

УДК 621.833

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СМЕЩЕНИЯ ИСХОДНОГО КОНТУРА НА КРИВИЗНЫ ПРОФИЛЕЙ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С ЭВОЛЮТНЫМ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ

Протасов Р.В.,\*

[protasov@tmm-sapr.org](mailto:protasov@tmm-sapr.org), ORCID: 0000-0003-1611-0610

Словацкий технический университет (Братислава, Словакия)

Устиненко А.В., к.т.н.

[ustin1964@tmm-sapr.org](mailto:ustin1964@tmm-sapr.org), ORCID: 0000-0002-6714-6122

Андрієнко С.В.,\*

[andrisergejjsv@gmail.com](mailto:andrisergejjsv@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4310-3128

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет (Украина)

*Статья посвящена модификации эволютного зацепления с выпукло-вогнутым контактом и оценке его влияния на кривизну сопряжённых профилей зубьев шестерни и колеса. Это зацепление является перспективным, так как представляет собой семейство профилей с широким диапазоном геометрических и качественных показателей. На основании построения Бобилье получено дифференциальное уравнение 2-го порядка, которое описывает эволютное зацепление. Решение дифференциального уравнения получено в виде полинома. Профиль инструментальной рейки можно получить, подставляя полином в уравнение параметрической кривой. Для построения профиля зуба шестерни была использована система уравнений перехода от профиля сопряженной рейки. В уравнение бокового профиля зуба инструментальной рейки добавлен коэффициент смещения, который имеет одинаковую величину для зубьев шестерни и колеса, но противоположный знак. При добавлении коэффициента смещения в уравнение инструментальной рейки выполнялись два отдельных расчета, чтобы получить положительное и отрицательное смещение на зубе шестерни и колеса соответственно. Исследовалась пара зубчатых колес с параметрами  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 80$ ,  $m = 10$ . Рассматривалось несколько значений коэффициента смещения с положительным и отрицательным знаком для зубьев шестерни. Результаты исследований позволили оценить влияние смещения рейки на кривизны профилей зубьев и на высоту зоны двояковыпуклого контакта в околополюсной зоне. Показано, что отрицательное смещение для шестерни при величинах более 0,4 приводит к значительному нарушению кривизны профиля зуба. При отрицательном смещении зона ДВК (область, где кривизны зубьев шестерни и колеса имеют одинаковый знак) незначительно уменьшается. Однако на профиле*

---

\* Научный руководитель – к.т.н., доц., с.н.с. Устиненко А.В.

зуба шестерни появляется область с резким изменением кривизны, что в будущем приведет к более высокому контактному давлению по сравнению с не модифицированным профилем. Положительное смещение уменьшает величину кривизны зуба, однако заметно увеличивается зона ДВК. В обоих случаях смещение рейки не оказывает значительного влияния на кривизну зуба и на высоту зоны ДВК на контактной части профиля.

*Ключевые слова:* эволютное зацепление, зубчатая передача, зуб, смещение рейки, кривизна профиля, выпукло-вогнутый контакт.

**Постановка проблемы.** Наиболее частыми видами повреждения зубчатых передач является излом зуба, отслаивание и выкрашивание материала на рабочих поверхностях зубьев, абразивный износ и заедание зубьев, возникающее от разрыва масляной пленки [1]. Последние три вида повреждений зависят от контактных давлений между рабочими поверхностями зубьев и скоростями взаимного проскальзывания. Понизить контактные давления можно увеличением приведенного радиуса кривизны  $\rho$  в зацеплении. Геометрически это реализуется использованием зубчатых передач с выпукло-вогнутым контактом между зубьями. Сегодня существует несколько типов передач с таким зацеплением, однако все они имеют определенные ограничения. Разработанные А. И. Павловым эволютные передачи [2] являются перспективными, так как представляют собой семейство зацеплений с широким диапазоном геометрических и качественных показателей. Однако в данных передачах также есть ряд ограничений и, в первую очередь, это зона двояковыпуклого контакта (ДВК) в приполюсной области. Подробный анализ этой зоны показал, что при некоторых начальных параметрах в уравнении синтеза инструментальной рейки наблюдается тенденция к ее уменьшению. Однако основываясь на опыте синтеза эвольвентных передач можно также заметить весомое влияние коэффициента смещения инструментальной рейки на геометрические и качественные показатели передачи. Следовательно, представляет интерес внедрить в исходное уравнение инструментальной рейки эволютной передачи коэффициент смещения с целью определить его влияние на зону двояковыпуклого контакта.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Эволютное зацепление с выпукло-вогнутым контактом основано на построении Бобилье [2]. Математическое решение этого построения выполнено в виде дифференциального уравнения второго порядка. Подставляя начальные параметры уравнения – угол зацепления передачи в полюсе  $\alpha$  и коэффициент разновидности передачи  $k$ , можно получить зубчатые пары с различными геометрическими и качественными показателями.

