УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ І КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ ВЕКТОРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ КРИВОЇ ЗА ЗАДАНИМИ ДВОМА ТОЧКАМИ І ПЕРШИМИ, ДРУГИМИ І ТРЕТІМИ ПОХІДНИМИ В НИХ

Бадаєв Ю.І., д.т.н.,
ybad0228.gmail.com, ORCID: 0000-0002-1415-9739
Лагодіна Л.П. к.т.н.,
lplahodina@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4012-836X
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

В роботі розглядається побудова векторно-параметричної кривої сьомого степеня за заданими двома точками і першими, другими і третіми похідними в них.

Це дає змогу задати кривизну та крутіння на границях кривої.На основі цієї кривої можна побудувати полосу поверхні за заданими двома граничними кривими і заданими першими, другими і третіми похідними в них. Також можна побудувати порцію поверхні за заданими чотирма точками і першими, другими і третіми похідними в них по двом напрямкам - уздовж і поперек порції поверхні. Порція поверхні за чотирма точками дає змогу будувати гладку поверхню із третім порядком гладкості на заданому списку точок в тривимірному просторі. Крім того задання першої і другої похідних дає змогу задавати кривизну а також за третьою похідною крутіння.

В цьому випадку можна спочатку задати перші похідні, а другі визначаться за формулою кривизни. Треті похідні визначаться за формулою крутіння.

Вказані полоси і порції поверхонь вигідно застосовувати в проектуванні поверхонь машин і агрегатів, які працюють у рухомому середовищі (поверхні літаків, автомобілів, суден), в яких важливо задання закону зміни кривини уздовж поверхні. Закон зміни кривизни дуже важливий в цьому випадку, тому що злам кривизни по поверхні наслідує турбулентний зрив потоку рухомого середовища, що збільшує спротив агрегату рухомому середовищу. Збільшення спротиву рухомому середовищу спричиняє зменшення швидкості руху. А при застосуванні в літакобудуванні зрив рухомого середовища може спричинити до піке і катастрофи літака. Задання крутіння забезпечує проектування газопроводів із заданим скрутом.

Ключові слова: полоса поверхні, порції поверхні, крива сьомого степеня за заданими двома точками і першими, другими і третіми похідними в них, кривизна, крутіння.

Постановка проблеми. При конструюванні обводів машин і агрегатів, які працюють у рухомому середовищі, виникає необхідність моделювати криві із заданою кривиною і крутінням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [2,3] описані різні варіанти кривих, але варіант із заданою кривиною і крутінням відсутній.

Формулювання цілей статті. В роботі розглядається побудова векторно-параметричної кривої сьомого степеня за заданими двома точками і першими,другими і третіми похідними в них.

Основна частина. Будемо шукати векторно-параметричну криву у вигляді :

$$r(u)=A_0(u)r_0+A_1(u)r_1+B_0(u)r_0^u+B_1(u)r_1^u+ \\ +C_0(u)r_0^{uu}+C_1(u)r_1^{uu}+D_0(u)r_0^{uuu}+D_1(u)\,r_1^{uuu}, \qquad (1)$$

де $A_0(u),A_1(u),B_0(u),B_1(u),C_0(u),C_1(u),D_0(u),D_1(u)$ - поліноміальні функції сьомого степеня від параметра u:

$$A_i\,(u) = B_i\,(u) = C_i\,(u) = D_i\,(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^6 + a_7u^7.$$

Для того, щоб знайти $A_0(u)$, необхідно розв'язати систему 8 лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} A_0(0)=1.0;A_0(1)=0; \\ A'_0(0)=0;A'_0(1)=0; \\ A''_0(0)=0;A''_0(1)=0; \\ A'''_0(0)=0;A'''_0(1)=0; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Розв'язавши (2)будемо мати:

$$A_0(u)=1.0-35.0u^4 +84.0u^5-70u^6+20u^7.$$

Для $A_1(u)$ маємо наступну систему із 8 лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(0)=0,A_0(1)=1.0, \\ A'_1(0)=0,A'_1(1)=0, \\ A''_1(0)=0,A''_1(1)=0, \\ A'''_1(0)=0,A'''_1(1)=0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Розв'язавши (3) будемо мати:

