УДК 514.18

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ГЛОБАЛЬНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТОЧКОВИМ ПОЛІНОМОМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОМПОЗИЦІЇ З КРАТНИМИ ТОЧКАМИ

Верещага В.М., д.т.н.,
mail337@i.ua, ORCID: 0000-0002-1965-1829
Адоньєв Є.О., д.т.н.,
evgen.adoniev@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1279-4138
Павленко О.М., к.т.н.,
alexander8944@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8646-2622
Рубцов М.О., к.т.н.,
rubtsovnik3077@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1916-6302
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

У статті показано послідовність виконання параметризації, уздовж координатної осі, вихідної дискретно представленої лінії (ДПЛ) та надано у загальному вигляді точковий поліном. Розглядаються можливі варіанти появи кратних точок та надаються значення параметрів щодо цих варіантів. Вказується на те, що з появою на ДПЛ кратних точок у складових елементах точкового полінома виникають невизначеності. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких, у вузлових точках є нуль або одиниця. Показано, що невизначеності, які виникають з появою кратних точок на ДПЛ, не є перешкодою для глобальної інтерполяції із застосуванням точкового полінома. Тобто, для будь-якої композиції з трьох точок, побудова та структура запису точкового полінома лишається без змін. При цьому ніяких обмежень на створення композиції з трьох точок не існує. Цей факт доведено у даній статті. Надано композиційну числову матрицю, у відповідності до якої відбувається обумовлена інтерполяція. Елементами цієї композиційної матриці є значення характеристичних функцій інтерполянта у вузлових точках. Показано, що елементи композиційної матриці інтерполяції не змінюються за наявності будь-якої геометричної композиції з трьох точок. Може змінюватись лише статус цих елементів. В одному випадку їх значення є точними, а у іншому – вони можуть бути границею, до якої прямує значення характеристичної функції точкового полінома.

Геометричне моделювання об’ємних об’єктів довільної форми потребує побудови його поверхні. Зазвичай, побудова поверхонь відбувається *шляхом нанесення на неї сітки. Якщо на поверхні геометричного тіла довільної форми нанести сітку, що має незмінну кількість ліній у прямому та трансверсальному напрямках, то будуть виникати чарунки різних розмірів, як великі, так і дуже замалі. На великих чарунках буде збільшуватись похибка відтворення поверхні, а на малих – будуть збільшуватись витрати ресурсів моделювання, що буде зменшувати ефективність та якість моделювання.*

Ключові слова: кратні точки, геометрична композиція, композиційна матриця, розкриття невизначеностей, точковий поліном.

Постановка проблеми. Геометричне моделювання об’ємних об’єктів довільної форми потребує побудови його поверхні. Зазвичай, побудова поверхонь відбувається шляхом нанесення на неї сітки. Якщо на поверхні геометричного тіла довільної форми нанести сітку, що має незмінну кількість ліній у прямому та трансверсальному напрямках, то будуть виникати чарунки різних розмірів, як великі, так і дуже замалі. На великих чарунках буде збільшуватись похибка відтворення поверхні, а на малих – будуть збільшуватись витрати ресурсів моделювання, що буде зменшувати ефективність та якість моделювання. Сказане обґрунтовує необхідність розробки способу моделювання сіток на поверхнях об’ємних геометричних тіл довільної форми, який мав би можливість використовувати сітки зі змінною кількістю ліній. Змінна кількість ліній у сітках викликає появу дво-, три-,…,n-кратних точок. Отже, розробка та доведення можливості застосування способу інтерполяції дискретно представлених ліній, що утримують кратні точки є, у певній мірі, проблемою, яка і буде розв’язуватись у даній статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ця робота виконана у рамках і є подальшим розвитком композиційного геометричного моделювання [1, 4, 5, 7], який було розроблено на базі точкового числення Балюби-Найдиша [2, 3].