Описание методики использования и анализ влияния коэффициента смещения описан в работах [1, 4].

**Формулирование целей статьи.** Синтез профилей зубьев эволютной передачи с учетом коэффициента смещения инструментальной

рейки и анализ его влияния на кривизну рабочего профиля зуба и величину зоны двояковыпуклого контакта.

**Основная часть.** На основании построения Бобилье в работе [2] получено дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$y'' = \frac{y'(1 + y'^2)}{-ky' + x}, \quad (1)$$

где  $k$  – коэффициент разновидности,  $k = h \sin \alpha_0$  ( $h$  – расстояние между полюсом зацепления и центром вращения шатуна заменяющего механизма;  $\alpha_0$  – угол зацепления в полюсе).

Решение дифференциального уравнения получено в виде полинома [3]. В свою очередь, подставляя полином в уравнение параметрической кривой, можно получить профиль инструментальной рейки:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 \cdot m; \\ y_1 &= ((C_1 x_0 + C_2 x_0^2 + C_3 x_0^3 + \dots + C_n x_0^n) + \pi/4) \cdot m, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $x_0$  – коэффициент высоты головки и ножки зуба, в данной работе принимает значения от  $-1$  до  $+1$ ,  $m$  – модуль передачи,  $\pi/4$  – смещение профиля рейки относительно оси симметрии зуба рейки.

Для построения профиля зуба шестерни была использована система уравнений перехода от профиля сопряженной рейки [4, 5]:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_1 - a) \cos \phi_2 + (y_1 + r_2) \sin \phi_2; \\ y_2 &= -(x_1 - a) \sin \phi_2 + (y_1 + r_2) \cos \phi_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $r_2$  – радиус делительной окружности шестерни,  $a$  – величина поступательного перемещения инструментальной рейки,  $\phi$  – угол поворота нарезаемой шестерни.

Профиль зуба сопряженного колеса был получен аналогичным способом, но с учетом передаточного отношения, которые выражено в радиусе делительной окружности колеса  $r_3$ :

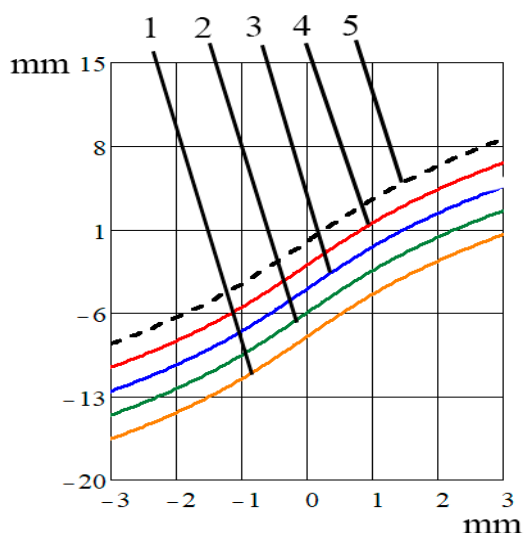
$$\left. \begin{aligned} x_3 &= (x_1 - a) \cos \phi_3 + (y_1 + r_3) \sin \phi_3; \\ y_3 &= -(x_1 - a) \sin \phi_3 + (y_1 + r_3) \cos \phi_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При добавлении коэффициента смещения в уравнение инструментальной рейки необходимо в дальнейшем использовать два отдельных расчета, чтобы получить положительное и отрицательное смещение на зубе шестерни и колеса соответственно.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 \cdot m \pm \chi \cdot m; \\ y_1 &= ((C_1 x_0 + C_2 x_0^2 + C_3 x_0^3 + \dots + C_n x_0^n) + \pi/4) \cdot m. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

