

УДК 621.833+519.863

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ З ОПУКЛО-УВІГНУТИМ КОНТАКТОМ

Левін Н.О.,*

nlevin97@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4155-6553

Протасов Р.В.,*

protasov@tmm-sapr.org, ORCID: 0000-0003-1611-0610

Андрієнко С.В.,*

andrisergejjsv@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4310-3128

Устиненко О.В., к.т.н.

ustin1964@tmm-sapr.org, ORCID: 0000-0002-6714-6122

Бондаренко О.В., к.т.н.

avbondko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2693-5301

Словацкий технический университет (Братислава, Словакия)

Стаття присвячена оптимальному проектуванню зубчастих передач з опукло-увігнутих контактом зубців. Побудовано математичну модель оптимізації за критеріями мінімальних контактних напружень або відносних швидкостей ковзання. У якості об'єкта досліджень обрані С-С зачеплення, що запропоновані словацькими вченими М. Бошанські та М. Верешем. Для них розроблено достатню кількість варіантів вихідних контурів, виконано великий обсяг теоретичних і натурних експериментальних досліджень контактної міцності та зносостійкості. Побудовано цільові функції: для випадку мінімізації контактних напружень $F_{\sigma} = \sigma_H \rightarrow \min$; для випадку мінімізації відносних швидкостей ковзання $F_{\lambda} = \lambda \rightarrow \min$. У якості змінних проектування для обох цільових функцій обрано: кут зачеплення в полюсі α_C ; радіус кривизни верхньої частини лінії зачеплення r_{kh} ; радіус кривизни нижньої частини лінії зачеплення r_{kd} . Можливо додати ще дві змінні проектування у випадку мінімізації відносних швидкостей ковзання: коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^ та h_f^* . Сформовано систему обмежень на змінні проектування: на кут зачеплення в полюсі α_C ; на радіуси кривизни лінії зачеплення r_{kh} та r_{kd} ; на коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^* та h_f^* ; умови відсутності підрізання ніжки та загострення вершини зубця; умова відсутності інтерференції у зачепленні; мінімально допустимі значення коефіцієнту торцевого перекриття ε_a та коефіцієнту радіального зазору c^* . У якості методу розв'язання задачі обрано зондування простору параметрів за допомогою ЛПт-последовності. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів – до 51, забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-*

* Науковий керівник – к.т.н., доц., с.н.с. Устиненко О.В.

розподілених пробних точок – до 2^{20} . У подальших дослідженнях планується розробити алгоритми розв'язання задачі, провести тестові та перевіірочні розрахунки з метою оцінки отриманих теоретичних результатів, запропонувати варіанти С-С зачеплень із підвищеною навантажувальною здатністю.

Ключові слова: зубчаста передача, опукло-увігнутий контакт, оптимізація, цільова функція, змінні проектування.

Постановка проблеми. У машинобудуванні широко застосовують силові зубчасті передачі, тому підвищення їхньої навантажувальної здатності з одночасним поліпшенням масогабаритних характеристик є актуальною науково-практичною проблемою.

Традиційні евольвентні передачі, незважаючи на відносну простоту геометрії та виготовлення, мають суттєві недоліки, основним з яких є двоопуклий контакт в зачепленні та, як наслідок, обмежена контактна міцність зубців. Тому одним із шляхів вирішення цієї проблеми – застосування зачеплення з опукло-увігнутим контактом (ОУК) зубців.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В різні часи ряд авторів запропонував такі зачеплення, серед яких слід відзначити англійських інженерів Ф. Бостона, С. Брамлі-Мура (1921), американського інженера Е. Вільдгабера (1923), італійця А. Роано (1947), радянського дослідника М. Л. Новікова (1958) [1], українських вчених І. Є. Грицяя, О. С. Вітренка, П. Л. Носка, В. П. Шишова та А. І. Павлова, а також словацьких вчених М. Бошанські та М. Вереша (2000-2020) [2].

Виконані на наш час теоретичні та експериментальні дослідження зачеплень з ОУК продемонстрували їхню вагому перевагу перед традиційним евольвентним. Але вони так і не набули широкого впровадження у світовій промисловості. Одна із причин полягає в тому, що досить не існує чіткої системи призначення параметрів зачеплень з ОУК, при яких забезпечується суттєве підвищення їхньої міцності та витривалості у порівнянні з евольвентними. До останнього часу не проведено детального аналізу впливу якісних показників різних типів зачеплень з ОУК на навантажувальну здатність приводів.

Одним з перспективних напрямів на шляху вирішення цього питання є визначення основних параметрів зачеплення методами математичної оптимізації. Варіюючи цими параметрами з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень, можливо отримати передачу з мінімальними контактними напруженнями, або з мінімальними значеннями відносних швидкостей ковзання. Тому метою дослідження є розробка методів оптимального проектування зубчастих передач з ОУК за критерієм мінімальних контактних напружень або мінімальних відносних швидкостей ковзання.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є побудова математичної моделі оптимізації геометрії зубчастих передач з опукло-

увігнутих контактом за критеріями мінімальних контактних напружень або відносних швидкостей ковзання, а саме, побудова цільових функцій; визначення змінних проектування; формування системи обмежень; обрання методу розв'язання оптимізаційної задачі.

