УДК 514.18

КОМПОЗИЦІЙНЕ ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНІЧНОЇ ПОВЕРХНІ

Павленко О.М., к.т.н.,
alexander8944@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8646-2622
Верещага В.М., д.т.н.,
mail337@i.ua, ORCID: 0000-0002-1965-1829
Найдиш А.В., д.т.н.,
nav1304@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4057-7085
Рубцов М.О., к.т.н.,
rubtsovnik3077@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1916-6302
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

Розглядається конічна поверхня, основою якої є просторова дискретно подана крива довільної форми. Відшукуються рівняння конічної поверхні у параметричній формі. Вказується на те, що, при цьому, основа дискретно подається n точками, степінь точкового поліному, який композиційно глобально інтерполює ці n точок основи КП, дорівнює $(n-1)$.

Параметризація основи КП здійснюється уздовж ланок супровідної ламаної лінії, на основі якої записується точковий поліном. Вершина конічної поверхні (КП) також розглядається як супровідна ламана лінія, що виродилась у точку, яка є n-кратною. Доводиться теорема, що будь-яка n-кратна точка може бути композиційно інтерпольована (компоінтерпольована) точковим поліномом степеня $(n-1)$. *Надається пояснення яким чином відбувається компоінтерполяція n-кратної точки.*

Розглядається утворення точкового поліному, який лінійно компоінтерполює ребра бокової поверхні конуса з використанням точкових поліномів для вершини, основи та ребер бокової поверхні конуса, утворюється двопараметричний точковий поліном бокової поверхні конуса, в цілому.

Зроблено висновок про те, що двопараметричний точковий поліном, такий як здобутий для конічної поверхні, придатний для опису будь-яких інших лінійчатих поверхонь. Для цього необхідно обрати відповідну вихідну геометричну композицію геометричної фігури, з використанням якої можна побудувати бажану лінійчату поверхню. Через можливість, за одного виразу двопараметричного точкового поліному одержувати різного вигляду лінійчаті поверхні шляхом зміни лише вихідної геометричної композиції, розглянутий у цьому дослідженні метод моделювання названо – композиційним геометричним моделюванням.

Ключові слова. Конічна поверхня, точковий поліном, геометрична

композиція, композиція моделювання.

Постанова проблеми. Композиційне геометричне моделювання (КГМ) [1, 6, 7, 8], що розробляються у Мелітопольській школі прикладної геометрії, динамічно розвивається і наразі набуває ознаки композиційної геометрії, яка потребує системного і всебічного її наповнення розгляду геометричних задач та композиційних методів їх розв'язання. Розробка методів композиційного моделювання лінійчатих поверхонь і, зокрема, конічних, входить до кола питань композиційної геометрії. Отже з метою систематизації, розширення та поглиблення знань щодо нових методів композиційного моделювання лінійчатих поверхонь, в цілому, так конічних, поверхонь, зокрема, є актуальним питанням, яке і розглядається у цьому дослідженні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Підґрунтям і поштовхом для розвитку методів КГМ стало точкове числення Балюби-Найдиша (БН-числення) [2, 3], яке отримало подальший розвиток у роботах [9, 14]. Композиційні геометричні моделі є геометрично формалізованими аналітичними моделями, які є осьнезалежними, тобто такими, рівняння яких визначаються відносно базисних точок вихідної геометричної фігури (ГФ), а не відносно системи декартових координат, у якій ці базисні точки визначені [1, 6, 7, 8]. Через таке визначення рівнянь у КГМ ці рівняння є параметричним. Враховуючи це аналізуватимемо лише поверхні, що побудовані у параметричній формі.

Оскільки основою для побудови або дослідження будь-якої поверхні є лінії, то здійснимо аналіз задання параметричних кривих.

Параметричний кубічний сплайн [15], криві Безьє [16, 17, 19], криві Кунса [15, 18], В-сплайни [15], раціональні В-сплайни (NURBS) [15, 20], являють собою криві у параметричній формі, які забезпечують лише локальну інтерполяцію, тобто інтерполюють дві суміжні точки і не можуть проходити через проміжні базисні точки у разі їхньої наявності. Сплайни, що утворені зі згаданих кривих, також покроково здійснюють локальну інтерполяцію. При цьому, узгодження параметрів для сегментів кривих у сплайні є доволі трудомісткою процедурою, яка потребує значних витрат комп'ютерних ресурсів. Отже, жодна зі згаданих кривих не вирішує задачу глобальної інтерполяції, коли інтерполюється не тільки початкова і кінцева базисні точки сегменту кривої, а також інтерполюються і декілька його проміжних базисних точок. Застосування згаданих кривих є ефективним для моделювання різних поверхонь технічного характеру, у яких задовольняються вимоги функціонального або естетичного призначення. І тому, використання цих кривих для моделювання складних процесів є занадто ресурсовитратним через надмірне подрібнення моделі на сегменти невеликих розмірів, а також і через те, що у основу їхнього моделювання покладено алгебраїчні методи, які також потребують значної витрати комп'ютерних і, як наслідок, фінансових ресурсів, що завжди знижує ефективність моделювання та експлуатації утвореної моделі.

