых базисных треугольника: i, T_1, $i_{сг}$ и $i_{сг}$, T_2, $i+1$.

В системе барицентрических координат треугольника *i, T, i+1* точка $i_{сг}$ определяется координатами M_1, M_2, M_3, прямая (T_1; T_2) – уравнением: $aM_1 - bM_2 + cM_3 = 0$. Коэффициенты *a,b,c,* определяющие положение прямой относительно вершин исходного треугольника, равны расстояниям от прямой до вершин треугольника *i-1,i,i+1*.

Базисный треугольник $i,T_1,i_{сг}$ определяет значения *R* для точек *i* и $i_{сг}$:

$$R_i^1 = \frac{l^3}{S_1}; \qquad \vec{R}_{сг} = \frac{m^3}{S_1},$$

где $l = \left|i; T_1\right|$; $m = \left|T_1; i_{сг}\right|$; S_2 – площадь треугольника $i_{сг}$, T_2, $i+1$.

Базисный треугольник $i_{сг}$, T_2, $i+1$ определяет значения R для точек $i_{сг}$ и $i+1$:

$$\overleftarrow{R}_{сг} = \frac{n^3}{S_2}, \qquad R^1_{i+1} = \frac{t^3}{S_2},$$

где $n = \left|i_{сг}; T_2\right|$; $t = \left|T_2; i+1\right|$; S_2 – площадь треугольника $i_{сг}$, T_2, $i+1$.

Определим значения $R^1_i, R^1_{i+1}, \vec{R}_{сг} \overleftarrow{R}_{сг}$ выразив их через координаты точек сгущения и коэффициенты определяющие касательную (T_1; T_2):

$$R^1_i = R^\circ_i \frac{1}{M_3}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2; \tag{1}$$

$$R^1_{i+1} = R^\circ_{i+1} \frac{1}{M_1}\left(\frac{c}{c+b}\right)^2; \tag{2}$$

$$\vec{R}_{сг} = \left(\frac{M_3 S}{a+b}\right)^2 \frac{8}{a}; \tag{3}$$

$$\overleftarrow{R}_{сг} = \left(\frac{M_1 S}{c+b}\right)^2 \frac{8}{c}. \tag{4}$$

При формировании обводов с монотонным изменением кривизны (пусть R возрастают вдоль обвода), назначение точки сгущения и проходящей через неё касательной должно обеспечивать выполнение соотношения:

$$R_i \le \vec{R}_{сг} = \overleftarrow{R}_{сг} \le R_{i+1}. \tag{5}$$

Указанное соотношение позволяет выразить координаты точки сгущения (M_1, M_2, M_3) через коэффициенты определяющие касательную (a,b,c) [6].

Таким образом формулы 1-4 однозначно связывают положение касательной $(T_1;T_2)$ относительно базисного треугольника $i,T_1,i+1$ и значения R, определяемые базисными треугольниками $i,T_1,i_{сг}$ и $i_{сг},T_2,i+1$ в точках ДПК $i,i_{сг},i+1$.

Расчет положения касательных и точек сгущения значительно упрощается в случае, когда касательная, проходящая через точку сгущения, назначается параллельно хорде $[i,i+1]$.

Для касательной параллельной основанию базисного треугольника $[i;i+1]$ коэффициенты a и c в уравнении, определяющем эту касательную относительно базисного треугольника, равны.

Чтобы выполнялось условие $\vec{R}_{сг} = \overleftarrow{R}_{сг}$ координаты M_1 и M_3, определяющие положение точки сгущения на касательной, также должны быть равны. Таким образом, точка сгущения назначается на медиане базисного треугольника.

С учетом соотношений: $a = c$ и $M_1 = M_3 = \frac{1-f}{2}$ (где $f = \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+b}$) уравнения (1) и (2) принимают вид:

$$R_i^1 = R_i^{\circ} \frac{2f^2}{1-f}; \quad R_{i+1}^1 = R_{i+1}^{\circ} \frac{2f^2}{1-f}.$$

Для выполнения условия (5) необходимо, чтобы при назначении точки сгущения выполнялось: $l \le m = n \le t$, где (рис. 2) $l = |i; T_1|$; $m = |T_1; i_{сг}|$; $n = |i_{сг}; T_2|$; $t = |T_2; i+1|$.