У згаданих роботах [1, 4, 5, 7] вказується на те, що будь-яка геометрична фігура (ГФ) розглядається як скінчена дискретна непуста множина точок, яка може утримувати різного роду підмножини, що представляють собою цілісний геометричний об’єкт (ГО), який являє собою геометричну композицію, при цьому зміна або заміна будь-якого з елементів геометричної композиції не тягне за собою ніяких змін для решти інших елементів композиції. Геометрична композиція відрізняється від іншого роду інших тим, що для кожного для її елементів встановлено власні розміри та розміри, що визначають взаємне розташування усіх елементів. Окрім того, у композиційному геометричному моделюванні кожна вихідна геометрична фігура подається у вигляді двох складових – геометричної і параметричної частин. Такий поділ на дві частини обґрунтовується тим, що будь-яку ГФ визначає безпосередньо наявна кількість вихідних точок, а ні в якому разі, не їх взаємне розташування. Наявність точок ГФ представляє її геометричну частину, а взаємне розташування точок ГФ представляє її параметричну частину. Представлення вихідної ГФ у вигляді двох частин названо, у роботах [1, 4, 5, 7], уніфікацією ГФ.

Композиційне геометричне моделювання базується на застосуванні композиційних матриць.

Існуюча теорія матриць вивчає матриці, що описують алгебраїчні системи, у алгебраїчних описах яких їх складові елементи знаходяться у певній залежності один від одного. Наявність таких залежностей, зі зміною одного будь-якого з елементів, тягне за собою відповідні зміни вихідних значень для решти інших.

Окрім цього, наявність взаємозалежностей між елементами у описах алгебраїчних систем впливає на результати розв'язків через обмеження свободи вибору складових вихідних елементів.

І навпаки, у композиційних матрицях елементи обираються вільно, незалежно один від одного, кількість яких відповідає вимогам до певної композиції. Наприклад, трикутник – визначається трьома точками і при цьому для загального виду трикутника не існує ніяких обмежень щодо взаємного розташування цих точок. Отже, композиційні матриці призначені для опису геометричних фігур.

У роботі [6, 8] розглядається спосіб розгортання-згортання чарунок, який передбачає наявність, на дискретно представлених кривих (ДПК), кратних точок. Однак у роботах [6, 8] не було доведено можливість проведення інтерполяції ДПК з наявними кратними точками. Чим і викликано написання даної статті, теоретичним підґрунтям для якої є теорія нескінченно малих [9].

Формування цілей статті. Розробка способу інтерполяції, доведення його правдивості і можливостей застосування для різних варіантів розташування кратних точок на дискретно представлених лініях для геометричної композиції з трьох точок.

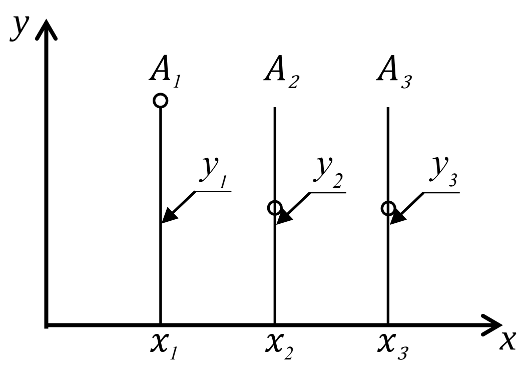

Рис. 1. Вихідна ДПК

Основна частина. Нехай необхідно глобально інтерполювати ДПК, що має за вузли інтерполяції три базисні точки A_i для $i=\overline{(1,3)}$ (рис. 1), які утворюють геометричну композицію (геометричну фігуру – ГФ) з трьох точок. Введемо позначення:

$$x_{11} = x_1 - x_1;\ x_{21} = x_2 - x_1;\ x_{31} = x_3 - x_1. \quad (1)$$

Введемо параметри для вихідної ГФ (рис. 1) уздовж осі Ох:

$$t_1=\frac{x_{11}}{x_{31}}=0;\ t_2=\frac{x_{21}}{x_{31}};\ t_3=\frac{x_{31}}{x_{31}}=1\ . \qquad (2)$$

Тоді інтерполяційний точковий поліном, що глобально інтерполює вихідну ДПК (рис. 1), матиме вигляд [1, 7]:

$$y_M=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\lambda_i}y_i*\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3}\left(t_j\text{-}t\right),\ \text{для } i=\overline{(1,\ 3)}\ , \qquad (3)$$

де y_M – поточна точка на інтерполяційній кривій (3); λ_i – знаменник коефіцієнту, який приводить до одиниці значення

$$y_i*\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3}\left(t_j\text{-}t\right)$$

відповідної характеристичної функції (ХФ) в i-му вузлі.