$$A_1\,(u)=35u^4-84u^5+70u^6-20u^7.$$

Для $B_0(u)$ маємо систему

$$\left.\begin{array}{l} B_0(0)=0,B_0(1)=0, \\ B'_0(0)=1.0,B'_0(1)=0, \\ B''_0(0)=0,B''_0(1)=0, \\ B'''_0(0)=0,B'''_0(1)=0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Розв'язавши (4) будемо мати:

$$B_0(u)=1.0\,u-20.0u^4+ 45.0u^5-36u^6 +10u^7.$$

Для $B_1(u)$ маємо систему:

$$\left.\begin{array}{l} B_1(0)=0, B_1(1)=0, \\ B'_1(0)=0, B'_1(1)=1.0, \\ B''_1(0)=0, B''_1(1)=0, \\ B'''_1(0)=0, B'''_1(1)=0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Розв’язавши (5) будемо мати:

$$B_1(u)=-15u^4+39u^5-34u^6+10u^7.$$

Для $C_0(u)$ маємо систему:

$$\left.\begin{array}{l} C_0(0)=0, C_0(1)=0, \\ C'_0(0)=0, C'_0(1)=0, \\ C''_0(0)=1.0, ''_0(1)=0, \\ C'''_0(0)=0, C'''_0(1)=1.0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Розв’язавши (6) будемо мати:

$$C_0(u)=0.5u^2-5u^4+10u^5-7.5u^6+2u^7.$$

Для $C_1(u)$ маємо систему:

$$\left.\begin{array}{l} C_1(0)=0, C_1(1)=0, \\ C'_1(0)=0, C'_1(1)=0, \\ C''_1(0)=0, C''_1(1)=1.0, \\ C'''_1(0)=0, C'''_1(1)=0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Розв’язавши (7) будемо мати:

$$C_1(u)=2.5u^4-7u^5+6.5u^6-2u^7.$$

Для $D_0(u)$ маємо систему:

$$\left.\begin{array}{l} D_0(0)=0, D_0(1)=0, \\ D'_0(0)=0, D'_0(1)=0, \\ D''_0(0)=0, ''_0(1)=0, \\ D'''_0(0)=1.0, D'''_0(1)=0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Розв’язавши (8) будемо мати:

$$D_0(u)=0.166666u^3-0.6666666u^4+0.99999u^5-0.666666u^6+0.166666u^7.$$

Для $D_1(u)$ маємо систему:

$$\left.\begin{array}{l} D1(0)=0,\ D1(1)=0, \\ D'_1(0)=0, D'_1(1)=0, \\ D''_1(0)=0, D''_1(1)=0, \\ D'''_1(0)=0, D'''_1(1)=1.0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Розв’язавши (9) будемо мати:

$$D_1(u)=-0.1666666u^4+0.5u^5-0.5u^6+0.166666u^7.$$

Тестовий приклад кривої (1) представлений на рис. 1.

Кривизна задається формулою[1]:

$$k_1^2=\frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}. \quad (10)$$

Крутіння задається за формулою [1]:

$$k_2 = -\frac{(r'r''r''')}{k_1^2} \; . \qquad (11)$$

де $(r'r''r''')$ - змішаний векторний добуток.

Перепишемо (10) в наступному вигляді:

$$k_1 = \frac{|r'||r''|\sin(\frac{\pi}{2})}{|r'|^3} = \frac{|r''|}{|r'|^2}. \qquad (12)$$

Задамо k_1 і за формулою (12) визначимо |r’’|:

$$|r'|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \; ; \qquad (13)$$

$$|r''| = k_1 |r'|^2 \; . \qquad (14)$$

Задамо крутіння k_2 і третя похідна визначиться за формулою (11). Для задання полоси поверхні візьмемо кубічну криву Фергюссона:

$$r(u) = \alpha_0(u) r_0 + \alpha_1(u) r_1 + \beta_0(u) r_0{'^u} + \beta_1(u) r_1{'^u} \; , \qquad (15)$$

