УДК 517.518:004.92(075.8)

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НЕПРЕРЫВНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Еремеев В. С., д.т.н.,
evs1038@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0131-0049
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого (Украина)

Разработана методика определения погрешности $s_k^{(d)}$ интерполирования функции кубическим сплайном в случае неизвестной четвёртой производной. Показано, что значение $s_k^{(d)}$ на k-м интервале равно $h|d_k|/6$, где h – величина интервала, d_k – коэффициенты многочленов сплайна при переменной в третьей степени. Алгоритм вычисления коэффициентов сплайна предполагает выполнение следующих условий: восстанавливаемая функция является непрерывной и обладает непрерывными первой и второй производными; на границах восстанавливаемой функции заданы первые производные; вторая производная на правой границе равна нулю. В случае неизвестных первых производных на границах предусмотрена возможность их расчёта с использованием значений функции в узловых точках. Тестирование предлагаемого метода проводилось на монотонных функциях sin(πx/2), (1-exp(-x))/(1-exp(-1)), log(1+x)/log(2)log(1+x)/log(2), $(2x+x^2+x^3+x^4)/5$, не имеющих перегибов и экстремальных точек на отрезке [0,1]. Среднеквадратическое отклонение значений восстановленной функции sin(πx/2) от значений сплайна из трёх многочленов, равное $s=0.92\cdot10^{-2}$, хорошо согласуется с погрешностью, рассчитанной с предлагаемым методом и равной $s_k^{(d)}=1.3\cdot10^{-2}$. Повышение количества узлов до 10^3 и более обеспечивает точность интерполяции до 10^{-7} и выше. Во всех случаях величина $s_k^{(d)}$ хорошо согласуется с точным значением s. Аналогичная ситуация наблюдается для многих монотонно убывающих или возрастающих функций, не имеющих перегибов и экстремальных точек. При восстановлении любых функциональных зависимостей рекомендуется разбивать исследуемый отрезок на такие интервалы, где функции не имеют перегибов и экстремальных точек.

Ключевые слова: восстановление функции, интерполяционный полином, интерполяция, кубический сплайн, погрешность интерполирования, функция.

Постановка проблемы. Методы интерполяции являются мощным инструментом при решении большого числа задач в прикладной математике. Пусть непрерывная функция $F(x)$, имеющая непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, задана своими значениями $F(x_k)$ в узловых точках $x_0=a$, x_1, $x_2,...,x_n=b$. Требуется построить сплайн $S(x)$, который совпадает с функцией $F(x)$ в узлах сетки:

$$S(x_k)=F(x_k),\ k=0,\ 1,...,n. \qquad (1)$$

Решение поставленной задачи с использованием кубических сплайнов в виде:

$$f_k(x)=a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3,\ k=1,\ 2...,n,\ x_{k-1}<=x<=x_k \qquad (2)$$

нашло широкое распространение в различных областях науки и техники [1]-[4].

Методы расчёта коэффициентов сплайна и его погрешности изложены во многих публикациях [2], [3]. Общим для этих работ является предположение о возможности определения четвёртой производной функции $F(x)$. На практике встречается ситуация, когда получение информации о точных значениях производных не представляется возможным. Настоящая работа посвящена анализу погрешности интерполирования функциональной зависимости в этом случае.

Анализ последних достижений и публикаций. При построении кубического сплайна обычно не требуются дополнительные условия к первым производным на границах отрезка $[a,b]$, а значение второй производной в точке $x=b$ принимается равной нулю [2]. Такой сплайн называют “естественным”. Ошибка интерполирования с помощью “естественного” сплайна для равномерной сетки с шагом $h=(b-a)/n$ оценивается величиной

$$s_0=\frac{5}{384}h^4\,|\,F^{(1V)}(x)\,|, \qquad (3)$$

где $F^{1V}(x)$ – максимальное значение четвёртой производной восстанавливаемой функции.

Если значение $F(x)$ не известно или встречается с большими трудностями, использование формулы (3) не представляется возможным, поэтому определение погрешности в этом случае имеет практический интерес.

Формулировка целей статьи. Цель работы состоит в разработке метода оценивания ошибки восстанавливаемой функции $F(x)$ кубическим сплайном при неизвестной четвёртой производной.