Характеристичні функції (ХФ) – це вирази $\frac{1}{\lambda_i}$, , які для відповідного i-го вузла позначимо через $P_i(t)$. Тоді рівняння (3) прийме вигляд:

$$y_M=\sum_{i=1}^{3}y_i*P_i(t). \qquad (4)$$

Розкривши вирази ХФ із (4), маємо:

$$P_1(t)=\frac{(t_2\text{-}t)(t_3\text{-}t)}{(t_2\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)};\ P_2(t)=\frac{(t_1\text{-}t)(t_3\text{-}t)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)};\ P_3(t)=\frac{(t_1\text{-}t)(t_2\text{-}t)}{(t_1\text{-}t_3)(t_2\text{-}t_3)}. \qquad (5)$$

Усе викладене вище є відомими фактами [1, 4, 5, 7]. Однак, сучасні методи геометричного моделювання потребують виконувати інтерполяцію ДПК з наявними кратними точками [6, 8]. Розглянемо можливість виконання інтерполяції ДПК, яку утворюють три точки, серед яких є кратні.

1) *Перший варіант*. Нехай точки A_1 і A_2 є двократними, тобто $A_1 \equiv A_2$ (рис. 2). Тоді значення параметрів t, що відповідають (2) будуть дорівнювати:

$$t_1=0;\ t_2=0;\ t_3=1. \qquad (6)$$

Для значень параметру $t=t_i;\ i=\overline{(1,\ 3)}$ розрахуємо значення характеристичних функцій з (5).

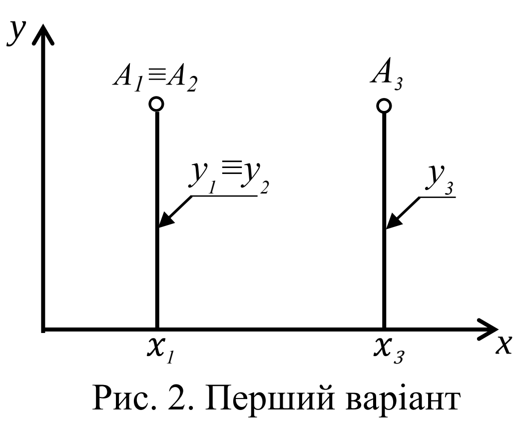

Рис. 2. Перший варіант вихідної ДПК

$$P_1(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right);$$

$$P_2(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right); \qquad (7)$$

$$P_3(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(0\text{-}0)}{(0\text{-}1)(0\text{-}1)}=0\ .$$

Розкриємо невизначеності з (7), встановивши їх границі:

1.1– для значення параметру $t = t_1$

$$\lim_{t\to t_1} P_1(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_1-t_1)(t_3-t_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_3-t_1)}{(t_3-t_1)}=\frac{1-0}{1-0}=1; \quad (8)$$

$$\lim_{t\to t_1} P_2(t_1)=\frac{(t_1-t_1)(t_3-t_1)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}=0, \quad (9)$$

тут для $P_2(t_1)$ границя дорівнює нулеві через те, що t_1-t_1=0 (точний нуль), а решта різниць параметрів прямують до відповідних значень: $t_3-t_1\to 1;\ t_1-t_2\to 0;\ t_2-t_1=1$. Як бачимо, у чисельнику є точний нуль, а решта значень не дорівнює нулю. Отже (9) є правдивим.

$$P_3(t_1)=\frac{(0-0)(0-0)}{(0-1)(0-1)}=0\ . \quad (10)$$

Як бачимо, значення $P_3(t_1)$ встановлюється однозначно за відсутності невизначеності

1.2– для значень параметру $t = t_2$ маємо:

$$P_1(t_1)=\frac{(0-0)(1-0)}{(0-0)(1-0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_2)=\frac{(0-0)(1-0)}{(0-0)(1-0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_3)=\frac{(0-0)(0-0)}{(0-1)(0-1)}=0\ . \quad (11)$$