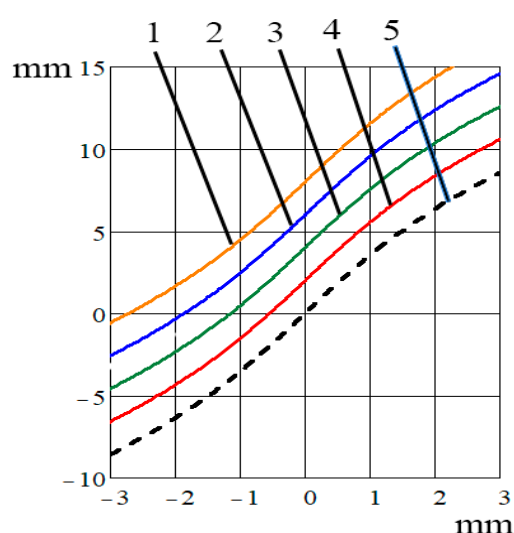
При этом, если для шестерни используется знак «+», то тогда для колеса – «–» и наоборот.

Исследовалась пара зубчатых колес с параметрами  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 80$ ,  $m = 10$ . На рис. 1 показан профиль рейки с положительным смещением, а на рис. 2 с отрицательным.



- 1 – коэффициент смещения  $-0,8$ ;
- 2 – коэффициент смещения  $-0,6$ ;
- 3 – коэффициент смещения  $-0,4$ ;
- 4 – коэффициент смещения  $-0,2$ ;
- 5 – коэффициент смещения  $0$ ;

Рис. 1. Профиль инструментальной рейки при отрицательном смещении



- 1 – коэффициент смещения  $+0,8$ ;
- 2 – коэффициент смещения  $+0,6$ ;
- 3 – коэффициент смещения  $+0,4$ ;
- 4 – коэффициент смещения  $+0,2$ ;
- 5 – коэффициент смещения  $0$ ;

Рис. 2. Профиль инструментальной рейки при положительном смещении

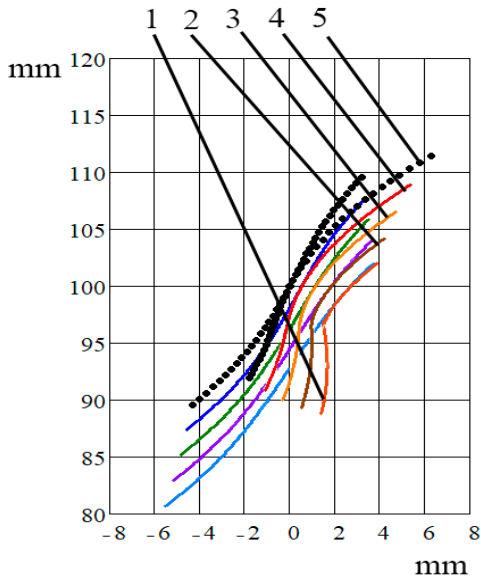
Два сопряженных в полюсе профиля зуба шестерни и колеса с положительным смещением шестерни показано на рис. 3, а с отрицательным на рис. 4. Анализируя рис. 3 можно сделать вывод, что отрицательное смещение для шестерни при величинах более  $0,4$  приводит к значительному нарушению кривизны профиля зуба. Следовательно, в дальнейшем в данной работе будут рассмотрен диапазон величин смещений от  $-0,4$  до  $+0,8$ .

В общем виде уравнение кривизны профиля имеет вид

$$\zeta(x_0) = \frac{y_2''(x_0) \cdot x_2'(x_0) - x_2''(x_0) \cdot y_2'(x_0)}{(x_2'^2(x_0) + y_2'^2(x_0))^{3/2}}. \quad (6)$$

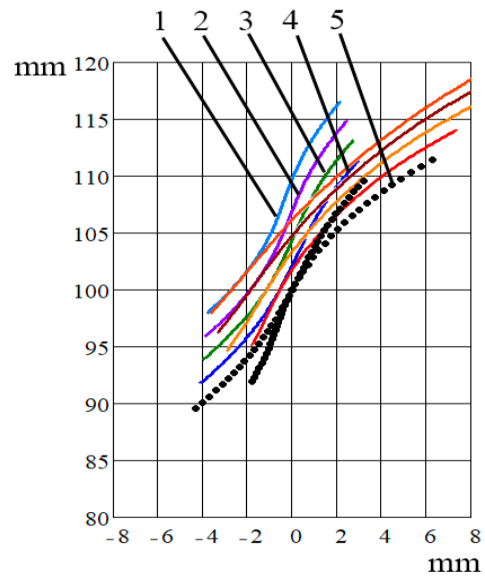
На рис. 5 показаны кривизны профилей зубьев шестерни и колеса в момент их сопряжения в полюсе при отрицательном смещении, а на рис. 6 при положительном смещении.