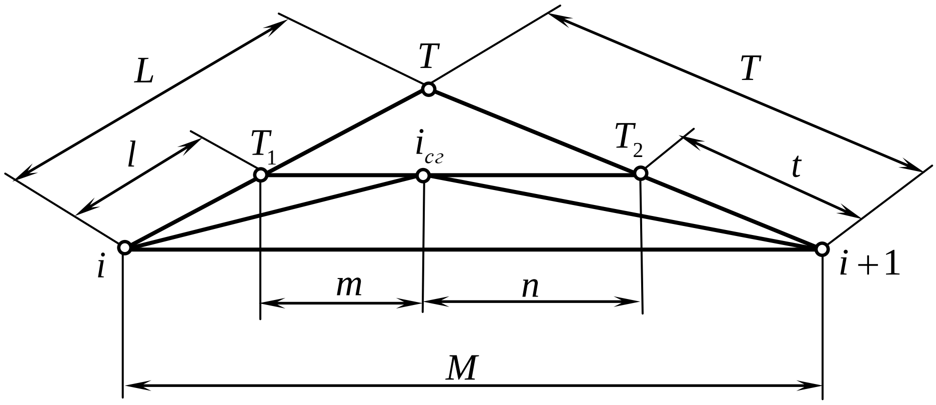

Рис. 2.

$$l = L \cdot f; \; m = \frac{1}{2}(1-f)M; \; l \le m \text{ следовательно: } f \le \frac{M}{2L+M}.$$

$$t = T \cdot f; \; n = \frac{1}{2}(1-f) \cdot M; \; n \le t \text{ следовательно: } f \ge \frac{M}{2T+M}.$$

Таким образом, для выполнения условия (5) значение f должно быть в диапазоне:

$$\frac{M}{2T+M} \le f \le \frac{M}{2L+M}. \tag{6}$$

Изменение значения коэффициента f внутри диапазона (6) при назначении точки сгущения внутри отдельного базисного треугольника дает возможность корректировки значений R в исходных точках, являющихся вершинами этого базисного треугольника.

При этом значение R определяемое одним и тем же базисным треугольником в двух исходных точках может быть изменено одновременно и пропорционально.

Задачу непропорционального изменения указанных значений R можно решить, назначая касательную, проходящую через точку сгущения, под углом к основанию базисного треугольника.

Выводы. В статье получены соотношения между значениями радиуса кривизны, определяемыми в точках формируемого обвода, исходными базисными треугольниками и базисными треугольниками, полученными в результате сгущения.

Указанные соотношения дают возможность:

1. Назначить значения радиуса кривизны в точках исходной ДПК и в точках сгущения;

2. В процессе последующих сгущений сохранять или изменять ранее назначенные значения радиуса кривизны, в точках формируемого обвода.

Монотонные участки формируются сгущением исходного точечного ряда и не требуют аналитического представления. Определение области возможного по условиям задачи расположения кривой позволяет оценивать максимальную абсолютную погрешность, с которой ДПК представляет формируемый обвод.

Литература

1. Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей. М.: Машиностроение, 1979. 248 с.
2. Короткий В.А., Усманова Е.А., Хмарова Л.И. Компьютерное моделирование кинематических поверхностей. *Геометрия и графика*. 2016. Т. 3. № 4. С. 19-26.
3. Chekalin, A.A., Reshetnikov, M.K., Shpilev, V.V. & Borodulina, S.V. (2017). Design of Engineering Surfaces Using Quartic Parabolas. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2017. 221(1):012015.
4. Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М., Спірінцев Д.В. Науково-методологічні основи варіативного дискретного геометричного моделювання. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. Вып.13. С. 114-123.
5. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Vershkov O., Naidysh A. Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy. *Eastern-European Journal of Enterpise Technology.* 2018. 1, 4(91), 76–82.
6. Холодняк Ю.В., Гавриленко Є.А., Івженко О.В., Найдиш А.В. Технологія моделювання поверхонь складних технічних виробів за заданими умовами. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь: ТДАТУ імені Дмитра Моторного, 2019. Вип. 19, т. 2. С. 257-263.

ФОРМУВАННЯ ОБЛАСТІ РОЗТАШУВАННЯ КРИВОЇ З МОНОТОННОЮ ЗМІНОЮ КРИВИНИ

Холодняк Ю.В., Гавриленко Е.А., Івженко О.В., Чаплінський А.П.