Отже, якщо використовувати розглянуті криві для побудови конічної поверхні (КП) у якої основою є дискретно подана крива (ДПК), що складається із n точок, то будемо змушені цю КП подрібнювати на $(n-1)$ сегменти. Застосування сплайнів для побудови КП є недоцільним через те, що сплайни, на нашу думку, завжди є громіздкими (у сенсі кількості алгебраїчних операцій для їхнього утворення) методом. Окрім того, будь-який сплайн хоча і має єдиний запис, однак інтерполяція з його використанням все ж таки відбувається окремо на кожному сегменті, що завжди збільшує споживання комп'ютерних ресурсів для зберігання інформації щодо кожного сегменту окремо. Це стає особливо відчутним задля обробки великих баз даних (BD).

Отже лишається актуальною розробка методів глобальної інтерполяції ДПК.

Існують два підходи до утворення поверхонь це:

1) за наперед визначеними геометричними умовами (Кунс) [10, 11];
2) математичні поверхні, що початково утворені (Безье) [4, 5].

Обидва підходи потребують використання одиничних елементарних об'єктів у просторі параметрів з подальшим переходом у об'єктний простір, що збільшує ресурсовитратність.

Побудова поверхонь Безье відбувається із застосуванням кривих Безье, основним недоліком яких, на наш погляд, є використання базису Бернштейна, який є узагальненим алгебраїчним інструментом і не визначається із геометричних умов вихідної ГФ. До того ж кожна складова базису Бернштейна має різні степені, що призводить до неоднакового їхнього впливу на форму кривої за збільшення її степеня. Природним розширенням поверхонь Безье являють бікубічні В-сплайни. Однак, застосування В-сплайнів для моделювання поверхонь за наперед визначеними точками виникають певні труднощі, щодо знаходження полігональної сітки характеристичної гранної поверхні, за якої В-сплайн поверхня найкращим чином здійснює інтерполяцію заданих точок.

Найбільшим узагальненням моделювання щодо квадратичних поверхонь, бікубічних поверхонь Кунса, бікубічних поверхонь Безье являють раціональні В-сплайн поверхні, які, за певних умов можуть відтворювати усі вказані форми поверхонь.

На наш погляд, наразі нічого кращого ніж раціональні В-сплайн поверхні не існує для моделювання поверхонь технічного або іншого характеру у яких задовольняються вимоги функціонального або естетичного призначення. Раціональні В-сплайни застосовуються у автоматизованих системах проектування та виробництва і визнані як стандарт для передачі відповідної інформації від проектів до виробництва. Однак, і раціональні В-сплайн поверхні базуються на локальних методах інтерполяції, які є неприйнятними, через значне подрібнення для обробки

BD. Обробка великих баз потребує методів глобальної інтерполяції як лінійної так і білінійної.

Отже, актуальною є проблема розробки методів глобальної білінійної інтерполяції поверхонь загалом і зокрема, конічних поверхонь.

Формулювання цілей статті. Розробити, з використанням біпараметричного точкового поліному методику композиційного геометричного моделювання конічної поверхні, у якої вихідною основою є дискретно подана крива, що складається з *n* базисних точок.

Метод дослідження. Композиційне геометричне моделювання (КГМ) є методом дослідження даної роботи, яке відрізняється від решти існуючих тим, що будь-яка вихідна геометрична фігура (ГФ) як геометрична умова для постановки та розв’язування задачі перед її використанням має бути поділена на дві складові: геометричну і параметричну. Геометрична – визначає положення точок, які задають цю вихідну ГФ, у системі координат три-простору. Параметрична – визначає взаємне розташування усіх цих базисних точок вихідної ГФ.

Процес поділення вихідної ГФ на дві складові названо нами – уніфікація, тобто приведення вихідної ГФ до вигляду, придатного до використання у КГМ. При цьому із геометричної та параметричної частин у КГМ складаються не тільки вихідні геометричні умови, а і весь алгоритм розв’язання і результат розв’язку. Це дозволяє, під час тестування розв’язку, за потреби, вносити зміни до геометричної складової не чіпаючи, при цьому, цю параметричну складову і так записи у розв’язку.

Зміну положення точок вихідної ГФ, з метою пошуку інших варіантів розв’язку будемо називати «зміною композиції». Під геометричною композицією геометричного об’єкту будемо розуміти ГФ, яка є непорожньою скінченою дискретною множиною точок, частина з яких може бути об’єднана у певну підмножину, що утворює цілісну геометричну структуру і, при цьому, зміна або навіть заміна будь-якого або декількох з її елементів не тягне за собою ніяких змін для решти інших елементів даної композиції. Окрім цього не змінюється алгоритм розв’язку і записи у ньому.