Анализируя рис. 5 можно сделать вывод о незначительном уменьшении зоны ДВК (область, где кривизны зубьев шестерни и колеса имеют одинаковый знак) при отрицательном смещении, однако на профиле зуба шестерни появляется область с резким изменением кривизны, что в будущем приведет к более высокому контактному давлению по сравнению с не модифицированным профилем.



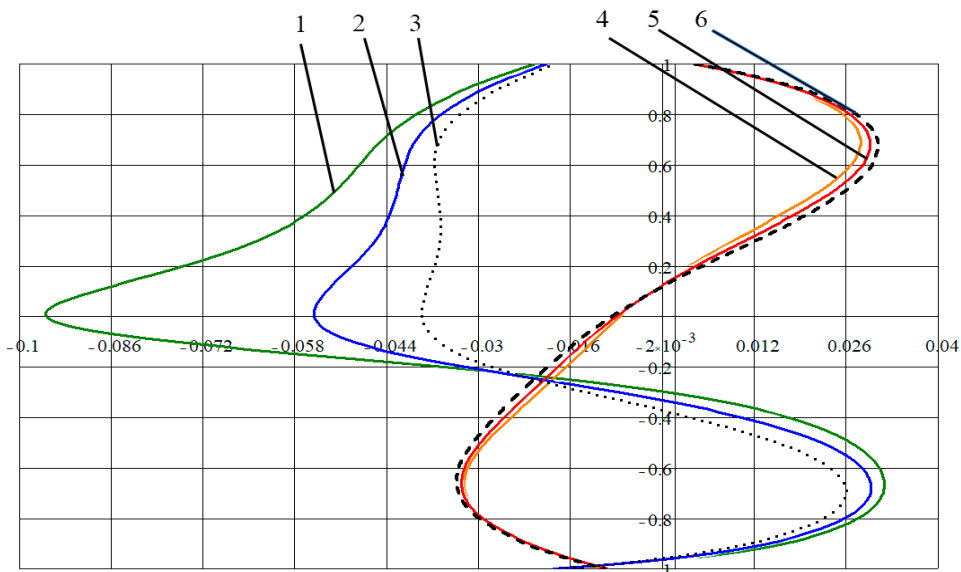
- 1 – коэффициент смещения  $-0,8$ ;
- 2 – коэффициент смещения  $-0,6$ ;
- 3 – коэффициент смещения  $-0,4$ ;
- 4 – коэффициент смещения  $-0,2$ ;
- 5 – коэффициент смещения  $0$

Рис. 3. Сопряженные профили зубьев шестерни и колеса при отрицательном смещении



- 1 – коэффициент смещения  $+0,8$ ;
- 2 – коэффициент смещения  $+0,6$ ;
- 3 – коэффициент смещения  $+0,4$ ;
- 4 – коэффициент смещения  $+0,2$ ;
- 5 – коэффициент смещения  $0$

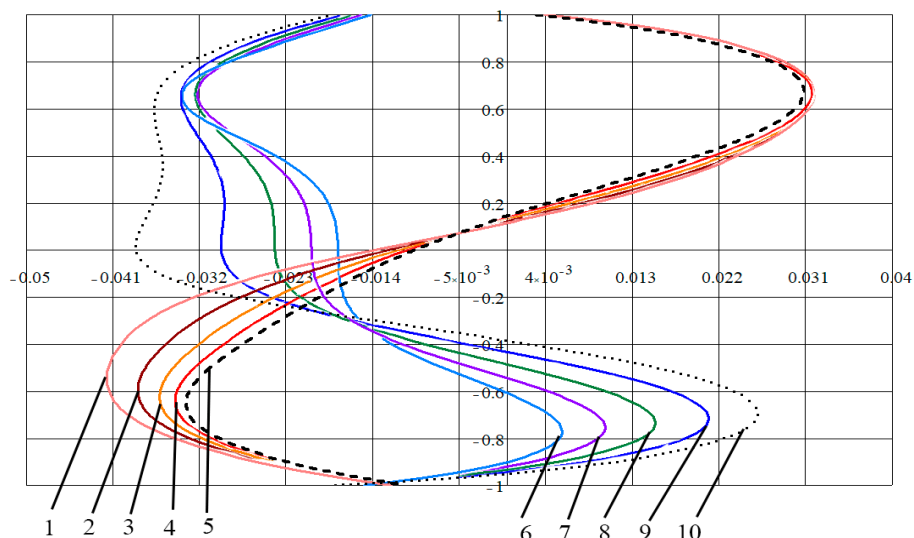
Рис. 4. Сопряженные профили зубьев шестерни и колеса при положительном смещении