Розкриємо невизначеності з (11), встановивши їх границі:

$$\lim_{t\to t_1} P_1(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_2-t_2)(t_3-t_2)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}=0, \quad (12)$$

оскільки $t_2-t_2=0$ – точний нуль, а решта різниць прямує до відповідних значень: $t_3-t_2\to 1;\ t_2-t_1\to 0;\ t_3-t_1\to 1$. Тут маємо на увазі, що прямування до нуля – не є нуль.

$$\lim_{t\to t_2} P_2(t_2)=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_3-t_2)}{(t_3-t_2)}=\frac{1-0}{1-0}=1. \quad (13)$$

Як бачимо з (11), $P_3(t_2)=0$ – є точний нуль.

1.3 – для значення параметру $t= t_3$ маємо:

$$P_1(t_3)=\frac{(0-1)(1-1)}{(0-0)(1-0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_3)=\frac{(0-1)(1-1)}{(0-0)(1-0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_3)=\frac{(0-1)(0-1)}{(0-1)(0-1)}=1. \quad (14)$$

Розкриємо невизначеності з (14), встановивши їх границі:

$$\lim_{t\to t_3} P_1(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_2-t_3)(t_3-t_3)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}=0, \quad (15)$$

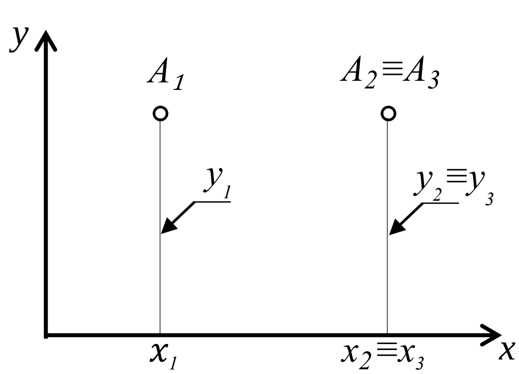

Рис. 3. Другий варіант вихідної ДПК з двократними точками

через те, що t_3-t_3 – є точний нуль, а решта інших різниць параметрів прямує: $t_2-t_3\to -1;\ t_2-t_1\to 0;\ t_3-t_1\to 1$.

$$\lim_{t\to t_3} P_2(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_1-t_3)(t_3-t_3)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}=0,$$

оскільки $t_3-t_3=0$ – точний нуль, а $t_1-t_2\to -1,\ \ t_1-t_2\to 0;\ t_3-t_2\to 1$. Прямування до нуля не є нуль. Як бачимо з (14) – $P_3(t_3)=1$ є точна одиниця за відсутності невизначеності і не потребує встановлення границі.

Отже, поява невизначеності (8), (9), (11), (12), (13), (14) не обмежує можливість застосування точкового полінома (4) для ДПК першого варіанту (рис. 2), яка має двократну точку $A_1 \equiv A_2$.

2) *Другий варіант*. Нехай точки A_2 і A_3 є двократними, тобто $A_2 \equiv A_3$ (рис. 3). Тоді значення параметрів t, що відповідають (2) будуть дорівнювати:

$$t_1=0;\ t_2=1;\ t_3=1 \tag{16}$$

Для кожного зі значень параметрів (16) розрахуємо значення характеристичних функцій із (5).

2.1– для $t=t_1$ маємо:

$$P_1(t_1)=\frac{(1\text{-}0)(1\text{-}0)}{(1\text{-}0)(1\text{-}0)}=1;\ P_2(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}=\left(\frac{0}{0}\right). \tag{17}$$

Розкриємо невизначеності з (7)

$$\lim_{t\to t_1} P_2(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_1\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}=0, \tag{18}$$

оскільки $t_1\text{-}t_1=0$ – точний нуль, а $t_3\text{-}t_1\to 1;\ t_1\text{-}t_2\to\text{-}1;\ t_3\text{-}t_2\to 0.$

$$\lim_{t\to t_1} P_3(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_1\text{-}t_1)(t_2\text{-}t_1)}{(t_1\text{-}t_3)(t_2\text{-}t_3)}=0, \tag{19}$$