Тут під геометричним об’єктом (образом) треба розуміти непорожню скінчену упорядковану множину (сукупність) точок, для якої встановлені певні метричні, позиційні та диференціально-геометричні властивості, є наявною вербальна складова, яка пояснює суть геометричного об’єкту, та визначено алгоритм побудови будь-якої його проміжної точки.

Під геометричною фігурою у цьому дослідженні необхідно розуміти зображення будь-якого набору тривіальних геометричних елементів, для якого відсутні пояснення сенсу і алгоритм побудови поточних точок.

Отже, геометрична фігура з наявною вербальною складовою та визначеним алгоритмом побудови будь-якої проміжної точки утворюють геометричну композицію, яка є основою (вихідними умовами) геометричного об'єкту. У відповідності до [13] та вимог композиційного геометричного моделювання під дискретно представленою поверхнею (ДПП) будемо розуміти упорядковану непорожню скінчену дискретну множину точок, що являє собою геометричну композицію, між елементами якої є узвичаєними та визначеними співвідношення метричного, позиційного та диференціально-геометричного характеру, що визначають її внутрішню геометрію, можливість її двомірної параметризації та згущення.

Основна частина. Як відомо, конічна поверхня утворюється множиною прямих, що проходять через одну точку, яка є її вершиною. У цьому дослідженні будемо розглядати конічну поверхню у найбільш загальному вигляді, тобто коли в жмуток прямих у просторі занурюються просторова крива довільної форми, яка називається основою конічної поверхні.

Будь-яку конічну поверхню зручно представити у вигляді узагальненого рівняння степеня, який дорівнює степеню її основи. Однак, для генерування конічної поверхні у комп'ютерному моделюванні найбільш ефективним є її подання у параметричній формі.

Конічна поверхня є однолінійчатою двопараметричної (біпараметричною) геометричною фігурою, тобто на ній існує лише один напрямок прямих ліній і кожна її точка визначається двома параметрами, один з яких обов'язково має бути лінійним.

Композиційна геометрична модель конічної поверхні цілком відповідає загальним положенням, які були наведені вище, однак, має і деякі особливості, які розглянемо нижче.

І основа конічної поверхні, і її вершини моделюються у вигляді точкових поліномів. Порядок конічної поверхні визначається степеням точкового поліному, який композиційно інтерполює вихідні базисні точки основи конічної поверхні. Композиційна геометрична модель (КГМ) конічної поверхні (КП) моделюється однаковою як для замкнутої так і для не замкнутої кривої, що є основою КП.

Нехай основа КП подається дискретно n Вихідними базисними точками (рис.1) $A_{2j};\ j=\overline{1,n}$. У позначенні точок застосовано індекс "2" через те, що основу КП прийнято як друге ребро для утворення композиційного рівняння (компорівняння) КП. Першим ребром КП буде позначатися її вершина, яка має подаватись такою ж кількістю базисних точок як і основа КП, тобто $A_{1j};\ j=\overline{1,n}$.

Однак усі базисні точки першого ребра КП, тобто вершини КП, мають співпадати:

$$A_{11}=A_{12}=A_{13}=\cdots.A_{1(n-1)}=A_{1n}\ .$$

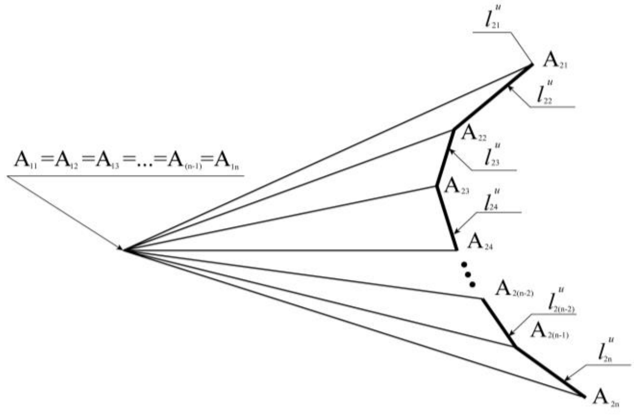

Рис. 1. Геометрична фігура для пояснення утворення компомоделі конічної поверхні

Для параметризації вершини і основи КП використаємо позначення: "u". Їх параметризацію здійснимо уздовж ланок супровідних ламаних кожного з цих ребер, тобто вершини та основи (рис.1). Степінь точкових поліномів як вершини, так і основи буде дорівнювати $(n-1)$.

