УДК 514.18

АНАЛІЗ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗВУКУ У ХВИЛЕВОДІ

Ванін В.В., д.т.н.,
vaninvladimirv@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7008-7269
Залевська О.В., к.т.н.,
o.zalevska@kpi.ua, ORCID: 0000-0002-3163-1695
Сидоренко Ю.В., к.т.н.,
sulico5@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1953-0410
Войтович А.В.
andrvoitovych@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2556-7463
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Комп'ютерне дослідження процесів різної природи потребує створення математичної моделі натурального експерименту. Процес дослідження значно спрощується при наявності візуальної складової такого процесу. Складність розробки загальної математичної моделі розповсюдження електромагнітних хвиль пов’язана з залежністю процесу від середовища. Наприклад, в водному середовищі вони передаються слабіше ніж в повітряному, що робить незручним їх застосування при передачі хвиль між об’єктами в різних середовищах. В роботі розглянуто існуючі підходи до моделювання акустичного сигналу. До таких методів можна віднести моделі гідродинаміки в поєднанні з рівняннями Максвела, коливних електричних контурів, методи моделювання процесу поширення та затухання звуку під водою та інші. Розглянуто теоретичне підґрунтя для побудови алгоритмів моделювання поширення акустичних коливань в морському середовищі.

Математичні та алгоритмічні моделі акустичних коливань базується на попередніх випробуваннях та враховують обчислювальної можливості техніки. Це обмеження накладає додаткові умови та ускладнює створювану математичну модель. Розглянуті методи не створюють математичні моделі поширення та затухання звукових сигналів з урахуванням таких умов користувача як: змінна швидкість звуку, геометрію та профіль дна, стан поверхні, температура середовища. А отже, існує необхідність в розробці методології моделювання компонентів гідроакустичного сигналу, що описують генерацію сигналів та адаптуються під поставлену задачу.

Проведений аналіз вказує на доцільність використання методів променевої теорії та параболічного рівняння для опису моделі для якої змінною є глибина.

Ключові слова: математичне моделювання, акустичні хвилі,

хвильове рівняння, гідроакустика, рівняння Гельмгольца, променевий метод, нормальні моди, параболічне рівняння.

Постановка задачі. Розробка математичної моделі гідроакустичного сигналу характеризується його фізичною природою та характеристиками проведених досліджень. Опис сигнального поля являє собою функцію часових і просторових координат. Моделлю гідроакустичного процесу є його математичне уявлення, яке дозволяє проводити обробку імовірнісних характеристик процесу. Огляд методів моделювання надає можливість для якісної побудови математичної моделі гідроакустичного сигналу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Теоретичні та практичні аспекти моделювання поширення гідроакустичних сигналів описані у роботах багатьох авторів. У роботі [1] розглянуто використання променевого методу для опису та кращого розуміння принципів поширення акустичних сигналів у хвилеводі. Авторами роботи [2] описано використання методу скінченних елементів та методу нормальних мод для обчислення акустичного тиску в однорідному хвилеводі. Класифікацію математичних моделей хвильових процесів у вигляді диференціальних рівнянь із частковими похідними та опис програмно-алгоритмічного комплексу для моделювання акустичного поля наведено в роботі [3].

Формування цілей статі. Провести огляд існуючих методів побудови математичної моделі гідроакустичного сигналу.

Основна частина. Теоретичною основою всіх математичних моделей розповсюдження звуку є хвильове рівняння. Хвильове рівняння саме походить з більш фундаментальних рівнянь стану, безперервності та руху. Формулювання акустичних моделей поширення, як правило, починається з тривимірного, залежного від часу хвильового рівняння. В залежності від умов, для яких моделюється задача, форма хвильового рівняння може змінюватись. У більшості випадків використовується спрощене лінійне, гіперболічне, залежне від часу, диференціальне рівняння з частинними похідними:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \tag{1}$$

де ∇^2 – це оператор Лапласа, Φ – потенціал, c – швидкість звуку в момент t.