де

$$\alpha_0(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3,$$

$$\alpha_1(u) = 3u^2 - 3u^3,$$

$$\beta_0(u) = u - 2u^2 + u^3,$$

$$\beta_1(u) = u_2 - u^3.$$

Будемо переміщувати r_0, r_1, r'^u_0, r'^u_1 за формулою за формулою (1), але вже за зміною параметра v:

$$r_0 = A_0(v) r_{00} + A_1(v) r_{01} + B_0(v) r_{00}^v + B_1(v) r_{01}^v + C_0(v)\, r_{00}^{vv} + C_1(v) r_{01}^{vv} + \\ + D_0(v) r_{00}^{vvv} + D_1(v) r_{01}^{vvv}; \qquad (16)$$

$$r_1 = A_0(v) r_{10} + A_1(v) r_{11} + B_0(v) r_{10}^v + B_1(v) r_{11}^v + C_0(v)\, r_{10}^{vv} + C_1(v) r_{11}^{vv} + \\ + D_0(v) r_{10}^{vvv} + D_1(v) r_{11}^{vvv}; \qquad (17)$$

$$r'^u{}_0 = A_0(v) r'^u{}_{00} + A_1(v) r'^u{}_{01} + B_0(v) r_{00}^{'uv} + B_1(v) r_{01}^{'uv} + C_0(v)\, r_{00}^{uvv} + C_1(v) r_{01}^{uvv} + \\ + D_0(v) r_{00}^{uvvv} + D_1(v) r_{01}^{uvvv}; \qquad (18)$$

$$r'^u{}_1 = A_0(v) r'^u{}_{01} + A_1(v) r'^u{}_{11} + B_0(v) r_{01}^{'uv} + B_1(v) r_{11}^{'uv} + C_0(v)\, r'^{uvv}_{01} + C_1(v) r_{11}^{uvv} + \\ + D_0(v) r_{01}^{uvvv} + D_1(v) r_{11}^{uvvv}. \qquad (19)$$

В матричному вигляді буде:

$$\left[A_0(v)\,A_1(v)\,B_0(v)\,B_1(v)\,C_0(v)\,C_1(v)\,D_0(v)\,D_1(v)\,\right]\times$$
$$\times\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r^{v}{}_{00} & r^{v}{}_{01} & r_{00}^{vv} & r_{01}^{vv} & r_{00}^{vvv} & r_{01}^{vvv} \\ r_{10} & r_{11} & r_{10}^{v} & r_{11}^{v} & r_{10}^{vv} & r_{11}^{vv} & r_{10}^{vvv} & r_{11}^{vvv} \\ r_{00}^{u} & r_{01}^{u} & r_{00}^{uv} & r_{01}^{uv} & r_{00}^{uvv} & r_{01}^{uvv} & r_{00}^{uvvv} & r_{01}^{uvvv} \\ r_{10}^{u} & r_{11}^{v} & r_{10}^{uv} & r_{11}^{uv} & r_{10}^{uvv} & r_{11}^{uvv} & r_{10}^{uvvv} & r_{11}^{uvvv} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_0(u)\\ \alpha_1(u)\\ \beta_0(u)\\ \beta_1(u)\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Таким чином для побудови полоси (20) необхідно задати 4 точки і перші похідні в них в одному напрямку і перші та змішані другі та треті похідні в іншому напрямку.

Розроблена комп’ютерна програма мовою AutoLISP. Тестовий приклад представлений на рис. 2.