На рис.1. дискретно подані точки $A_{2j};\ j=\overline{1,n}$ поспіль з'єднується відтинками l_{2j} для здійснення параметризації. Сума усіх l_{2j} ланок – супровідної ламаної лінії (СЛЛ) буде визначати одиницю l_{2j} для визначення параметру u кожної з базисних точок ребра 2, тобто основи конусу.

$$l_2 = \sum_{j=1}^{n} l_{2j}; \qquad u_{2j} = \frac{\sum_{j=1}^{2j} l_{2j}}{l_2}\ . \tag{1}$$

У значеннях параметру (1) горішній індекс біля символу «$\sum$ » означає, що j змінюється від 1 до номеру відповідної точки.

Використовуючи, запишемо рівняння точкового поліному для другого ребра – основи КП.

$$M_{2u} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j} \bullet \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{(u_{2j}-u)}{(u_{2i}-u_{2j})} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j} \bullet P_{2j}\,. \tag{2}$$

Не зважаючи на те, що базисні точки $A_{1j};\ j=\overline{1,n}$ співпадають, здійснимо для першого ребра – вершини КП записи відповідні (1) та (2).

$$l_1 = \sum_{j=1}^{n} l_{1j}; u_{1j} = \frac{\sum_{j=1}^{1j} l_{1j}}{l_1}\ ; \tag{3}$$

$$M_{1u} = \sum_{j=1}^{n} A_{1j} \bullet \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{(u_{1j}-u)}{(u_{1i}-u_{1j})} = \sum_{j=1}^{n} A_{1j} \bullet P_{1j}\ . \tag{4}$$

Оскільки усі базисні точки першого ребра – вершини співпадають, то утворюється n-кратна точка, яка є вершиною КП. Покажемо, що є можливою композиційна інтерполяція (компоінтерполяція) n-кратної точки точковим поліномом степеня $(n-1)$.

Для цього запишемо у розгорнутому вигляді характеристичні функції P_{1j} із (4) для точок $A_{1j}: j=\overline{1,n}$:

$$A_{11}: \qquad P_{11}=\frac{(u_{12}-u)(u_{13}-u)...(u_{1(n-1)}-u)(u_{1n}-u)}{(u_{12}-u_{11})(u_{13}-u_{11})...(u_{1(n-1)}-u_{11})(u_{1n}-u_{11})};$$

$$A_{12}: \qquad P_{12}=\frac{(u_{11}-u)(u_{13}-u)...(u_{1(n-1)}-u)(u_{1n}-u)}{(u_{11}-u_{12})(u_{13}-u_{12})...(u_{1(n-1)}-u_{12})(u_{1n}-u_{12})};$$

....

...

$$A_{1(n-1)}: P_{1(n-1)}=\frac{(u_{11}-u)(u_{12}-u)...(u_{1(n-2)}-u)(u_{1n}-u)}{(u_{11}-u_{1(n-1)})(u_{12}-u_{1(n-1)})...(u_{1(n-2)}-u_{1(n-1)})(u_{1n}-u_{1(n-1)})};$$

$$A_{1n}: \quad P_{1n}=\frac{(u_{11}-u)(u_{12}-u)...(u_{1(n-2)}-u)(u_{1(n-1)}-u)}{(u_{11}-u_{1n})(u_{12}-u_{1n})...(u_{1(n-2)}-u_{1n})(u_{1(n-1)}-u_{1n})}.$$

Оскільки усі точки співпадають, тобто $A_{11}=A_{12}=...=A_{1(n-1)}=A_{1n}$, то значення параметрів $u_{11}=u_{12}=...=u_{1(n-1)}=u_{1n}=0$. Виходячи з цього, усі характеристичні функції з (5) матимуть невизначеність:

$$P_{1j}=\left(\frac{0}{0}\right); j=\overline{1,n} \;. \tag{6}$$

Загалом таких невизначеностей буде $n\times n$, тобто кожна із n характеристичних функцій для кожного із n параметрів.

Покажемо приклади розкриття невизначеностей із (6) для u_{11}:

$$\lim_{u\to u_{11}} P_{11}=\lim_{u\to u_{11}}\frac{(u_{12}-u_{11})(u_{13}-u_{11})...(u_{1(n-1)}-u_{11})(u_{1n}-u_{11})}{(u_{12}-u_{11})(u_{13}-u_{11})...(u_{1(n-1)}-u_{11})(u_{1n}-u_{11})}=1, \tag{7}$$