Нехай в модельованій системі відбуваються гармонійні коливання, тоді можна виконати спрощення, яке дозволить перейти до рівняння Гельмгольца, як не залежить від часу. При гармонійних коливаннях, потенціал Φ з хвильового рівняння (1) можна представити у вигляді:

$$\Phi = \varphi e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

де φ – незалежна від часу функція потенціалу, ω – частота джерела звуку. У результаті підстановки хвильове рівняння (1) перетворюється у однорідне рівняння Гельмгольца [4]:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \tag{3}$$

в якому $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, а λ – довжина хвилі. При моделюванні, рівняння (3) зручно представляти у циліндричних координатах:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2(z)\varphi = 0. \quad (4)$$

Існує декілька підходів до розв'язку рівняння Гельмгольца. До основних методів відносяться методи засновані на: трасуванні променів, нормальних модах, параболічному рівнянні. У цих чотирьох методах, функція потенціалу φ представляє тиск акустичного поля, у такому випадку втрату передачі можна розрахувати за формулою [5]:

$$TL = 10\log_{10}(\frac{1}{\varphi^2}) = 20\log_{10}(\varphi). \quad (5)$$

Методи, що ґрунтуються на нормальних модах та на інтегруванні частіше використовуються для моделей, в яких властивості досліджуваного середовища змінюються тільки в залежності від глибини хвилеводу, тобто є функцією однієї змінної, залишаючись сталими на всіх відстані від джерела до отримувача. Методи трасування променів та параболічного рівняння краще підходять для моделей, де властивості досліджуваного середовища можуть змінюватись в залежності від глибини, відстані від джерела та азимуту отримувача (тобто зміни середовища можливі за трьома координатами циліндричної системи координат).

Моделі засновані на променевій теорії використовуються у дослідженні розповсюдженні звуку вже декілька десятиліть, поняття та основи цієї теорії променів допомагають зрозуміти і реалізувати й інші моделі. При моделюванні з використанням теорії променів обчислюють втрату передачі (5) на основі трасування акустичних променів. Теорія ґрунтується на тому, що функція потенціалу φ в рівнянні Гельмгольца (3) представляється як добуток функції амплітуди $A = A(x, y, z)$ і фазової функції $S = S(x, y, z)$. Тобто $\varphi = Ae^{iP}$ [4]. Підставивши отриманий вираз у рівняння (3) та відділивши уявну й дійсну частину рівняння, маємо:

$$\frac{1}{A}\nabla^2 A - (\nabla P)^2 + k^2 = 0, \quad (6)$$

$$2(\nabla A * \nabla P) + A\nabla^2 P = 0. \quad (7)$$

Рівняння (6) містить дійсну частину, що визначає геометрію променів. Рівняння (7) містить уявну частину та визначає амплітуду хвилі.

Використовуючи геометричне акустичне наближення, яке передбачає, що швидкість звуку не змінюється сильно в межах однієї довжини хвилі, маємо:

$$\frac{1}{A}\nabla^2 A \ll k^2. \quad (8)$$

Застосувавши це наближення до рівняння (6), отримуємо ейконал:

$$(\nabla P)^2 = k^2. \quad (9)$$

З розв'язку ейконалу (9) можна знайти шляхи променів та властивості фронтів хвиль, нормалями до яких і є промені. Вирішення транспортного рівняння (7) дозволяє знайти амплітуди хвиль, що поширюються.

Рівняння нормальних мод виводяться шляхом інтегрування хвильового рівняння. Для отримання практичних результатів припускається, що в багатошаровому середовищі властивості середовища змінюються тільки зміною глибини хвилеводу. Тоді, функція потенціалу φ у рівнянні Гельмгольца (4) може бути може бути представлена як добуток функції глибини $Z(z)$ та відстані від джерела $R(r)$:

$$\boldsymbol{\varphi = \mathrm{Z}(z) * R(r)}. \tag{10}$$

Підставивши (10) у (4) та використавши метод відокремлення змінних, використовуючи ε^2 як константу відокремлення, отримуємо:

$$\frac{\mathbf{d^2 Z}}{\mathbf{dz^2}} + (\mathbf{k^2} - \boldsymbol{\varepsilon}^2)\mathbf{Z} = \mathbf{0}\,, \tag{11}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \varepsilon^2 R = 0. \tag{12}$$

Рівняння (11) – це рівняння глибини, що описує стоячі хвилі, а рівняння (12) – рівняння діапазону та описує біжучу хвилю. Модальне рівняння має нескінченно багато розв’язків (мод), які характеризуються функцією форми коливань $Zm(z)$. Кожна m-на мода має m нулів на інтервалі $[0, D]$, де D – максимальна глибина хвилеводу [5].