- 1 – зуб шестерни при смещении  $-0,4$ ;
- 2 – зуб шестерни при смещении  $-0,2$ ;
- 3 – зуб шестерни без смещения;
- 4 – зуб колеса при смещении  $-0,2$ ;
- 5 – зуб колеса при смещении  $-0,4$ ;
- 6 – зуб колеса без смещения

Рис. 5. Кривизны шестерни и колеса в зависимости от величины отрицательного смещения на шестерне

На рис. 6 хорошо видно, что положительное смещение уменьшает величину кривизны шестерни, однако заметно увеличивается зона ДВК. В обоих случаях смещение рейки не оказывает значительного влияния на кривизну колеса и на высоту зоны ДВК на ее контактной части профиля.



- |                                  |                                    |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1 – зуб колеса при смещении 0,8; | 6 – зуб шестерни при смещении 0,8; |
| 2 – зуб колеса при смещении 0,6; | 7 – зуб шестерни при смещении 0,6; |
| 3 – зуб колеса при смещении 0,4; | 8 – зуб шестерни при смещении 0,4; |
| 4 – зуб колеса при смещении 0,2; | 9 – зуб шестерни при смещении 0,2; |
| 5 – зуб колеса без смещения;     | 10 – зуб шестерни без смещения     |

Рис. 6. Кривизны шестерни и колеса в зависимости от величины положительного смещения на шестерне

**Выводы.** Выполнено построение профилей зубьев шестерни и колеса эволютного зубчатого зацепления с учетом смещения инструментальной рейки. Построены и проанализированы кривизны профилей зубьев шестерни и колеса. Определено, что отрицательное смещение имеет ограничение по величине для применения в шестерне ввиду резкого изменения кривизны профиля в околополюсной зоне. На профиль зуба колеса смещение практически не оказывает влияния.

Высота зоны ДВК при отрицательном смещении незначительно уменьшается, однако при положительном почти линейно возрастает.

### Литература

1. Гавриленко В.А. Зубчатые передачи в машиностроении. М.: Машгиз, 1962. 530 с.
2. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. Х.: ХНАДУ, 2005. 100 с.
3. Павлов А.И. Эволютное зацепление и его характеристики. *Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов.* Харьков, 2003. Вып. 5. С. 103–106.
4. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука. 1968. 584 с.
5. Протасов Р.В., Устиненко А.В. Построение рабочих профилей зубьев эволютных передач. *Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Машиноведение и САПР".* Харьков, 2010. № 19. С. 124–128.
6. Протасов Р.В. Исследование приведенного радиуса кривизны в эволютных передачах. *Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Машиноведение и САПР".* Харьков, 2010. № 1. С. 37–43.

## АНАЛІЗ ВПЛИВУ ЗСУВУ ВИХІДНОГО КОНТУРУ НА КРИВИЗНИ ПРОФІЛІВ ЗУБЦІВ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ З ЕВОЛЮТНИМ ЗАЧЕПЛЕННЯМ

Протасов Р.В., Устиненко О.В., Андрієнко С.В.