тому що у чисельнику і знаменнику записані невизначеності, які за результатом скорочення нададуть одиницю.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{u\to u_{11}} P_{12}=\lim_{u\to u_{11}}\frac{(u_{11}-u_{11})(u_{13}-u_{11})...(u_{1(n-1)}-u_{11})(u_{1n}-u_{11})}{(u_{11}-u_{12})(u_{13}-u_{12})...(u_{1(n-1)}-u_{12})(u_{1n}-u_{12})}=0,\\
&..\\
&\lim_{u\to u_{11}} P_{1(n-1)}=\lim_{u\to u_{11}}\frac{(u_{11}-u_{11})(u_{12}-u_{11})...(u_{1(n-2)}-u_{11})(u_{1n}-u_{11})}{(u_{11}-u_{1(n-1)})(u_{12}-u_{1(n-1)})...(u_{1(n-2)}-u_{1(n-1)})(u_{1n}-u_{1(n-1)})}=0,\\
&\lim_{u\to u_{11}} P_{1n}=\lim_{u\to u_{11}}\frac{(u_{11}-u_{11})(u_{12}-u_{11})...(u_{1(n-2)}-u_{11})(u_{1(n-1)}-u_{11})}{(u_{11}-u_{1n})(u_{12}-u_{1n})...(u_{1(n-2)}-u_{1n})(u_{1(n-1)}-u_{1n})}=0.
\end{aligned}\right] \tag{8}$$

Усі границі із (8) дорівнюють нулю через те, що чисельнику перший множник $(u_{11}-u_{11})=0$ є точний нуль, що надає нуль загалом усім границям, які тут розглядаються.

При цьому, усі інші різниці у них не є точними нулями, а прямують до нуля. Через це кожний із знаменників у (8) не дорівнюють нулю. Отже невизначеності розкрито.

Аналогічним чином розкриваються невизначеності усіх характеристичних функцій із (6) коли параметр u прямує до $u_{12};u_{13};...u_{1(n-1)};u_{1n}$.

Результати визначення границь для вказаних варіантів запишемо у табл.1.

Таблиця 1

Границі характеристичних функцій

u_{ij} \ P_{ij}	P_{11}	P_{12}	...	$P_{1(n-1)}$	P_{1n}
u_{11}	1	0	...	0	0
u_{12}		1	...	0	0
...	...	...	...	...	...
$u_{1(n-1)}$	0	0	...	1	0
u_{1n}	0	0	...	0	1

Аналізуючи результати табл.1 можна зробити висновки, що для будь-якої кратної точки алгоритм утворення характеристичних функцій точкових поліномів, які цю точку компоінтерполюють, лишається незмінним. Отже: границі розкриття невизначеностей усіх характеристичних функцій, що завжди виникають через кратність точки, також будуть аналогічними результатам табл.1.

За результатами виконаних доведень щодо границь невизначеностей характеристичних функцій точкових поліномів, сформулюємо теорему.

Теорема. Для будь-якої n-кратної точки можна утворити точковий поліном степеня $(n-1)$, який цю n-кратну точку композиційно інтерполює.

Пояснимо, яким чином точковий поліном (4) інтерполює вершину A_{1j} конічної поверхні, з огляду на результати табл.1.

Зазначення параметру u_{11} точковий поліном M_{1u} проходить через точку A_{11}. Решта інших його доданків – дорівнюють нулю.

Зазначення параметру u_{12} точковий поліном M_{1u} проходить через точку A_{12}. Решта інших доданків точкового поліному – дорівнюють нулю.

І так далі.

Зазначення параметру u_{1n} точковий поліном M_{1u} проходить через точку A_{1n}, а решта інших його доданків – дорівнюють нулю.

Як бачимо точковий поліном (4), за різних значень параметрів, проходить через іншу точку, а через те, що всі ці різні точки співпадають, точковий поліном (4) стискається у точку і за рахунок цього композиційно інтерполює n-кратну точку – вершину конічної поверхні. Отже, для побудови композиційної геометричної моделі конічної поверхні через її основу (2) та через її вершину (4) мають проходити точкові поліноми однакового степеня, який визначається кількістю вихідних базисних точок n, що дискретно подають основу конічної поверхні, при цьому, степінь точкового поліному дорівнює $(n-1)$.

Розглянемо утворення композиційної моделі бокової поверхні КП (рис.1). Для цього, у базисних точках приймемо значення другого параметру V, які встановлені за результатами визначення початкової та кінцевої точок відтинків $(A_{1j}A_{2j})$ відносно довжини кожної з них:

$$\left.\begin{array}{l}
A_{11}:V_{11}=0;\quad A_{21}:V_{21}=1;\\
A_{12}:V_{12}=0;\quad A_{22}:V_{22}=1;\\
A_{13}:V_{13}=0;\quad A_{23}:V_{23}=1;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{1(n-1)}:V_{1(n-1)}=0;\quad A_{2(n-1)}:V_{2(n-1)}=1;\\
A_{1n}:V_{1n}=0;\quad A_{2n}:V_{2n}=1.
\end{array}\right] \tag{9}$$

