УДК 514.18

ПОБУДОВА СІМ'Ї ПЛОСКИХ КРИВИХ ЗА РІВНЯННЯМИ ІЗОМЕТРИЧНИХ СІТОК

Несвідомін В.М., д.т.н.,
vnesvidomin@nubip.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1495-1718
Пилипака С.Ф., д.т.н.,
s.pylypaka@nubip.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1496-4615
Несвідоміна О.В.
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)

В статті розкрито аналітичний опис формування сімей ортогональних плоских кривих ліній у неявному вигляді на основі аналізу параметричного рівняння плоскої ізометричної сітки, побудованої відокремленням дійсної та уявної частин функції комплексної змінної. Така постановка задач обумовлена тим, що плоскі ізометричні сітки, як дві сім'ї ортогональних координатних ліній з квадратними комірками, використовуються в конформних відображення, наприклад, при нанесенні зображень на криволінійні поверхні з найменшими спотвореннями. В той же час, сім'ї плоских паралельних ліній широко застосовують в геометричному моделюванні теплопереносу, електричних полів, течії рідини тощо. Між цими геометричними образами є певний зв'язок, пояснення якого здійснюється на конкретних прикладах. Аналітичні викладки виведення параметричного рівняння ізометричної сітки є досить трудомісткими, тому їх виконання здійснюється в середовищі символьної алгебри Maple. З цією метою було створено відповідне програмне забезпечення інтерактивної моделі виведення параметричних рівнянь ізометричних сіток для будь-якої вихідної функції комплексної змінної з наступним відокремленням дійсної та уявної її частин. Було виявлено, що значення абсцис та ординат параметричного рівняння плоскої ізометричної сітки можна представити у вигляді явних рівнянь поверхонь. Для цілих значень степеня показникової функції комплексної змінної значення абсцис та ординат будуть представлятися алгебраїчними поверхнями у явному вигляді. Проекції перерізів поверхонь абсцис та ординат горизонтальними січними площинами на горизонтальну площину формують дві сім'ї кривих ліній, рівняння яких можна отримати тільки у неявному вигляді. На прикладі квадратичної функції комплексної змінної доведено, що ці сім'ї ліній є взаємоперпендикулярними. В залежності від складності функції змінної, сім'ї ліній можуть мати різноманітні форми. Показано практичне застосування побудови сім'ї ліній для геометричного моделювання ліній потоку рідини, які обтікають перепону у вигляді півкола.

Ключові слова: ізометричні сітки, функції комплексної змінної, сім'ї ортогональних ліній, геометричне моделювання потоку.

Постановка проблеми. Геометричне моделювання процесів в теплотехніці, гідродинаміці і в інших технічних областях, передбачає побудову множин паралельних ліній. Одним із можливих способів є використання параметричних рівнянь плоских ізометричних сіток.

Аналіз останніх публікацій. Формування та використання плоских ізометричних сіток за функціями комплексної змінної наведено в працях [1, 2]. В праці [3] розкрито спосіб побудови сімей паралельних ліній стосовно візуалізації розв'язків задач моделювання гетерогенних процесів.

Формулювання цілей статті. Розкрити спосіб формування сім'ї паралельних кривих в площині як множину суміщених проекцій кривих перерізу поверхні горизонтальними площинами на основі аналізу параметричного рівняння плоскої ізометричної сітки.

Викладення основного матеріалу. Нехай маємо показникову функцію $f(z)$ комплексної змінної z:

$$f = z^k, \tag{1}$$

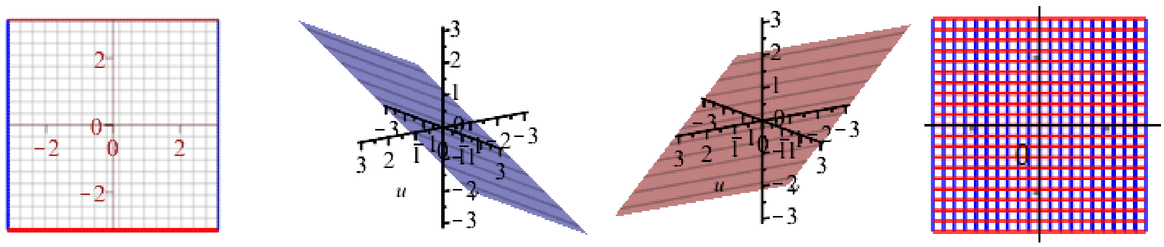
де $z = u + I\,v$ – комплексне число, $I = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Відокремленням дійсної $Re(f(z))$ та уявної $Im(f(z))$ частин функції $f(z)$ отримаємо плоску ізометричну сітку виду:

$$\boldsymbol{R}(u,v) = [Re(f(z)), Im(f(z)), 0]. \tag{2}$$

Для значення показника $k = 1$ функції $f(z)$ комплексної змінної z отримаємо найпростішу декартову сітку (рис.1,а):

$$\boldsymbol{R}(u,v) = [u, v, 0]. \tag{3}$$



а) б) в) г)

Рис.1. Побудова найпростішої сім'ї ліній на площині

Координата x рівняння (3) представляє площину $\boldsymbol{Z}_x(u,v) = u$ з віссю Oy з кутом нахилу 45° до площини Oxy (рис.1,б), а координата y - площину $\boldsymbol{Z}_y(u,v) = v$ з віссю Ox (рис.1,в). Горизонтальні перерізи цих площин $\boldsymbol{Z}_x(u,v) = z_i$ і $\boldsymbol{Z}_y(u,v) = z_i$ формують на площині Oxy дві сім'ї ліній (рис.1,в). На відміну від параметричного рівняння плоскої сітки (2), в цьому випадку маємо неявні рівняння кривих:

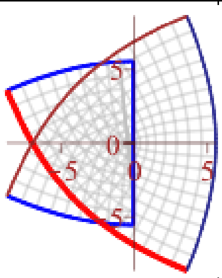
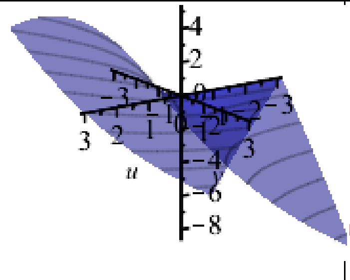
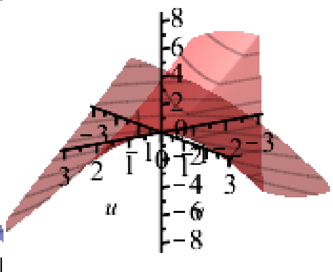
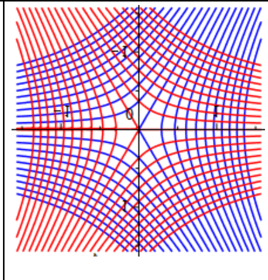
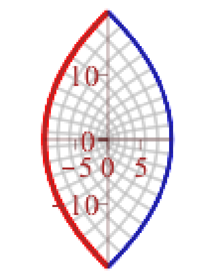
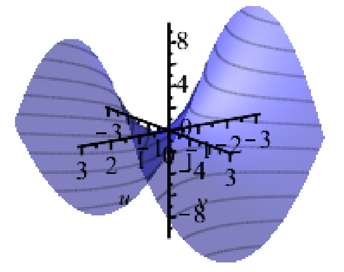
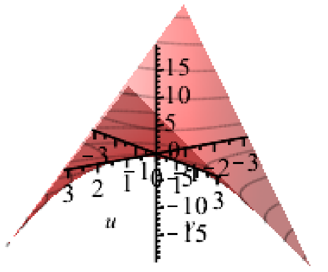
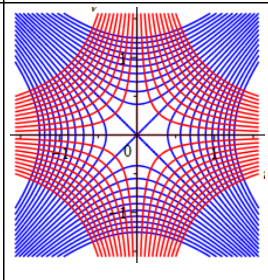
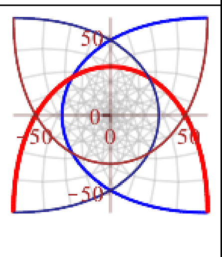
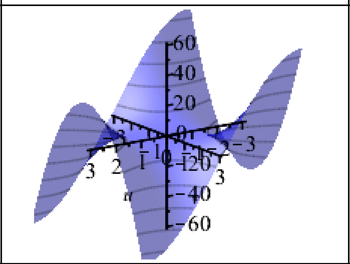
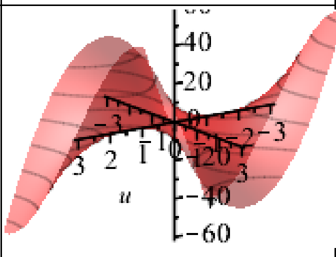
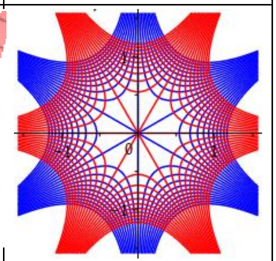
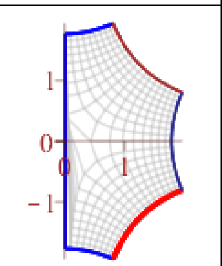
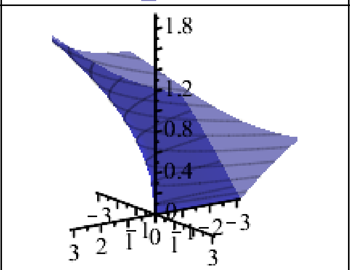
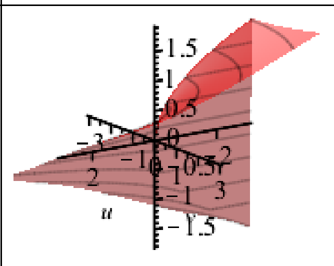
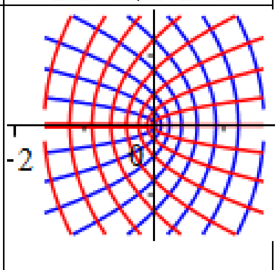
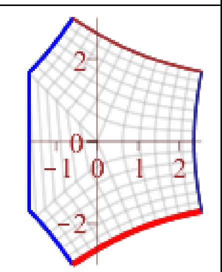
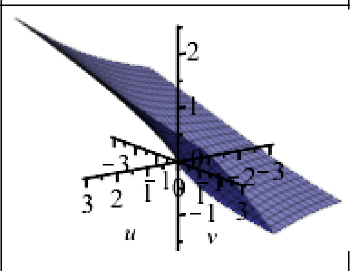
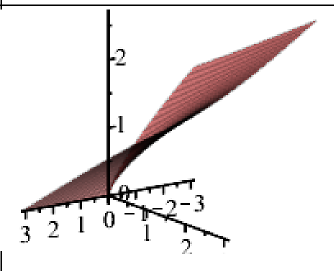
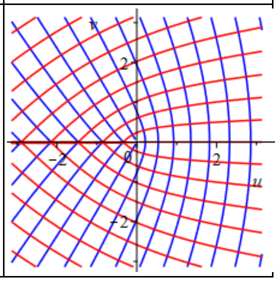
$$\boldsymbol{Z}_x(u,v) - z_i = 0, \boldsymbol{Z}_y(u,v) - z_i = 0, \tag{4}$$