Основная часть. Согласно условию (1) коэффициенты a_k кубического сплайна (2) равны

$$a_k=F(x_k),\ k=0,\ 1,...,n. \qquad (4)$$

Непрерывность сплайна и его производных обеспечивается выполнением следующих условий на границах соседних многочленов:

$$f_k(x_k)=f_{k+1}(x_k),\ k=[1,...,n\text{-}1], \quad (5)$$

$$f'_k(x_k)=f'_{k+1}(x_k),\ f''_k(x_k)=f''_{k+1}(x_k),\ [1,...,n\text{-}1]. \quad (6)$$

Пусть величина второй производной восстанавливаемой функции при $x=b$ равна нулю (в этом случае коэффициенты сплайна $c_n=0$), а значения первой производной на границах отрезка $[a,b]$ равны:

$$f'_1(x_0)=F'(x_0)=s_1,\ f'_n(x_n)=F'(x_n)=s_2. \quad (7)$$

Алгоритм вычисления коэффициентов сплайна выглядит следующим образом [5]. Сначала, полагая значение c_n равным нулю, методом прогонки вычисляются коэффициенты c_k:

$$c_k=\alpha_k c_{k+1}+\beta_k,\ \ k=[0,...,n\text{-}1], \quad (8)$$

где

$$\alpha_k=-3\delta x_{k+1}/(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k+2\delta x_k\alpha_{k-1})\ k=[1,..n\text{-}1], \quad (9)$$

$$\beta_k=(-2\delta x_k\beta_{k-1}+6h_{k+1})/(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k+\alpha_{k-1}2\delta x_k),\ k=[2,..n\text{-}1]. \quad (10)$$

Далее по формулам:

$$b_1=(-s_1+3g_1+c_1\delta x_1)/2,\ d_1=(s_1\text{-}g_1+c_1\delta x_1)/2\delta x_1^{\ 2} \quad (11)$$

находятся коэффициенты b_1 и d_1. Коэффициенты b_k и d_k вычисляются по формулам

$$b_k=g_k+c_k\delta x_k/2+c_{k-1}\delta x_k/3,\ k=[2,\ 3,...,n], \quad (12)$$

$$d_k=(c_k\text{-}c_{k-1},)/(3\delta x_k),\ k=[2,\ 3,...,n]\ . \quad (13)$$

Величина погрешности восстановленной функции в точке $x=x_i$ равна $|F(x_i)\text{-}S(x_i)|$. Пусть каждый k–й интервал сплайна (1) содержит n точек, где определяется соответствующая погрешность. Среднеквадратическое её значение s для nk точек равно:

$$s=\sqrt{\sum_{i=0}^{i=nk}(S(x_i)-F(x_i))^2\ /nk}. \quad (14)$$

Погрешность интерполирования «гармоническим сплайном» определяют с помощью формулы (3). В нашем случае информация о значениях функции $F(x)$ во всех точках с координатами $x=x_i$ и величине её четвёртой производной при $x=x_i$ не позволяет применять формулы (3), (14). Поэтому рассмотрим возможность оценки погрешности с использованием остаточного члена ряда Тейлора через третью производную

$$s_k=\frac{1}{6}\delta x_k^3\ |\ f_k^{(III)}(x)\ |, x\subseteq[x_{k-1},x_k]. \quad (15)$$

где $y^{(III)}(x)$ – третья производная восстанавливаемой функции в k-м интервале.

Согласно формуле (2) третья производная в k-м интервале равна d_k, поэтому погрешность, определяемая выражением (15), равна

$$s_k^{(d)}=\frac{1}{6}\delta x_k^3\ |\ d_k\ |\ . \quad (16)$$

Проведём анализ погрешности интерполирования с использованием формул (14) и (16) на примере обработки тестовых экспериментов. На первом этапе рассмотрим монотонные зависимости типа синусоидальной, экспоненциальной, степенной, логарифмической функции или алгебраического полинома и других функций, не имеющих перегибов и экстремальных точек. С целью сравнения погрешностей для различных функциональных зависимостей функции выбирались таким образом, чтобы они монотонно изменялись на отрезке [0,1] от 0 до 1 или от 1 до 0. Для обеспечения этого требования достаточно преобразовать исходные координаты по формулам:

$$u=(x-a)/(b-a),\ v=(F(x)-F_{min})/(F_{max}-F_{min}).$$

Пример. Пусть требуется восстановить функцию $F(x)=sin(\pi x/2)$ на отрезке [0,1], для которой известна следующие данные по четырём узловым точкам $x_0=0$, $x_1=1/3$, $x_2=2/3$, $x_3=1$:

- значения функции в узловых точках равны, соответственно, 0, 0.500, 0.86602540, 1.000, что отражает точные значения $sin(\pi x/2)$ в рассматриваемых узлах,

- первые производные s_1 и s_2 на концах исследуемого отрезка равны $s_1=F'(0)=\pi/2$, $s_2=F'(1)=0$.

Вычисленные коэффициенты сплайна представлены в табл. 1.