Враховуючи (9) складемо рівняння точкових поліномів першого степеня для усіх ребер бокової поверхні конуса:

$$\left.\begin{array}{l}
N_{1V}=A_{11}\dfrac{V_{21}-V}{V_{21}-V_{11}}+A_{21}\dfrac{V_{11}-V}{V_{11}-V_{21}}=A_{11}\bullet q_{11}+A_{21}\bullet q_{21}\\
N_{2V}=A_{12}\dfrac{V_{22}-V}{V_{22}-V_{13}}+A_{22}\dfrac{V_{12}-V}{V_{12}-V_{22}}=A_{12}\bullet q_{12}+A_{22}\bullet q_{22}\\
N_{3V}=A_{13}\dfrac{V_{23}-V}{V_{23}-V_{13}}+A_{23}\dfrac{V_{13}-V}{V_{13}-V_{23}}=A_{13}\bullet q_{13}+A_{23}\bullet q_{23}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N_{(n-1)V}=A_{1(n-1)}\dfrac{V_{2(n-1)}-V}{V_{2(n-1)}-V_{1(n-1)}}+A_{2(n-1)}\dfrac{V_{1(n-1)}-V}{V_{1(n-1)}-V_{2(n-1)}}=A_{1(n-1)}\bullet q_{1(n-1)}+A_{2(n-1)}\bullet q_{2(n-1)}\\
N_{nV}=A_{1n}\dfrac{V_{2n}-V}{V_{2n}-V_{1n}}+A_{2n}\dfrac{V_{1n}-V}{V_{1n}-V_{2n}}=A_{1n}\bullet q_{1n}+A_{2n}\bullet q_{2n}
\end{array}\right] \tag{10}$$

Або запишемо сукупність (10) у загальному вигляді:

$$N_{iV}=\sum_{i:j=1}^{2,n}A_{(ij)}\bullet\prod_{\substack{i:j=1\\ ij\neq(ij)}}^{2,n}\frac{(V_{ij}-V)}{(V_{ij}-V_{(ij)})}=\sum_{i:j=1}^{2,n}A_{ij}\bullet q_{ij}, \tag{11}$$

де A_{ij} – базисні точки на сегменті КП;

q_{ij} – значення параметрів у базисних точках за параметричним напрямком V;

$ij\neq(ij)$ – запис означає, що у добутках мають бути відсутніми різниці, у яких зменшуване утримує подвійний індекс, що збігається з подвійним індексом біля базисної точки $A_{(ij)}$, який взято у дужки.

Враховуючи рівняння точкових поліномів (2), (4) за параметричним напрямком u та рівняння точкових поліномів (11) за параметричним напрямком V, складемо рівняння двопараметричного точкового поліному для бокової поверхні конуса.

$$M_{2n}=\sum_{i:j=1}^{2,n}A_{(ij)};\prod_{i:j=1}^{2,n}\frac{(u_{ij}-u)}{(u_{ij}-u_{(ij)})}\cdot\prod_{i:j=1}^{2,n}\frac{(V_{ij}-V)}{(V_{ij}-V_{(ij)})}=\sum_{i:j=1}^{2,n}A_{(ij)}\bullet P_{ij}(u)\bullet q_{ij}(V). \tag{12}$$

Загальний вигляд точкового поліному (12) конічної поверхні ніяким чином не вказує на те, що ця поверхня є конічною. Такий самий запис рівняння точкового поліному буде і для будь-якої іншої однолінійчатої чи то дволінійчатої поверхонь і, при цьому, не має різниці чи то ці лінійчаті поверхні є розгорнутими, чи то – нерозгорнутими. Отже, дізнатися за виглядом двопараметричного точкового поліному, яку саме лінійчату поверхню він відтворює, не є можливим.

Це можна зробити за аналізу геометричної композиції точок вихідної геометричної фігури. Таким чином, у композиційному геометричному моделюванні лише вихідна геометрична композиція геометричної фігури визначає вигляд утворюваної поверхні, а рівняння двопараметричних точкових поліномів, що ці поверхні описують є майже однаковими і мають відмінності лише ті, до яких призводить вихідна геометрична композиція.

Через це і моделювання названо – композиційним, яке дає можливість без зміни запису рівняння, а лише за зміни вихідних точок одержувати різного вигляду лінійчаті поверхні.

Висновки. У цьому дослідженні отримали подальший розвиток методи композиційного геометричного моделювання лінійчатих поверхонь, зокрема конічних, яке відбувається за рахунок утворення двопараметричних точкових поліномів за насамперед визначеною геометричною композицією. Вказується, на те, що у лінійчатих поверхонь, які описані двопараметричними точковими поліномами, один з двох параметрів обов'язково має бути лінійним, а інший може мати будь-який степінь.