де $z_i = z_o..z_n$ – положення січної горизонтальної площини.

В табл.1 побудовані ізометричні сітки $\boldsymbol{R}(u,v)$, поверхні $\boldsymbol{Z}_x(u,v)$, $\boldsymbol{Z}_y(u,v)$ та дві сім'ї ліній (4) для показника $k=\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

Таблиця 1

Поверхні та сім'ї плоских ліній в залежності показника k

k	$\boldsymbol{R}(u,v)$	z_x	z_y	Сім'ї ліній
$\frac{3}{2}$				
2				
3				
$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{3}$				

Для значення показника $k=2$ функції комплексної змінної $f(z)=z^2$ отримаємо квадратичну плоску ізометричну сітку (рядок 2 табл.1):

$$\boldsymbol{R}(u,v)=[u^2-v^2,2uv,0], \tag{5}$$

координати x та y є поверхнями із гіпарів:

$$\boldsymbol{Z}_x(u,v)=u^2-v^2, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{Z}_y(u,v) = 2uv. \tag{7}$$

Перерізами площиною z_i поверхні (6) є гіперболи з асимптотами бісектрис системи координат Oxy, а поверхні (7) – гіперболи з асимптотами осей координат Oxy відповідно:

$$u^2 - v^2 - z_i = 0, \tag{8}$$

$$2uv - z_i = 0. \tag{9}$$

Частинні похідні гіпербол (8) і (9) дорівнюють:

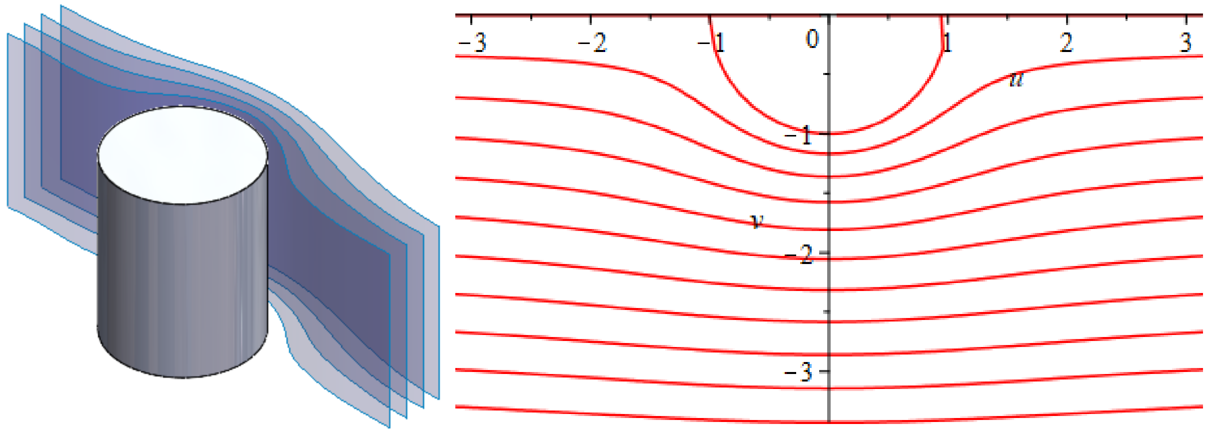
$$\frac{\partial}{\partial u}(\,u^2 - v^2 - z_i) = 2u,\;\; \frac{\partial}{\partial v}(\,u^2 - v^2 - z_i) = -2v, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(2uv - z_i) = 2v,\;\; \frac{\partial}{\partial v}(2uv - z_i) = 2u, \tag{11}$$

що підтверджують взаємну ортогональність сім'ї (8) і (9) гіпербол.

В табл.2 побудовано плоскі ізометричні сітки $\boldsymbol{R}(u,v)$, поверхні $\boldsymbol{Z}_x(u,v)$ і $\boldsymbol{Z}_y(u,v)$ в залежності від функції $f(z)$ комплексної змінної z.

Одним із застосувань сімей ліній є моделювання ліній потоку рідини, яка обтікає певні перешкоди, зокрема, у вигляді циліндра (рис.2,а).



а) б)

Рис.2. Моделювання ліній потоку рідини

Для функції комплексної змінної $f(z) = z + \frac{1}{z}$ отримаємо плоску ізометричну сітку з параметричним рівнянням:

$$\boldsymbol{R}(u,v) = \left[\frac{u(u^2+v^2+1)}{u^2+v^2}, \frac{u(u^2+v^2+1)}{u^2+v^2}, 0\right]. \tag{12}$$

Перерізи поверхні горизонтальними площинами z_i дозволяють отримати неявні рівняння сім'ї ліній, які обтікають півколо:

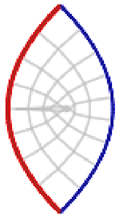
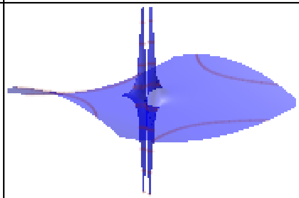
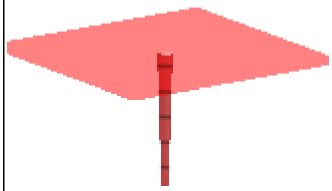
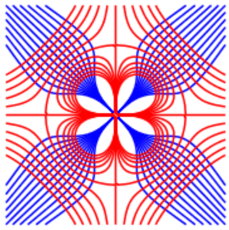
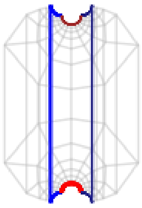
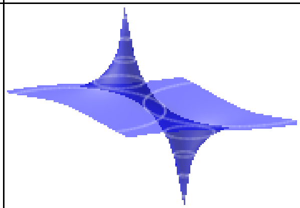
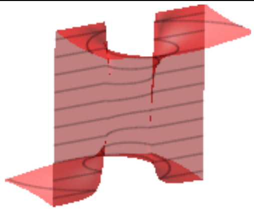
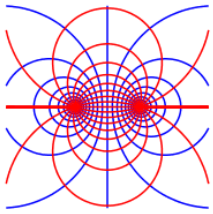
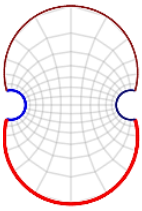
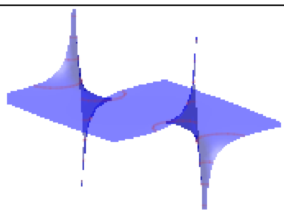
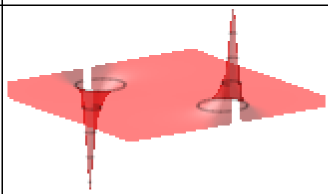
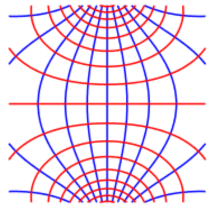
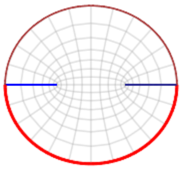
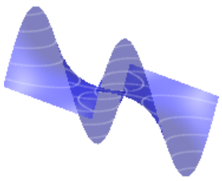
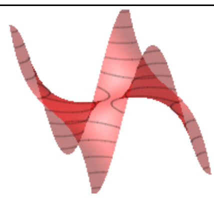
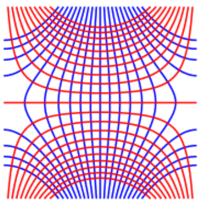
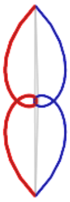
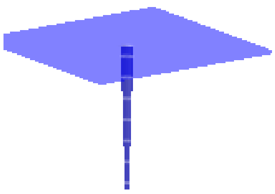
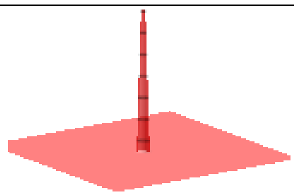
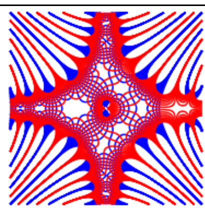
$$\frac{u(u^2+v^2+1)}{u^2+v^2} - z_i = 0, \tag{13}$$

де $z_i = -9\pi..0$ – параметр лінії.

Висновки. Доведено взаємну перпендикулярність двох сімей ліній, отриманих в перерізі горизонтальними площинами поверхонь, які виражають координати абсцис та ординат параметричного рівняння плоскої ізометричної сітки. Виведено неявне рівняння сім'ї кривих ліній, які обтікають півколо.

Таблиця 2

Поверхні та сім'ї плоских ліній в залежності від функції $f(z)$

$f(z)$	$\boldsymbol{R}(u,v)$	$\boldsymbol{Z}_x(u,v)$	$\boldsymbol{Z}_y(u,v)$	Сім'ї ліній
$z^2+\dfrac{1}{z^2}$				
$\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$				
$\dfrac{e^z-1}{e^z+1}$				
$sin(z)$				
$sin(z^2)-\dfrac{e^z}{z}$				

Література

1. Несвідоміна О.В. Побудова плоских ізометричних сіток за наперед заданими плоскими кривими. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2017. Вип. 3(62). Том 2. С.298-302.
2. Пилипака С.Ф., Кремець Т.С., Несвідоміна О.В. Конформне відображення растрових написів на плоскі криволінійні області. *Сучасні проблеми моделювання*. *Технічні науки*. Мелітополь, 2018. Вип. 13. С. 124–130.
3. Шоман О.В. Даниленко В.Я. Розв'язання задач формоутворення двовимірних геометричних множин у тривимірному просторі. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки*. Мелітополь, 2014. Вип. 3. С. 147-152.

ПОСТРОЕНИЕ СЕМЬИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕТКИ

Несвидомин В.Н., Пилипака С.Ф., Несвидомина А.В.