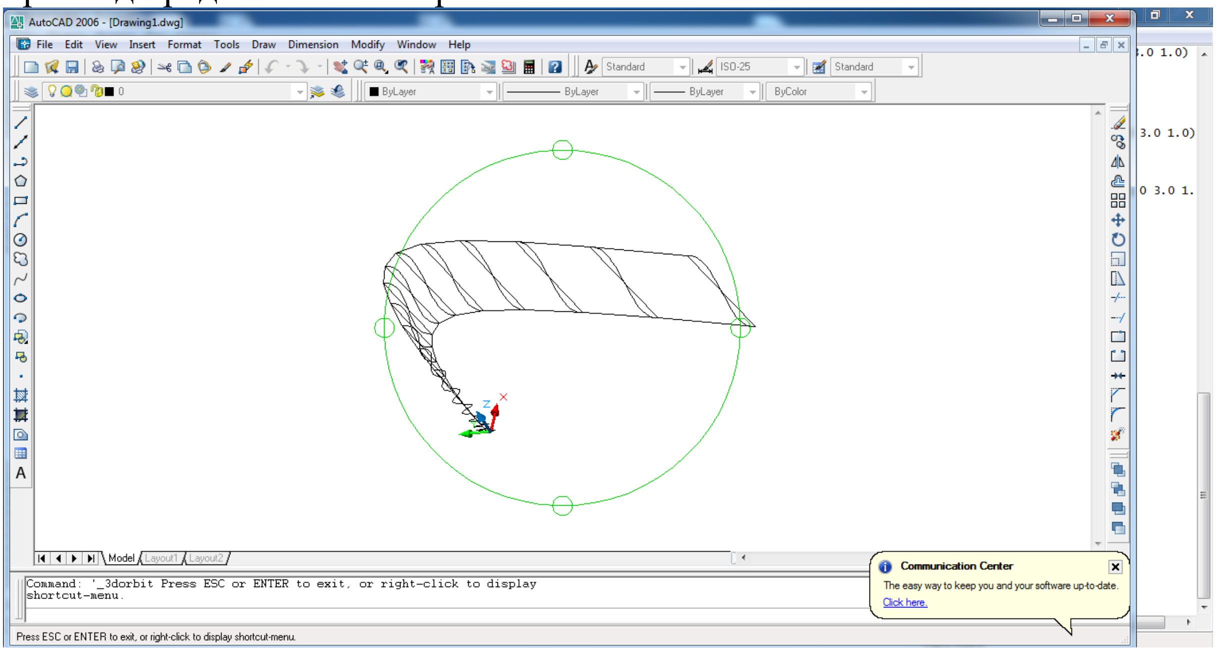

Рис. 2. Полоса поверхні

Крім того на основі кривої (1) можна побудувати порцію поверхні за 4-ма точками {1,2,3,4} і заданими першими, другими та третіми похідними за двома напрямками- уздовж та поперек чотирикутника {1,2,3,4}.

Будемо мати наступну формулу:

$$\left[A_0(v)\,A_1(v)\,B_0(v)\,B_1(v)\,C_0(v)\,C_1(v)\,D_0(v)\,D_1(v)\,\right]\times$$
$$\times\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r^{v}{}_{00} & r^{v}{}_{01} & r_{00}^{vv} & r_{01}^{vv} & r_{00}^{vvv} & r_{01}^{vvv} \\ r_{10} & r_{11} & r_{10}^{v} & r_{11}^{v} & r_{10}^{vv} & r_{11}^{vv} & r_{10}^{vvv} & r_{11}^{vvv} \\ r_{00}^{u} & r_{01}^{u} & r_{00}^{uv} & r_{01}^{uv} & r_{00}^{uvv} & r_{01}^{uvv} & r_{00}^{uvvv} & r_{01}^{uvvv} \\ r_{10}^{u} & r_{11}^{u} & r_{10}^{uv} & r_{11}^{uv} & r_{10}^{uvv} & r_{11}^{uvv} & r_{10}^{uvvv} & r_{11}^{uvvv} \\ r_{00}^{uu} & r_{01}^{uu} & r_{00}^{uuv} & r_{01}^{uuv} & r_{00}^{uuvv} & r_{01}^{uuvv} & r_{00}^{uuvvv} & r_{01}^{uuvvv} \\ r_{10}^{uu} & r_{11}^{uu} & r_{10}^{uuv} & r_{11}^{uuv} & r_{10}^{uuvv} & r_{11}^{uuvv} & r_{10}^{uuvvv} & r_{11}^{uuvvv} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A_0(u)\\ A_1(u)\\ B_0(u)\\ B_1(u)\\ C_0(u)\\ C_1(u)\\ D_0(u)\\ D_1(u)\end{bmatrix}. \tag{21}$$

Висновки. Ця робота дає змогу задати кривизну та крутіння на границях кривої. На основі цієї кривої можна побудувати полосу поверхні за заданими двома граничними кривими і заданими першими, другими і третіми похідними в них. Також можна побудувати порцію поверхні за заданими чотирма точками і першими, другими і третіми похідними в них по двом напрямкам - уздовж і поперек порції поверхні.