У роботі розглядається задача моделювання плоских одновимірних обводів за заданими умовами. Розроблена геометрична схема та алгоритм *для формування обводів з монотонною зміною диференційно-геометричних характеристик: положень дотичних до обводу та значень кривини в його точках. Вихідними даними для формування обводу є координати йому точок, які йому належать, порядок гладкості та характер зміни характеристик уздовж обводу. Параметрами управління формою обводу є положення центрів кривини та нормалей, які визначаються у вихідних точках. Крива моделюється на основі попередньо сформованої еволюти, яка представляє собою опуклий обвід першого порядку гладкості. Еволюта монотонної кривої формується з урахуванням наступних вимог: еволюта є опуклою кривою; нормалі до кривої є дотичними до еволюти, яка її визначає; довжина еволюти дорівнює різниці радіусів кривини в точках, що обмежують відповідну ділянку кривої. Обвід формується всередині області можливого розташування кривої, що відповідає задачі. Обмеженість діапазону розв'язку дозволяє контролювати відсутність осциляції і забезпечувати необхідні вимоги до характеристик і гладкості обводу. Особливістю методу є багаторазове повторення розрахункових алгоритмів, яке призводить до заміни із заданою точністю вихідного геометричного образу супроводжуючою ламаною лінією. Програмне забезпечення, розроблене на основі запропонованих в роботі алгоритмів, може бути використано при моделюванні лінійних елементів каркасу поверхонь з підвищеними динамічними якостями. Підвищені динамічні властивості необхідні поверхням, які взаємодіють з середовищем і обмежують корпусні вироби авіа-, автомобіле-, суднобудування, лопатки турбін, канали двигунів внутрішнього згоряння, трубопроводи, робочі органи сільськогосподарських машин.*

Ключові слова: дискретно представлена крива, еволюта, евольвента, монотонна зміна кривизни, нормаль, радіус кривини, центр кривини.

FORMATION OF LOCATION AREA OF CURVE WITH MONOTONIC CHANGE OF CURVATURE

Yuliia Kholodniak, Yevhen Havrylenko, Oleksandr Ivzhenko, Andrii Chaplinskyi

The paper deals with the problem of modeling flat one-dimensional contours under specified conditions. A geometrical scheme and an algorithm have been developed for the formation of contours with a monotonic change in differential geometric characteristics: the positions of the tangents to the contour and the values of curvature at its points. The initial data for the formation of the contour are the coordinates of the points belonging to it, the order of smoothness and the nature of the change in characteristics along the contour. The options for controlling the shape of the path are the positions of the centers of curvature and normals to the curve, which are assigned at the *origin. The curve is modeled according to a previously formed evolve, which is a convex outline of the first order of smoothness. The evolution of a monotone curve is formed taking into account the following requirements: the evolution is a convex curve; the normals to the curve are tangent to the evolution that defines it; the length of the evolute is equal to the difference between the radii of curvature at the points bounding the corresponding section of the curve. The contour is formed inside the area of possible location of the curve corresponding to the task. The limited range of the solution allows you to control the absence of oscillations and provide the necessary requirements for the characteristics and smoothness of the bypass. A feature of the method is the multiple repetition of the computational algorithms, which leads to the replacement with a given accuracy of the original geometric image by the accompanying broken line The software developed on the basis of the algorithms proposed in the work can be used to simulate linear elements of the frame of surfaces with increased dynamic qualities. Increased dynamic properties are required for surfaces that interact with the environment and restrict body products of aircraft, automobile, shipbuilding, turbine blades, channels of internal combustion engines, pipelines, working bodies of agricultural machines.*

Key words: discretely represented curve, evolve, involute, monotonic change of curvature, normal, radius of curvature, center of curvature.

Referenses

1. Osipov, V.A. (1979) Machine methods of designing continuously-frame surfaces. M.: Mashinostroenie [in Russian].
2. Korotkiy, V.A., Usmanova, E.A., Hmarova, L.I. (2016) Computer simulation of kinematic surfaces. Geometriya i grafika, 3, 4, 19-26 [in Russian].
3. Chekalin, A.A., Reshetnikov, M.K., Shpilev, V.V., Borodulina, S.V. (2017) Design of Engineering Surfaces Using Quartic Parabolas. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 221(1):012015 [in Ehglish].
4. Naidysh, A.V. Baliuba, I.H. Vereshchaha, V.M. Spirintsev, D.V. Scientific and methodological bases of variative discrete geometric modeling. Suchasni Problemy Modeliuvannia, 13, 114-123 [in Ukranian].
5. Havrylenko, Y., Kholodniak, Y., Vershkov, O., Naidysh, A. (2018) Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy. Eastern-European Journal of Enterpise Technology, 1, 4(91), 76–82 [in English].
6. Kholodniak, Yu.V. Havrylenko, Ye.A. Ivzhenko, O.V. Naidysh, A.V. (2019) Technology of modeling surfaces of complex technical products according to specified conditions. Pratsi Tavriiskoho Derzhavnoho Ahrotekhnolohichnoho Universytetu. Melitopol, 19, 2, 257-263. [in Ukranian].