тому що $t_1\text{-}t_1=0$ – точний нуль, а $t_2\text{-}t_1\to 1;\ t_1\text{-}t_3\to\text{-}1;\ t_2\text{-}t_3\to 0.$

2.2 – для $t=t_2$ маємо:

$$P_1(t_2)=\frac{(1\text{-}1)(1\text{-}1)}{(1\text{-}0)(1\text{-}0)}=0;\ P_2(t_2)=\frac{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_2)=\frac{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}=\left(\frac{0}{0}\right). \tag{20}$$

Розкриємо невизначеності з (10):

$$\lim_{t\to t_2} P_2(t_2)=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}=1, \tag{21}$$

через те, що $t_3\text{-}t_2$ у чисельнику і знаменнику скорочуються.

$$\lim_{t\to t_2} P_3(t_2)=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_1\text{-}t_2)(t_2\text{-}t_2)}{(t_1\text{-}t_3)(t_2\text{-}t_3)}=0, \tag{22}$$

оскільки $t_2\text{-}t_2=0$ – точний нуль, а $t_1\text{-}t_2\to\text{-}1;\ t_1\text{-}t_3\to\text{-}1;\ t_2\text{-}t_3\to 0.$

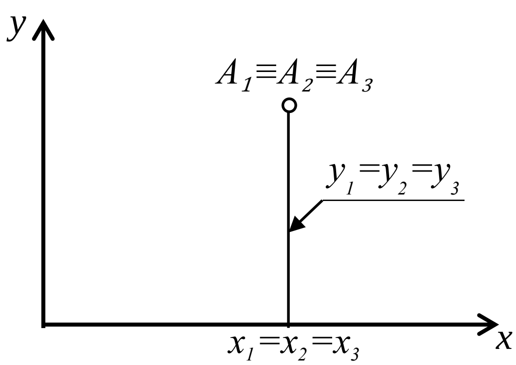

Рис. 4. Вироджена дискретно представлена лінія

2.2– для $t=t_3$ маємо:

$$P_1(t_3)=\frac{(1\text{-}1)(1\text{-}1)}{(1\text{-}0)(1\text{-}0)}=0;$$

$$P_2(t_3)=\frac{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}=\left(\frac{0}{0}\right); \tag{23}$$

$$P_3(t_3)=\frac{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Розкриємо невизначеності з (13)

$$\lim_{t\to t_3} P_2(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_1\text{-}t_2)(t_2\text{-}t_3)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}=0, \tag{24}$$

через те, що $t_2\text{-}t_3=0$ – точний нуль, а

$t_1\text{-}t_3 \to \text{-}1;\ \ t_1\text{-}t_2 \to \text{-}1;\ t_3\text{-}t_2 \to 0.$

$$\lim_{t\to t_3} P_3(t_3) = \lim_{t\to t_3} \frac{(t_1\text{-}t_3)(t_2\text{-}t_3)}{(t_1\text{-}t_3)(t_2\text{-}t_3)} = 1, \tag{25}$$

тому що у чисельнику і знаменнику перший множник $\frac{-1}{-1}=1$, а другий – скорочується.

Як бачимо, для варіанту наявними кратними точками, наявність невизначеностей (18), (19), (21), (22), (24), (25) не стає на перешкоді для здійснення інтерполяції точковим поліномом через те, що вказані невизначеності розкриваються у повній відповідності до вимог, щодо інтерполяції дискретно представленої лінії, яку наведено на рис.1, тобто без наявних особливостей щодо розташування вихідних точок.