Література

1. Погорелов А.В. Геометрия. М.:Наука. Физматлит, 1983. 288с.
2. Голованов. Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: Физматлит, 2002. 472 с.
3. Бадаев Ю.И., Ковтун А.М. Специальные сплайны из полиномов третьей, четвертой и пятой степеней в геометрическом моделировании: Монография. О.: Феникс, 2011. 316 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВЕКТОРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ПО ЗАДАННЫМ ДВУМ ТОЧКАМ И ПЕРВЫМИ, ВТОРЫМИ И ТРЕТЬИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В НИХ

Бадаев Ю.І., Лагодина Л.П.

В работе рассматривается построение векторно-параметрической кривой седьмой степени по заданным двум точкам и первыми, вторыми и третьими производными в них. Это позволяет задать кривизну и кручение на границах кривой. На основе этой кривой можно построить полосу поверхности с заданными двумя предельными кривыми и заданными первыми, вторыми и третьими производными в них.

Также можно построить порцию поверхности с заданными четырьмя точками и первыми, вторыми и третьими производными в них по двум направлениям- вдоль и поперек порции поверхности. Кроме того, задания первой и второй производных позволяет задавать кривизну, а также по третьей производной кручение. В этом случае можно сначала задать первые производные, а вторые определятся по формуле кривизны. Третьи производные определятся по формуле кручения. Указанные полосы и порции поверхностей выгодно применять в проектировании поверхностей машин и агрегатов, работающих в движущейся среде (поверхности самолетов, автомобилей, судов), в которых важно задание закона изменения кривизны вдоль поверхности. Закон изменения кривизны очень важен в этом случае, потому что излом кривизны по поверхности наследует турбулентный срыв потока движущейся среды, что увеличивает сопротивление агрегата движущейся среде. Увеличение сопротивления движущейся среде приводит к уменьшению скорости движения. А при применении в самолетостроении срыв движущейся среды может привести *к пике и катастрофы самолета. Задание кручения обеспечивает проектирование газопроводов с заданным кручением.*

Ключевые слова: полоса поверхности, порции поверхности, кривая седьмой степени по заданным двум точкам и первыми, вторыми и третьими производными в них, кривизна, кручение.

MODELING AND COMPUTER IMPLEMENTATION VECTOR-PARAMETRIC CURVE ON THE GIVEN TWO POINTS AND THE FIRST, SECOND AND THIRD DERIVATIVES IN THEM

Yuriy Badayev, Ludmila Lagodina

The paper considers the construction of a vector-parametric curve of the seventh degree for given two points and the first, second and third derivatives in them. This allows you to set the curvature and torsion at the boundaries of the curve. On the basis of this curve it is possible to construct a strip of a surface on the set two boundary curves and the set first, second and third derivatives in them.

You can also build a portion of the surface at a given four points and the first, second and third derivatives in them in two directions, along and across the portion of the surface. A portion of the surface at four points allows you to build a smooth surface with a third order of smoothness on a given list of points in three-dimensional space. In addition, the task of the first and second derivatives makes it possible to set the curvature as well as the third derivative of torsion. In this case, you can first specify the first derivatives, and the second will be determined by the formula of curvature. The third derivatives will be determined by the formula of torsion. These strips and portions of surfaces are advantageous to use in the design of surfaces of machines and units operating in a moving environment (surfaces of aircraft, cars, ships), in which it is important to specify the law of curvature along the surface. The law of curvature is very important in this case, because the fracture of the curvature on the surface mimics the turbulent disruption of the flow of the moving medium, which increases the resistance of the unit to the moving medium. Increasing resistance to the moving medium causes a decrease in speed. And when used in aircraft construction, the failure of the moving environment can lead to a peak and a plane crash. The torsion task provides the design of gas pipelines with a given torsion.

Keywords: surface strip, surface portions, curve of the seventh degree for given two points and the first, second and third derivatives in them, curvature, torsion.

References

1. Pogorelov A.V. (1983) Geometry. M.:Nauka. Fizmatlit, [in Russian]
2. Golovanov. N.N. (2002) Geometric modeling. M.: Fizmatlit, [in Russian]
3. Badaev YU.I., Kovtun A.M. (2011) Special splines from wormwood third, fourth and fifth powers in geometrical modeling. O.: Feniks, [in Russian]