В загальному випадку, використовуючи метод нормальних мод, функція потенціалу φ з рівняння (4), яка й представляє тиск акустичного поля, може бути обчислена наступним чином [5]:

$$\boldsymbol{\varphi \approx \frac{i}{\rho(z_0)\sqrt{8\pi r}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z_0) Z_m(z) \frac{e^{i\varepsilon_m r}}{\sqrt{\varepsilon_m}}}. \tag{13}$$

Застосування методів, що ґрунтуються на параболічному рівнянні, в гідроакустиці розпочалось пізніше, порівняно з променевими методами та методами нормальних мод, проте вони швидко розвивались та удосконалювались науковою спільнотою. Виведення параболічного рівняння починається зі запису рівняння Гельмгольца (4) у наступному вигляді [5]:

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \varphi = 0}, \tag{14}$$

де $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ – хвильове число при швидкості звуку c_0, c_0 – швидкість звуку в певній точці, $\varphi(r, z)$ – акустичний тиск, $n = c_0/c(r, z)$ – показник заломлення.

Розв’язок рівняння (14) приймає форму:

$$\boldsymbol{\varphi(r,z) = \psi(r,z) H_0^{(1)}(k_0, r)}, \tag{15}$$

де $\psi(r, z)$ – функція, що характеризує обвідну коливального сигналу, $H_0^{(1)}(k_0, r)$ – функція Ханкеля першого порядку, яка записується у наступному вигляді:

$$H_0^{(1)}(k_0, r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\, e^{i\left(k_0 r - \frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (16)$$

Підставивши (15) та (16) у рівняння (14) і припустивши, що $k_0 r \gg 1$, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 - 1)\psi = 0. \qquad (17)$$

Щоб отримати звичайне параболічне хвильове рівняння необхідно застосувати параксіальне наближення:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \ll 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r}. \qquad (18)$$

Тоді рівняння (17) спрощується до звичайного параболічного хвильового рівняння [6]:

$$2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 - 1)\psi = 0. \qquad (19)$$

Висновки. У роботі проведено аналіз та теоретичні основи найбільш поширених методів моделювання розповсюдження звуку в хвилеводі. Усі вони ґрунтуються на вирішенні хвильового рівняння та рівняння Гельмгольца. Методи, що засновані на променевій теорії та параболічному рівнянні, краще підходять для моделювання поширення в умовах, де властивості середовище змінюються з діапазоном та глибиною, а метод нормальних мод – для незалежного від діапазону середовища.

Література

1. Hovem J., Dong H. Understanding ocean acoustics by eigenray analysis. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2019. No 7. P. 118.
2. Kirby R., Duan W. Modelling sound propagation in the ocean: a normal mode approach using finite elements. *Proceedings of ACOUSTICS*. 2018. P. 1-10
3. Гладкий А.В, Подласов Е.С. Об автоматизации расчетов акустических полей в неоднородных волноводах. Математичні машини і системи. 2006, Вип. 2. С. 107-117
4. Etter P. C., Underwater Acoustic Modeling and Simulation, 3rd ed.: LSpon, London, 2003. 424 p.
5. Porter M.B. The KRAKEN normal mode program: Ft. Belvoir Defense Technical Information Center, 1992. 202 p.
6. Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H. Computational Ocean Acoustics Springer-Verlag.: New York 2011. 794 p.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ

Ванин В.В., Залевская О.В., Сидоренко Ю.В., Войтович А.В.