3) *Третій варіант*. Нехай дискретно представлена лінія (ДПЛ) вироджується у точку, тобто усі точки ДПЛ співпадають $A_1 \equiv A_2 \equiv A_3$ (рис. 4). У цьому випадку усі значення параметрів t, що відповідають (2) будуть дорівнювати нулю: $t_1=t_2=t_3=0$. Виходячи з цього, усі характеристичні функції з (5) будуть мати невизначеність:

$$\begin{aligned} &P_1(t_1)=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_1)=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_1)=\left(\frac{0}{0}\right);\\ &P_1(t_2)=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_2)=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_2)=\left(\frac{0}{0}\right);\\ &P_1(t_3)=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_3)=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_3)=\left(\frac{0}{0}\right); \end{aligned} \tag{26}$$

Розкриємо невизначеності з (26).

$$\lim_{t\to t_1} P_1(t_1) = \lim_{t\to t_1} \frac{(t_2\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}{(t_2\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)} = 1 \tag{27}$$

тому, що у чисельнику та знаменнику записані однакові невизначеності, які за результатом скорочення надають одиницю.

$$\lim_{t\to t_1} P_2(t_1) = \lim_{t\to t_2} \frac{(t_1\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)} = 0, \tag{28}$$

через те, що $t_1\text{-}t_1=0$ – є точний нуль, а $t_3\text{-}t_1 \to 0;\ t_1\text{-}t_2 \to 0;\ t_3\text{-}t_2 \to 0$. Як бачимо, різниці параметрів, що є множниками у знаменнику, прямують до нуля, тобто не є нуль. Звідси, і їх добуток у знаменнику не є нуль. Отже, границю (8) доведено.

$$\lim_{t\to t_1} P_3(t_1) = \lim_{t\to t_1} \frac{(t_1\text{-}t_1)(t_2\text{-}t_1)}{(t_1\text{-}t_3)(t_2\text{-}t_3)} = 0, \tag{29}$$

через те, що $t_1\text{-}t_1=0$ – точний нуль, а $t_2\text{-}t_1 \to 0;\ t_1\text{-}t_3 \to 0;\ t_2\text{-}t_3 \to 0.$

$$\lim_{t\to t_2} P_1(t_2) = \lim_{t\to t_2} \frac{(t_2\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}{(t_2\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)} = 0, \tag{30}$$

через те, що $t_2\text{-}t_2=0$ – є точний нуль, а $t_3\text{-}t_2 \to 0;\ t_2\text{-}t_1 \to 0;\ t_3\text{-}t_1 \to 0.$

$$\lim_{t\to t_2} P_2(t_2)=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}=1, \qquad (31)$$

через те, що вирази невизначеностей у чисельнику і знаменнику є однаковими, які скорочуються, за теорією нескінченних малих, з метою усунення невизначеностей.

$$\lim_{t\to t_2} P_3(t_2)=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)}=0, \qquad (32)$$

через те, що $t_2-t_2=0$ – точний нуль, а $t_1-t_2\to 0;\ t_1-t_3\to 0;\ t_2-t_3\to 0$

$$\lim_{t\to t_3} P_1(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_2-t_3)(t_3-t_3)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}=0, \qquad (33)$$

через те, що $t_3-t_3=0$ – точний нуль, а $t_2-t_3\to 0;\ t_2-t_1\to 0;\ t_3-t_1\to 0$

$$\lim_{t\to t_3} P_2(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_1-t_3)(t_3-t_3)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}=0, \qquad (34)$$

через те, що $t_3-t_3=0$ – точний нуль, а $t_1-t_3\to 0;\ t_1-t_2\to 0;\ t_3-t_2\to 0.$

$$\lim_{t\to t_3} P_3(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_1-t_3)(t_2-t_3)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)}=1, \qquad (35)$$

через те, що вирази невизначеностей у чисельнику і знаменнику є однаковими і шляхом усунення цих невизначеностей дістаємо одиницю.

Як бачимо, і у третьому варіанті, наявність невизначеностей (27), (28), (29), (30), (31), (32), (33), (34), (35) для характеристичних функцій у вузлових точках, не стає на заваді для здійснення глобальної інтерполяції параметричним точковим поліномом. Такий висновок робимо через те, що вказані невизначеності розкриваються у повній відповідності з вимогами щодо інтерполяції вихідної дискретно представленої лінії без наявних особливих кратних точок (рис.1).

Надамо таблицю значень характеристичних функцій у вузлових точках.

Значення ХФ у вузлових точках для вихідної ДПК (рис. 1)

Таблиця 1.