Таблица 1.

Коэффициенты многочленов сплайна для функции $F(x)=sin(\pi x/2)$ при $s_1=\pi/2$, $s_2=0$, i-номер интервала

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0.5000	1.4441	-0.1231	0.1339
2	0.8660	0.7919	-1.7549	-2.5093
3	1.0000	0.0000	0.0000	3.6173

Данные табл. 1 позволили найти погрешности интерполирования по различным формулам (14) и (16). Среднеквадратическое отклонение сплайна $S(x)$ от значений функции $sin(\pi x/2)$, вычисленное по формуле (14) для $m=10^4$, равно $s=9.2\cdot10^{-3}$. Максимальная погрешность, рассчитанная по формуле (16), равна $s_k^{(d)}=13\cdot10^{-3}$.

Повышение количества узлов до 10^3 и более обеспечивает точность интерполяции до 10^{-7} и выше. Во всех случаях величина $s_k^{(d)}$, рассчитанная по предлагаемой формуле (16), хорошо согласуется с точным значением s.

Аналогичная ситуация наблюдается для многих монотонно убывающих или возрастающих функций. В качестве примера в табл. 2 представлены зависимости погрешностей $s_k^{(d)}$ и точного среднеквадратического отклонения s от количества узловых точек для нескольких элементарных функций: $(2x+x^2+x^3+x^4)/5$, $sin(\pi x/2)$, $(1-exp(-x))/(1-exp(-1))$, $log(1+x)/log(2)$. Расчёты проводились при $m=10^4$.

Таблица 2.

Зависимость погрешностей s и $s_k^{(d)}$ от количества узловых точек для различных функций.

$F(x)$	s_1, s_2	s, $s_k^{(d)}$	$n=4$	$n=30$	$n=300$	$n=3000$
$(2x+x^2+$ $+x^3+x^4)/5$	$s_1=0.400$, $s_2=2.200$	s	$1.3\cdot10^{-2}$	$6.6\cdot10^{-5}$	$5.5\cdot10^{-7}$	$5.3\cdot10^{-9}$
		$s_k^{(d)}$	$1.7\cdot10^{-2}$	$4.5\cdot10^{-5}$	$3.0\cdot10^{-7}$	$2.8\cdot10^{-9}$
$sin(\pi x/2)$	$s_1= 1.571$, $s_2=0.000$	s	$0.92\cdot10^{-2}$	$5.1\cdot10^{-5}$	$4.5\cdot10^{-7}$	$4.5\cdot10^{-9}$
		$s_k^{(d)}$	$1.3\cdot10^{-2}$	$3.5\cdot10^{-5}$	$2.5\cdot10^{-7}$	$2.4\cdot10^{-9}$
$(1-exp(-x))/$ $(1-exp(-1))$	$s_1=1.582$, $s_2=0.582$	s	$2.9\cdot10^{-3}$	$2.7\cdot10^{-5}$	$2.7\cdot10^{-7}$	$0.27\cdot10^{-9}$
		$s_k^{(d)}$	$4.5\cdot10^{-3}$	$1.7\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-7}$	$1.5\cdot10^{-9}$
$log(1+x)$ $/log(2)$	$s_1=1.443$, $s_2=0.721$	s	$1.7\cdot10^{-3}$	$2.0\cdot10^{-5}$	$2.0\cdot10^{-7}$	$2.0\cdot10^{-9}$
		$s_k^{(d)}$	$3.0\cdot10^{-3}$	$1.2\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-9}$

Согласно данным табл. 2 погрешности s, $s_k^{(d)}$ в случае монотонных функций при количестве измерений $n=4$ составляет около $10^{-3}\div10^{-2}$. Увеличение количества узлов до 30, 300 и 3000 сопровождается снижением ошибки примерно до 10^{-5}, 10^{-7} и 10^{-9}. Максимальное отличие значения $s_k^{(d)}$ восстанавливаемой функции от погрешности s примерно в $2\div3$ раза меньше, что свидетельствует о достаточно высокой оценке сплайн-функции с использованием формулы (16).

Наличие экстремальных точек и перегибов в существенной степени снижает точность интерполяции, поэтому с целью повышения точности рекоме ндуется разбивать исследуемый отрезок на несколько интервалов, где восстанавливаемая функция не содержит экстремальных точек и перегибов. Тем не менее, точность интерполирования остаётся

В качестве примера на рис. 1 представлен соответствующий график сплайна, который восстанавливает функцию $sin(\pi x/2)$ с одной экстремальной точкой на отрезке $[0, \pi]$. В расчётах количество узловых точек принималось равным $n=11$, число промежуточных точек в каждом интервале $m=10^4$. Среднеквадратическая погрешность в этом случае составляла около 10^{-3}.