Робиться висновок, що усі лінійчаті поверхні описуються однакового вигляду точковими поліномами, які відрізняються один від одного лише кількістю вихідних базисних точок та їх розташуванням у геометричних композиціях, що відповідають тій чи іншій лінійчатій поверхні. Така однаковість опису лінійчатих поверхонь точковими поліномами надає значних переваг під час композиційного моделювання та під час програмної реалізації створених композиційних моделей. Для усіх лінійчатих поверхонь розробляється програма утворення точкових поліномів, яка лишається без змін, а для одержання необхідної лінійчатої поверхні належним чином утворюється геометрична композиція вихідної геометричної фігури, яка і забезпечує побудову бажаної лінійчатої поверхні. За рахунок цього значно зменшується ресурсовитратність композиційного моделювання у порівнянні з іншими методами та підвищується його ефективність під час моделювання і експлуатації розроблених моделей.

Література

1. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем : дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном

исчислении: дис. … доктора тех. наук. Макеевка: МИСИ, 1995. 227 с.
3. Балюба И.Г. Найдыш В.М. Точечное исчисление [учебное пособие] / под ред. Верещаги В.М. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015. 234 с.
4. Безье (Bezier P.). 1974a, Mathematical and Practical Possibilities of UNISURF. In Computer-Aided Geometric Design, (R. E. Barnhill and R. F. Reisenfeldeds.), Academic Press.
5. Безье (Bezier P.). 1974b, UNISURF System: Principles, Program, Language, Proc. 1973, PROLAMAT Conference, Budapest (J. Hatvany, ed.) North Holland Publ. Co., Amsterdam.
6. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017. 108 с.
7. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. , Лисенко К.Ю. Основи композиційного геометричного моделювання : навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
8. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. Метод композиційного геометричного моделювання : монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 310 с.
9. Верещага В.М. Павленко О.М., Найдиш А.В. Моделювання горизонтального земельного майданчика у точковому численні: монографія. Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. 187 с.
10. Кунс (Coons S.A.). 1967, Surfaces for Computer Aided design of Space Forms, Report MAC-TR-41, Project MAC, M. I. T.
11. Кунс (Coons S.A.). 1977, Modification of the Shape of Piecewise Curves, Computer-Aided Design 9, 3, 178-180.
12. Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М. Особливості композиційного геометричного моделювання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка: технічні науки*. К., 2019. Вип. 95. С.131-136.
13. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція. Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. 250 с.
14. Павленко О.М. Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення: дис…канд.. техн. наук, 05.01.01. Мелітополь: ТДАТУ, 2017. 229с.
15. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.
16. Bézier, P., "How Renault Uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling," SAE Technical Paper 680010, 1968,
17. Bézier P.E, William Rede Hawthorne and George Robert Edwards 1997Example of an existing system in the motor industry: the Unisurf systemProc. R. Soc. Lond. A321207–218.
18. Coons S. Surfaces of Computer Aided Design of Space Forms. Report MAC-TR-41, Project MAC, M.I.T., 1967. 105 p.

19. Forrest A.R. Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials. Computer Journal, 1972, v.15 p. 71-79.
20. Versprille, K.J., “Computer-Aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form,” Ph.D. dissertation, Syracuse Univ., 1975.

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Павленко А.М., Верещага В.М., Найдыш А.В., Рубцов Н.А.

В работе рассматривается коническая поверхность, основой которой является пространственная дискретно представлена кривая произвольной формы. Ищутся уравнения конической поверхности в параметрической форме. Указывается на то, что, при этом, основа дискретно подается n точками, степень точечного полинома, который композиционно глобально интерполирует эти n точек основы КП, равна.

Параметризация основы КП осуществляется вдоль звеньев сопроводительной ломаной линии, на основе которой записывается точечный полином. Вершина конической поверхности (КП) также рассматривается как сопроводительная ломаная линия, выродилась в точку, которая является n-кратной. Доказывается теорема, что любая n-кратная точка может быть композиционно интерполирована (компоинтерполирована) точечным полиномом степени $(n-1)$. *Предоставляется объяснение, каким образом происходит компоинтерполяция n-кратной точки.*

Рассматривается образования точечного полинома, который линейно компоинтерполирует ребра боковой поверхности конуса с использованием точечных полиномов для вершины, основания и ребер боковой поверхности конуса, образуется двухпараметрического точечный поленом боковой поверхности конуса, в целом.

Сделан вывод о том, что двухпараметрический точечный полином, такой как полученный для конической поверхности, пригодный для описания любых других линейчатый поверхностей. Для этого необходимо выбрать соответствующую исходную геометрическую композицию геометрической фигуры, с использованием которой можно построить желаемую линейчатую поверхность. Из-за возможности, при одном выражении двухпараметрического точечного полинома получать различного вида линейчатой поверхности путем изменения только исходной геометрической композиции, рассмотренный в этом исследовании метод моделирования назван - композиционным геометрическим моделированием.

Ключевые слова: коническая поверхность, точечный полином, геометрическая композиция, композиция моделирования.