Компьютерное исследование процессов различной природы требует создания математической модели натурального эксперимента. Процесс *исследования значительно упрощается при наличии визуальной составляющей такого процесса. Сложность разработки общей математической модели распространения электромагнитных волн связана с зависимостью процесса от среды. Например, в водной среде они передаются слабее чем в воздушной, что делает неудобным их применение при передаче волн между объектами в разных средах. В работе рассмотрены существующие подходы к моделированию акустического сигнала. К таким методам можно отнести модели гидродинамики в сочетании с уравнениями Максвела, колеблющих электрических контуров, методы моделирования процесса распространения и затухания звука под водой и другие. Рассмотрено теоретическое основание для построения алгоритмов моделирования распространения акустических колебаний в морской среде.*

Математические и алгоритмические модели акустических колебаний базируется на предварительных испытаниях и учитывают вычислительной возможности техники. Это ограничение накладывает дополнительные условия и усложняет создаваемую математическую модель. Рассматриваемые методы не создают математические модели распространения и затухания звуковых сигналов с учетом таких условий пользователя как: переменная скорость звука, геометрию и профиль дна, состояние поверхности, температура среды. А значит, существует необходимость в разработке методологии моделирования компонентов гидроакустического сигнала, описывающих генерацию сигналов и адаптирующихся под поставленную задачу.

Проведенный анализ указывает на целесообразность использования методов лучевой теории и параболического уравнения для описания модели для которой переменной является глубина.

Ключевые слова: математическое моделирование, акустические волны, волновое уравнение, гидроакустика, уравнение Гельмгольца, лучевой метод, нормальные моды, параболическое уравнение.

ANALYSIS OF METHODS FOR MODELING SOUND PROPAGATION IN A WAVEGUIDE

Volodymyr Vanin, Olga Zalevska, Juliia Sidorenko, Andrii Voitovych

Computer study of processes of various nature requires the creation of a mathematical model of a natural experiment. The study process is greatly simplified when there is a visual component of such a process. The difficulty of developing a general mathematical model for the propagation of electromagnetic waves is associated with the dependence of the process on the medium. For example, in an aqueous environment, they are transmitted weaker than in an air environment, which makes their use in transmitting waves between objects in *different environments inconvenient. Existing approaches to simulation of acoustic signal are considered in the work. Such methods include models of hydrodynamics in combination with Maxwell's equations, oscillating electrical circuits, methods for modeling the process of propagation and attenuation of sound under water, and others. The theoretical basis for constructing algorithms for modeling the propagation of acoustic oscillations in the marine environment is considered.*

Mathematical and traditimic models of acoustic oscillations are based on preliminary tests and take into account the computer capabilities of technology. This constraint imposes additional conditions and complicates the mathematical model being created. The methods in question do not create mathematical models of the propagation and attenuation of sound signals, taking into account such user conditions as: variable speed of sound, geometry and bottom profile, surface state, medium temperature. Thus, there is a need to develop a methodology for modeling hydroacoustic signal components that describe the generation of signals and adapt to the task.

The analysis indicates the feasibility of using the methods of beam theory and the parabolic equation to describe a model for which the depth is variable.

Keywords: mathematical modeling, acoustic waves, wave equation, hydroacoustics, Helmholtz equation, beam method, normal modes, parabolic equation.

References

1. Hovem, J., Dong, H. (2019) Understanding Ocean Acoustics by Eigenray Analysis. *Journal of Marine Science and Engineering*, 7(4), 118. [in English]
2. Kirby, R., Duan, W. (2018) Modelling sound propagation in the ocean: a normal mode approach using finite elements. *Proceedings of ACOUSTICS*, 1-10 [in English]
3. Hladkyi, A.V, Podlasov, E.S. (2006) Automaticization of schechets of acoustic flows in heterogeneous volovods. *Matematychni mashyny i systemy*, 2, 107-117 [in Russian]
4. Etter, P.C. (2003) Underwater acoustic modeling. New York: Spon Press.
5. Porter, M. (1992) The KRAKEN Normal Mode Program. Ft. Belvoir: Defense Technical Information Center. [in English]
6. Jensen, F. (2011) Computational ocean acoustics. New York: Springer.