P / t	$P_1(t)$	$P_2(t)$	$P_3(t)$
t_1	1	0	0
t_2	0	1	0
t_3	0	0	1

Наведеній таблиці відповідає композиційна матриця числова A_λ:

$$A_\lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (36)$$

Тобто, геометричній композиції з трьох точок, у якій відсутні кратні точки та які треба інтерполювати, відповідає композиційна матриця (36). Як бачимо, і для решти варіантів композицій з трьох точок, що утримують дво- та трикратні точки, композиційна матриця відповідають (36). Різниця лише в тім, що елементи композиційної матриці (36) є точні одиниці та точні нулі, а елементами композиційних матриць для решти можливих варіантів, що відповідають композиціям з наявними дво- та трикратними точками, є одиниці та нулі як границі, до яких прямують відповідні значення характеристичних функцій.

Висновки. У даній статті доведено, що для будь-якої композиції, яку утворюють три точки, що подають ДПК, є можливим застосовувати, у якості інтерполянта, параметричний точковий поліном і який, при цьому, однаково записується для ДПК з відсутніми кратними точками; з наявними кратними точками і, навіть, коли ДПК вироджується в точку. Факт можливості застосування параметричних точкових поліномів для інтерполяції дискретно представлених ліній, що утримують кратні точки є важливим при використанні їх у способі розгортання-згортання чарунок. У вказаному способі виникає потреба будувати чотири- та трикутникові чарунки, що вироджуються в лінію або навіть у точку. Це підвищує точність побудови поверхні об'ємного об'єкту довільної форми.

Література

1. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления : автореф. дисс … д-ра техн. наук. К.: КГТУСА, 1995. 36 с.
3. Балюба И.Г., Найдыш В.М. Точечное исчисление / под ред. Верещаги В.М. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. 234 с.
4. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. , Лисенко К.Ю. Основи композиційного геометричного моделювання. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
5. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. Метод композиційного геометричного моделювання: монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 310 с.
6. Верещага В.М. Павленко О.М., Найдиш А.В. Моделювання горизонтального земельного майданчика у точковому численні: монографія. Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. 187 с.
7. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія: ФОП Однорог Т.В., 2017. 108с.
8. Павленко О.М. Геометричне моделювання вертикального планування

горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення: дис … канд. техн. наук, 05.01.01. Мелітополь: ТДАТУ, 2017. 229с.
9. Рубцов М.О., Кравець В.І., Назарова О.П. Вища математика: навч. посіб. у 2-х ч., ч1. Мелітополь: видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2015. 242 с.

ГЛОБАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТОЧЕЧНОГО ПОЛИНОМА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИЦИИ С КРАТНЫМИ ТОЧКАМИ

Верещага В.М., Адоньев Е.А., Павленко А.М., Рубцов Н.А.

В статье показана последовательность выполнения параметризации, вдоль координатной оси, исходной дискретно представленной линии (ДПЛ) и представлено в общем виде точечный полином. Рассматриваются возможные варианты появления кратных точек и представляются значения параметров по этим вариантам. Указывается на то, что с появлением на ДПЛ кратных точек в составляющих элементах точечного полинома возникают неопределенности. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, пределами которых, в узловых точках являются ноль или единица. Показано, что неопределенности, которые возникают с появлением кратных точек на ДПЛ, не являются препятствием для глобальной интерполяции с применением точечного полинома. То есть, для любой композиции из трех точек, построение и структура записи точечного полинома остается без изменений. При этом никаких ограничений на создание композиции из трех точек не существует. Этот факт доказан в данной статье. Представлено композиционную числовую матрицу, в соответствии с которой происходит обусловленная интерполяция. Элементами этой композиционной матрицы являются значения характеристических функций интерполянта в узловых точках. Показано, что элементы композиционной матрицы интерполяции не изменяются при наличии любой геометрической композиции из трех точек. Может изменяться только статус этих элементов. В одном случае их значения являются точными, а в другом – они могут быть пределом, к которому следует значение характеристической функции точечного полинома.