*Стаття присвячена модифікації еволютного зачеплення з опукло-увігнутих контактом та оцінці його впливу на кривизну спряжених профілів зубців шестерні і колеса. Це зачеплення є перспективним, тому що являє собою сімейство профілів з широким діапазоном геометричних та якісних показників. На підставі побудови Бобільє отримано диференціальне рівняння 2-го порядку, яке описує еволютне зачеплення. Його рішення отримано у вигляді полінома. Профіль інструментальної рейки можна отримати, підставляючи поліном в рівняння параметричної кривої. Для побудови профілю зубця шестерні була використана система рівнянь переходу від профілю сполученої рейки. До рівняння бічного профілю зубця інструментальної рейки додано коефіцієнт зсуву, який має однакову величину для зубців шестерні та колеса, але протилежний знак. При додаванні коефіцієнта зсуву в рівняння інструментальної рейки виконувалися два окремі розрахунки, щоб отримати позитивне і негативне зміщення на зубці шестерні та колеса. Досліджувалася пара зубчастих коліс з параметрами  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 80$ ,  $m = 10$ . Розглядалось кілька значень коефіцієнта зсуву з додатним та від'ємним знаком для зубців шестерні. Результати досліджень дозволяють оцінити вплив зсуву рейки на кривизни профілів зубців та на висоту зони двоопуклого контакту в навколополюсній зоні. Показано, що негативний зсув для шестерні при величинах більше 0,4 призводить до значного порушення кривизни профілю зубця. При негативному зміщенні зона ДВК (область, де кривизни зубців шестерні та колеса мають однаковий знак) незначно зменшується. Але на профілі зубця шестерні з'являється область з різкою зміною кривизни, що в майбутньому призведе до більш високого контактного тиску в порівнянні з не модифікованим профілем. Позитивне зміщення зменшує величину кривизни зубця, однак помітно збільшується зона ДВК. В обох випадках зміщення рейки не робить значного впливу на кривизну зубця та на висоту зони ДВК на контактній частині профілю.*

*Ключові слова: еволютне зачеплення, зубчаста передача, зубець, зсув рейки, кривизна профілю, опукло-увігнутий контакт.*

## ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF THE DISPLACEMENT OF THE INITIAL RACK ON THE TEETH PROFILES CURVATURES OF GEARS WITH EVOLUTE MESH

Roman Protasov, Aleksandr Ustinenko, Serhii Andrienko

*The article is devoted to the modification of the evolute gearing with a convex-concave contact and the assessment of its influence on the curvature of the conjugate profiles of the gear and wheel teeth. This mesh is promising, as it*

*is a family of profiles with a wide range of geometric and quality indicators. Based on the Bobilier construction, a second-order differential equation is obtained, which describes an evolute mesh. The solution to the differential equation is obtained in the form of a polynomial. The instrument rack profile can be obtained by substituting the polynomial in the parametric curve equation. To construct the profile of the gear tooth, a system of equations for the transition from the profile of the tool rack was used. A displacement coefficient has been added to the equation of the side profile of the tool rack tooth, which has the same value for the gear and wheel teeth, but the opposite sign. When adding the displacement coefficient to the tool rack equation, two separate calculations were performed to obtain positive and negative offset on the gear and wheel teeth, respectively. A pair of gears with parameters  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 80$ ,  $m = 10$  was investigated. Several values of the displacement coefficient with a positive and negative sign for the gear teeth are considered. The research results make it possible to assess the influence of the rack displacement on the curvature of the tooth profiles and on the height of the biconvex contact zone in the near-pole zones. It is shown that a negative displacement for a gear at values of more than 0.4 leads to a significant violation of the curvature of the tooth profile. With a negative displacement, the DCC zone (the area where the curvatures of the gear and wheel teeth have the same sign) slightly decreases. However, an area with a sharp change in curvature appears on the profile of the gear tooth, which in the future will lead to a higher contact pressure compared to the unmodified profile. Positive displacement reduces the tooth curvature, but the area of the DCC is noticeably increased. In both cases, the rack displacement does not have a significant effect on the curvature of the tooth and on the height of the DCC zone on the contact part of the profile.*

*Keywords: evolute gearing, gearing, tooth, rack displacement, profile curvature, convex-concave contact*

### **References**

1. Gavrilenko V.A. (1962) Gear transfers in mechanical engineering. Moscow: Mashgiz, 530 [in Russian]
2. Pavlov A.I. (2005) Modern theory of jagged hooks. Kharkiv: KhNADU, 100 [in Russian]
3. Pavlov A.I. (2003) Evolution and its characteristics. Vestnik NTU "KhPI": Sb. nauch. trudov. Kharkov, 5, 103–106. [in Russian]
4. Litvin F.L. (1968) The theory of jagged hooks. Moscow: Nauka, 584 [in Russian]
5. Protasov R.V., Ustinenko A.V. (2010) Building work profiles of the teeth of the evolutive gear. Vestnik NTU "KhPI": Sb. nauch. trudov "Mashinovedenie i SAPR". Kharkov, 19, 124–128. [in Russian]
6. Protasov R.V. (2010) Study of the present curvature radius in the evolution transmissions. Vestnik NTU "KhPI": Sb. nauch. trudov "Mashinovedenie i SAPR". Kharkov, 1, 37–43. [in Russian]