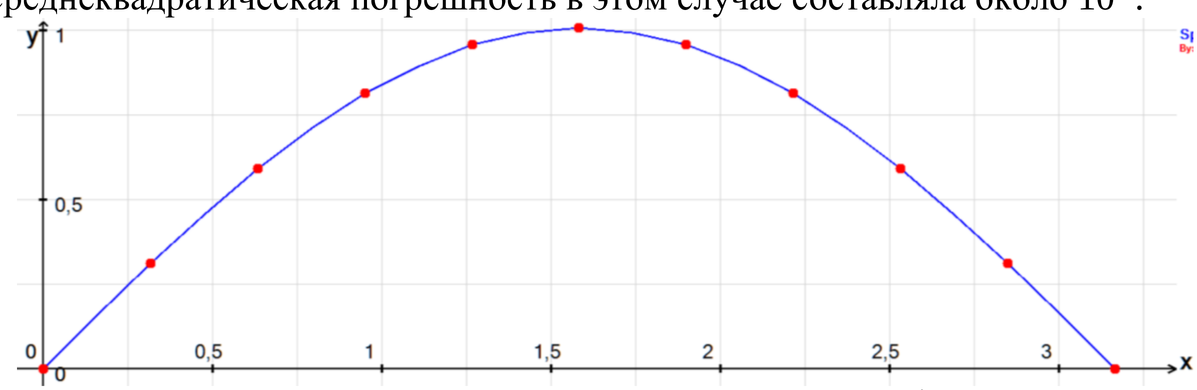

Рис. 1. Сплайн графика для 11 узловых точек при $m=10^4$. Узловые точки обозначены кружочками

Если значения производных на концах отрезка [a,b] не заданы, их величина может быть найдена с использованием первых и последних узловых точек. Для этого достаточно найти уравнения парабол $y(x)=u_i+v_ix+w_ix_i^2$, проходящих через левые три крайние и правые три крайние узловые точки. Значения производных на концах отрезка, очевидно, равны: $s_1=v_1+2w_1x_0$, $s_2=v_2+2w_2x_n$.

Выводы. Разработана методика определения погрешности $s_k^{(d)}$ интерполирования функции кубическим сплайном в случае неизвестной четвёртой производной. Показано, что значение $s_k^{(d)}$ на k-м интервале равно $h|d_k|/6$, где h – величина интервала, d_k – коэффициенты многочленов сплайна при переменной в третьей степени. Тестовые расчёты показали, что величина $s_k^{(d)}$ достаточно хорошо согласуется с точным значением погрешности для монотонно возрастающих и убывающих функций, не имеющих перегибов и экстремальных точек.

Литература

1. Аушева Н.М. Ізотропні фундаментальні сплайни. *Сучасні проблеми моделювання*. *Технічні науки*. Мелітополь, 2016. Вип. 6. С. 3-7.
2. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
3. Шевалдин В.Т. Алгоритмы построения локальных экспоненциальных сплайнов третьего порядка с равноотстоящими узлами. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3, с. 279-287.
4. Haibing Hu. Xipeng Zheng, Jiajie Yin and Yueyan Wang. Research on O-ring Dimension Measurement Algorithm Based on Cubic Spline Interpolation. Appl. Sci. 2021, 11, 3716
5. Еремеев В.С. Построение кубического сплайна для восстановления функциональной зависимости в случае граничных условий для первой производной. *X Международная научно-практическая конференция «THE WORLD OF SCIENCE AND INNOVATION»* 5-7 мая 2021 г. Лондон, Великобритания. С. 450-456. URL: https://sci-conf.com. ua/wp-content/uploads/ 2021/05/ THE-WORLD-OF-SCIENCE-AND-INNOVATION-5-7.05.2021.pdf

АНАЛІЗ ПОГРІШНОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ БЕЗПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЙ З НЕВІДОМИМИ БЕЗПЕРЕРВНИМИ ПОХІДНИМИ ЗА ДОПОМОГОЮ КУБІЧНИХ СПЛАЙНІВ

Єремєєв В. С.