Геометрическое моделирование объемных объектов произвольной формы требует построения его поверхности. Обычно, построение поверхностей происходит путем нанесения на нее сетки. Если на поверхности геометрического тела произвольной формы нанести сетку, имеет неизменную количество линий в прямом и трансверсальном направлениях, то будут возникать ячейки различных размеров, как крупные, *так и очень малы. На больших ячейках будет увеличиваться погрешность воспроизведения поверхности, а на малых - будут увеличиваться расходы ресурсов моделирования, будет снижать эффективность и качество моделирования.*

Ключевые слова: кратные точки, геометрическая композиция, композиционная матрица, раскрытие неопределенностей, точечный полином.

GLOBAL INTERPOLATION OF THE POINTING POLYNOMIAL OF THE GEOMETRIC COMPOSITION WITH MULTIPLE POINTS

Viktor Vereshchaha, Yevhen Adoniev, Oleksandr Pavlenko,
Mykola Rubtsov

The article shows the sequence of parameterization, along the coordinate axis, of the original discretely presented line (DPL) and is presented in general form by a point polynomial. Possible options for the appearance of multiple points are considered and the values of the parameters for these options are presented. It is indicated that with the appearance of multiple points on the DPL in the constituent elements of a point polynomial, uncertainties arise. It is proved that all these uncertainties are revealed, the limits of which, at the nodal points, are zero or one. It is shown that the uncertainties that arise with the appearance of multiple points on the DPC are not an obstacle to global interpolation using a point polynomial. That is, for any composition of three points, the construction and recording structure of a point polynomial remains unchanged. However, there are no restrictions on creating a composition of three points. This fact is proved in this article. A composite numerical matrix is presented in accordance with which conditional interpolation occurs. The elements of this compositional matrix are the values of the characteristic functions of the interpolant at the nodal points. It is shown that the elements of the compositional interpolation matrix do not change in the presence of any geometric composition of three points. Only the status of these elements can be changed. In one case, their values are accurate, and in the other, they can be the limit to which the value of the characteristic function of a point polynomial follows.

Geometric modeling of volumetric objects of arbitrary shape requires the construction of its surface. Usually, the construction of surfaces is done by drawing a mesh on it. If a mesh is applied on the surface of a geometric body of an arbitrary shape, has a constant number of lines in the direct and transverse directions, then cells of various sizes, both large and very small, will appear. On large cells, the surface reproduction error will increase, and on small cells, the consumption of *modeling resources will increase, and the efficiency and quality of modeling will decrease.*

Keywords: multiple points, geometric composition, compositional matrix, disclosure of uncertainties, point polynomial.

References

1. Adoniev, Ye.O. (2018) Compositional method of geometric modeling of multifactorial systems: Doctor’s thesis. K.: KNUBA, [in Ukrainian]
2. Baliuba, Y.H. (1995) Constructive geometry of diversity based on point calculus. Extended abstract of doctor’s thesis. K.: KGTUSA, [in Russian]
3. Baliuba, Y.H., Naidysh, V.M. (2015) Point calculus. Vereshchahy V.M. (ed.). Melitopol: Yzd-vo MDPU imeni B. Khmelnytskoho, [in Russian]
4. Vereshchaha, V.M., Naidysh, A.V., Adoniev, Ye.O., Lysenko, K.Iu. (2019) Basics of compositional geometric modeling. Melitopol: FOP Odnoroh T.V. [in Ukrainian]
5. Vereshchaha, V.M., Naidysh, A.V., Adoniev, Ye.O. (2019) Method of composite geometric modeling. Melitopol: FOP Odnoroh T.V. [in Ukrainian]
6. Vereshchaha, V.M., Pavlenko, O.M., Naidysh, A.V. (2019) Modeling of a horizontal land plot in dotted numerous: monograph. Melitopol: MDPU imeni Bohdana Khmelnytskoho, [in Ukrainian]
7. Vereshchaha V.M. (2017) Compositional geometric modeling. Melitopol: FOP Odnoroh T.V., [in Ukrainian]
8. Pavlenko O.M. (2017) Geometric modeling of vertical planning of a horizontal land plot by means of point BN-calculus: Candidate’s thesis, 05.01.01 Melitopol: TDATU, [in Ukrainian]
9. Rubczov, M.O., Kravecz, V.I., Nazarova, O.P. (2015) Higher mathematics. Melitopol: vidavnicztvo MDPU im. B. Khmelnytskoh. [in Ukrainian]