В статье раскрыто аналитическое описание формирования семей ортогональных плоских кривых линий в неявном виде на основе анализа параметрического уравнения плоской изометрической сетки, построенной отделением действительной и мнимой частей функции комплексной переменной. Такая постановка задач связана с тем, что плоские изометрические сетки, как две семьи ортогональных координатных линий с квадратными ячейками, используются в конформных отображения, например, при нанесении изображений на криволинейные поверхности с наименьшими искажениями. В то же время, семьи плоских параллельных линий широко применяют в геометрическом моделировании теплопереноса, электрических полей, течения жидкости и т. д. Между этими геометрическими образами есть определенная связь, объяснение которого показано на конкретных примерах. Аналитические выкладки вывода параметрического уравнения изометрической сетки являются достаточно трудоемкими, поэтому их выполнение осуществляется в среде символьной алгебры Maple. С этой целью было создано соответствующее программное обеспечение интерактивной модели вывода параметрических уравнений изометрических сеток для любой исходной функции комплексной переменной с последующим отделением действительной и мнимой ее частей. Было обнаружено, что значение абсцисс и ординат параметрического уравнения плоской изометрической сетки можно представить в виде явных уравнений поверхностей. Для целых степеней показательной функции комплексного переменного зависимости величин абсцисс и ординат будут представляться алгебраическими поверхностями в явном виде уравнений. Проекции сечений поверхностей абсцисс и ординат горизонтальными секущими плоскостями на горизонтальную плоскость формируют две семьи кривых линий, уравнения которых можно получить только в неявном виде. На примере квадратичной функции комплексного переменного доказано, что эти семьи линий является взаимно ортогональными. В зависимости от сложности функции комплексной переменной, полученные семьи плоских линий могут иметь различные формы. Показано практическое применение построения семьи линий для геометрического моделирования линий потока жидкости, которые обтекают препятствие в виде полукруга.

Ключевые слова: изометрические сетки, функции комплексной переменной, семьи ортогональных линий, геометрическое моделирование.

CONSTRUCTION OF A FAMILY OF FLAT CURVES ACCORDING TO THE EQUATIONS OF ISOMETRIC GRIDS

Victor Nesvidomin, Sergiy Pylypaka, A. Nesvidomina

The article reveals an analytical description of the formation of families of orthogonal flat curved lines in the implicit form based on the analysis of the parametric equation of a flat isometric grid constructed by separating the real and imaginary parts of the function of a complex variable. This formulation is due to the fact that flat isometric grids, as two families of orthogonal coordinate lines with square cells, are used in conformal mappings, for example, when applying images to curved surfaces with the least distortion. At the same time, families of flat parallel lines are widely used in geometric modeling of heat transfer, electric fields, fluid flow, etc. There is a connection between these geometric images, which is explained by specific examples. Analytical calculations of deriving the parametric equation of an isometric grid are quite time-consuming, so their implementation is carried out in the environment of symbolic algebra Maple. For this purpose, the corresponding software of the interactive model of the derivation of parametric equations of isometric grids for any initial function of a complex variable with the subsequent separation of its real and imaginary parts was created. It was found that the values of the abscissa and ordinates of the parametric equation of a flat isometric grid can be represented as explicit surface equations. For the exponential function of the complex variable, the abscissa and ordinate values will be represented by algebraic surfaces explicitly. The projections of the sections of the abscissa and ordinate surfaces by horizontal cutting planes on the horizontal plane form two families of curved lines, the equations of which can be obtained only implicitly. By the example of the quadratic function of a complex variable, it is proved that these families of lines are mutually perpendicular. Depending on the complexity of the function of the variable, families of lines can have different shapes. The practical application of building a family of lines for geometric modeling of fluid flow lines that flow around the barrier in the form of a semicircle is shown.

Keywords: isometric grids, functions of a complex variable, families of orthogonal lines, geometric flow modeling.

References

1. Nesvidomina O. (2017) Construction of flat isometric grids according to predetermined flat curves. *Bulletin of Kherson National Technical University*. Kherson, 3 (62), 2, 298-302 [in Ukrainian].
2. Pylypaka S., Kremets T., Nesvidomina O. (2018) Conformal mapping of raster inscriptions on flat curvilinear areas. *Modern problems of modeling*: Melitopol, 13, 124–130 [in Ukrainian].
3. Shoman O. Danilenko V. (2014) Solving problems of forming two-dimensional geometric sets in three-dimensional space. *Modern problems of modeling*. Melitopol, 3, 147-152 [in Ukrainian].