COMPOSITE GEOMETRIC SIMULATION OF A CONICAL SURFACE

Oleksandr Pavlenko, Viktor Vereshchaga, Andriy Naydysh,
Mikolaj Rubtsov

The conical surface, the basis of which is a spatially discrete curve of arbitrary shape, is considered. The equations of the conical surface in parametric form are sought. It is pointed out that, in this case, the basis is discretely represented by n points, the degree of a point polynomial, which compositionally globally interpolates these n points of the basis of KP, is equal to.

Parameterization of the CP base is carried out along the links of the accompanying broken line, on the basis of which a point polynomial is written. The vertex of a conical surface (CP) is also considered as an accompanying broken line degenerate into a point that is n-fold. The theorem is proved that any n-fold point can be compositionally interpolated (compointerpolated) by a point polynomial of degree. An explanation is given of how the n-fold point interinterpolation occurs.

The formation of a point polynomial is considered, which linearly interpoles the edges of the side surface of the cone using point polynomials for the vertex, base and edges of the side surface of the cone, a two-parameter point polynomial of the side surface of the cone is formed.

It is concluded that a two-parameter point polynomial, such as that obtained for a conical surface, is suitable for describing any other linear surfaces. To do this, select the appropriate original geometric composition of the geometric figure, using which you can build the desired linear surface. Because of the possibility, for one expression of a two-parameter point polynomial to obtain different types of linear surfaces by changing only the original geometric composition, the modeling method considered in this study is called - composite geometric modeling.

Keyword: conical surface, point polynomial, geometric composition, modeling composition.

Resferences

1. Adoniev, Ye.O. (2018) Compositional method of geometric modeling of multifactorial systems: Doctor’s thesis.. K.: KNUBA, [in Ukrainian].
2. Baliuba, Y.H. (1995) Design geometry of the manobraz in precise number: Doctor’s thesis. Makeevka: MYSY, [in Russian].
3. Baliuba, Y.H., Naidysh, V.M. (2015) Point calculus. Vereshchahy V.M. (ed.) Melitopol: Yzd-vo MDPU imeni B. Khmelnytskoho, [in Russian].
4. Bezier, P. (1974) Mathematical and Practical Possibilities of UNISURF. In Computer-Aided Geometric Design, (R. E. Barnhill and R. F. Reisenfeldeds.), Academic Press [in English].
5. Bezier, P. (1974) UNISURF System: Principles, Program, Language, Proc. 1973, PROLAMAT Conference, Budapest (J. Hatvany, ed.) North Holland Publ. Co., Amsterdam [in English].

6. Vereshchaha, V.M. (2017) Compositional geometric modeling. Melitopol: FOP Odnoroh T.V., [in Ukrainian].
7. Vereshchaha, V.M. Naidysh, A.V., Adoniev, Ye.O., Lysenko, K.Iu. (2019) Basics of compositional geometric modeling. Melitopol: FOP Odnoroh T.V., [in Ukrainian].
8. Vereshchaha, V.M. Naidysh, A.V., Adoniev, Ye.O. (2019) Method of composite geometric modeling Melitopol: FOP Odnoroh T.V., [in Ukrainian].
9. Vereshchaha, V.M. Pavlenko, O.M., Naidysh, A.V. (2019) Modeling of a horizontal land plot in a dotted number of: monohrafiia. Melitopol: MDPU imeni Bohdana Khmelnytskoho, [in Ukrainian].
10. Coons, S.A. (1967), Surfaces for Computer Aided design of Space Forms, Report MAC-TR-41, Project MAC, M. I. T. [in English].
11. Coons S.A. (1977) Modification of the Shape of Piecewise Curves, Computer-Aided Design 9, 3, 178-180 [in English].
12. Naidysh, A.V., Lysenko, K.Iu., Baliuba I.H., Vereshchaha V.M. (2019) Features of composite geometric modeling. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika: KNUBA. K., 95. 131-136 [in Ukrainian].
13. Naidysh, V.M. (2007) Discrete interpolation. Melitopol: VDP «Liuks», [in Ukrainian].
14. Pavlenko, O.M. (2017) Geometric modeling of vertical planning of a horizontal land plot by means of point BN-calculus: candidate’s thesis, Melitopol: TDATU, [in Ukrainian]
15. Rodzhers, D., Adams, Dzh. (2001) Mathematical basics of machine graphics M.: Myr, [in Russian]
16. Bézier, P., (1968) "How Renault Uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling," SAE Technical Paper 680010, [in English]
17. Bézier, P.E, William Rede Hawthorne and George Robert Edwards 1997Example of an existing system in the motor industry: the Unisurf systemProc. R. Soc. Lond. A321207–218 [in English].
18. Coons, S. (1967) Surfaces of Computer Aided Design of Space Forms. Report MAC-TR-41, Project MAC, M.I.T., [in English].
19. Forrest, A.R. (1972) Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials. Computer Journal, 15, 71-79 [in English].
20. Versprille, K.J., (1975) “Computer-Aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form,”. Candidate’s thesis, Syracuse Univ., [in English].