Розроблена методика визначення погрішності $s_k^{(d)}$ інтерполяції функції кубічним сплайном у разі невідомої четвертої похідної. Показано, що значення $s_k^{(d)}$ на k- м інтервалі рівне $h|d_k|/6$, де h - величина інтервалу, d_k -

коефіцієнти многочленів сплайна при змінній в третьому ступені. Алгоритм обчислення коефіцієнтів сплайна припускає виконання наступних умов: відновлювана функція є безперервною і має безперервні першою і другою похідними, на межах відновлюваної функції задані перші похідні, друга похідна на правій межі дорівнює нулю. У разі невідомих перших похідних на межах передбачена можливість їх обчислення з використанням значень функції у вузлових точках. Тестування пропонованого методу проводилося на монотонних функціях sin(πx/2), (1-exp(-x))/(1-exp(-1)), log(1+x)/log(2)log(1+x)/log(2), $(2x+x^2+x^3+x^4)/5$, що не мають перегинів і екстремальних точок на відрізку [0,1]. Середнє квадратичне відхилення значень відновленої функції sin(πx/2) від сплайна з трьох многочленів, рівне $s=0.92\cdot 10^{-2}$, добре узгоджується з погрішністю, розрахованою з пропонованим методом і рівною $s_k^{(d)}=1.3\cdot 10^{-2}$. Підвищення кількості вузлів до 10^3 і більше забезпечує точність інтерполяції до 10^{-7} і вище. У усіх випадках величина $s_k^{(d)}$ добре узгоджується з точним значенням s. Аналогічна ситуація спостерігається для багатьох монотонно убуваючих або зростаючих функцій, що не мають перегинів і екстремальних точок. При відновленні будь-яких функціональних залежностей рекомендується розбивати досліджуваний відрізок на такі інтервали, де функції не мають перегинів і екстремальних точок.

Ключові слова: відновлення функції, інтерполяційний поліном, інтерполяція, кубічний сплайн, погрішність інтерполяції, функція.

ANALYSIS OF ERROR IN INTERPOLATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS WITH UNKNOWN CONTINUOUS DERIVATIVES USING CUBIC SPLINES

Vladimir Eremeev

Methodology of determination of error of $s_k^{(d)}$ interpolation of function is worked out by a cube spline in case of unknown fourth derivative. It is shown that value of $s_k^{(d)}$ on an interval under a number k equal $h|d_k|/6$, where h is a size of interval, d_k are coefficients of polynomials of spline at a variable in the third degree. The algorithm of calculation of coefficients of spline supposes implementation of next terms: a function is continuous and possesses continuous the first and second derivatives, on the borders of function the first derivatives are set, second derivative on a right border is equal to the zero. In case of the unknown first derivatives on borders possibility of their calculation is envisaged with the use of values of function in key points. The proposed method was tested on monotone functions sin(πx/2), (1-exp(-x))/(1-exp(-1)), log(1+x)/log(2), (2x+x2+x3+x4)/5, which do not have inflections and extreme points on the segment [0,1]. The *standard deviation of the values of the reconstructed function sin(πx/2) from the values of a spline of three polynomials, equal to* $s=0.92\cdot10^{-2}$*, is in good agreement with the error calculated with the proposed method and equal to* $s_k^{(d)}=1.3\cdot10^{-2}$*. Increase of amount of knots to* 10^3 *and more provides exactness of interpolation to* 10^{-7} *and higher. In all cases the size of* $s_k^{(d)}$ *well comports with the exact meaning of s. An analogical situation is observed for many droningly decreasing or increasing functions, not having bends and extreme points. At renewal of any functional dependences it is recommended to break up the investigated segment on such intervals, wherever functions have bends and extreme points.*

Keywords: renewal of function, interpolation polynomial, interpolation, cube spline, error of interpolation, function.

Referenses

1. Ausheva, N.M. (2016) Isotropic fundamental splines. Modern problems of modeling. Collection of Scientific Papers. Melitopol, 6 3-7. [in Ukrainian]
2. Zavjalov, Ju. (1980) Methods of spline-functions. M.: Science, 352 [in Russian]
3. Shevaldin, V. (2019) Algorithms of construction of local exponential splines of the third order with equidistant knots. Publications of Institute of mathematics and mechanics of Ural Russian Academy of Sciences, 25, 3, 279-287. [in Russian]
4. Haibing, Hu., Xipeng, Zheng, Jiajie, Yin and Yueyan, Wang. (2021) Research on O-ring Dimension Measurement Algorithm Based on Cubic Spline Interpolation. Appl. Sci., 11, 3716.
5. Yeremieiev, V. (2021) Construction of cube spline for renewal of functional dependence in case of border terms for the first derivative. Publications of tenth international research and practice conference of "THE WORLD OF SCIENCE AND INNOVATION" of May, 5-7 2021 London, Great Britain, 450-456. Retrieved from https://sci-conf.com. ua/wp-content/uploads/ 2021/05/ THE-WORLD-OF-SCIENCE-AND-INNOVATION-5-7.05.2021.pdf.