Основна частина. З усього різноманіття існуючих передач з ОУК нами для подальших досліджень обрані С-С зачеплення, що запропоновані М. Бошанські та М. Верешем [2]. Це пов'язано з тим, що для них розроблено достатню кількість варіантів вихідних контурів, а також виконано великий обсяг як теоретичних, так і натурних експериментальних досліджень контактної міцності та зносостійкості. Опукло-увігнутий профіль зубця у цих передачах створюється по попередньо заданій лінії зачеплення (рис. 1). При цьому вона складається або з двох симетричних відносно полюса зачеплення дуг (дуги рівного радіусу) або з несиметричних дуг (дуги, які не дорівнюють радіусу). У разі симетричної лінії зачеплення має місце увігнуто-опуклий контакт, а в разі несиметричної – опукло-увігнутий.

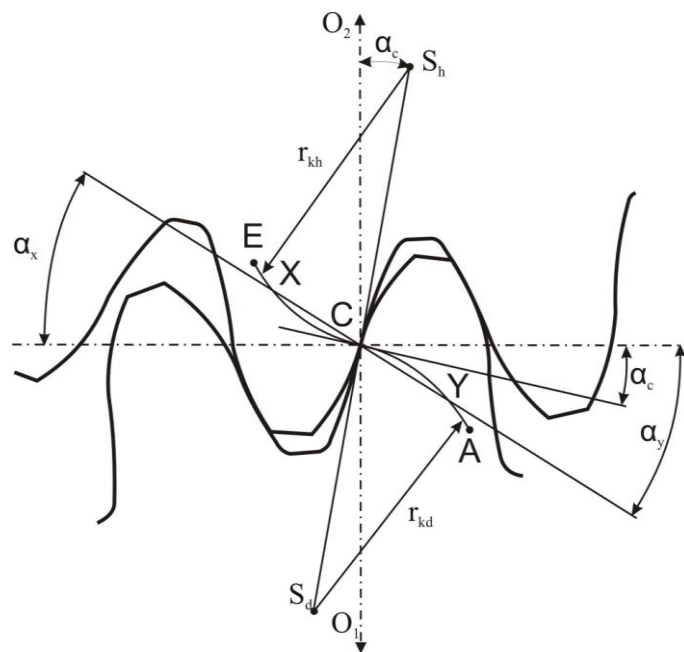


Рис. 1. Схема С-С зачеплення

Цільова функція у випадку мінімізації контактних напружень. Запишемо цільову функцію у наступному вигляді:

$$F_{\sigma} = \sigma_H \rightarrow \min. \quad (1)$$

Контактні напруження σ_H , МПа, для випадку початкового дотику пружних тіл по лінії,

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{(F_n E_H) / (b_w \rho_H)}, \quad (2)$$

де $\rho_H = (\rho_1 \cdot \rho_2) / (\rho_2 \pm \rho_1)$ – приведений радіус кривизни в контакті двох поверхонь, основний геометричний фактор, який впливає на величину

контактних напружень; E_H – приведений модуль пружності матеріалу; b_w – робоча ширина зубця; F_n – нормальне зусилля у зачепленні.

Радіуси кривизни будемо визначати за допомогою відомої формули з диференціальної геометрії (параметричне завдання кривої),

$$1/\rho_{1,2} = (y''_{1,2}(\alpha) \cdot x'_{1,2}(\alpha) - x''_{1,2}(\alpha) \cdot y'_{1,2}(\alpha)) / ((x'_{1,2}(\alpha)^2 + y'_{1,2}(\alpha)^2)^{3/2}). \quad (3)$$

У якості параметра виступає поточний кут профіля зубця α , $\alpha_p \leq \alpha_C \leq \alpha_a$, де α_C – кут зачеплення в полюсі; α_a та α_p – кути профілю на вершині зубця у та нижній точці активного профіля.

Параметричні рівняння, за якими визначаються координати точок профілів зубців шестерні 1 та колеса 2, мають вигляд [2]:

$$\begin{aligned} x_{1,2;h,d} &= \mp 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \cos(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_{1,2} \sin \varphi_r(\alpha); \\ y_{1,2;h,d} &= \pm 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \sin(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_{1,2} \cos \varphi_r(\alpha); \\ \varphi_r &= \pm (2r_{kh,d}/r_{1,2}) ((\alpha - \alpha_C) \cos \alpha_C + \sin \alpha_C \lg(\cos \alpha_C / \cos \alpha)), \end{aligned} \quad (4)$$

де r_{kh} та r_{kd} – радіуси кривизни відповідно верхньої та нижньої частин лінії зачеплення; $r_{1,2} = 0,5m \cdot z_{1,2}$ – ділительні радіуси шестерні та колеса.

Отже, рівняння (1)...(4) є математичною моделлю оптимізації С-С зачеплення за критерієм мінімальних контактних напружень.

Цільова функція у випадку мінімізації відносних швидкостей ковзання. Запишемо цільову функцію у наступному вигляді:

$$F_\lambda = \lambda \rightarrow \min. \quad (5)$$

Максимальне значення відносної швидкості ковзання λ ,

$$\lambda = \max \{V_{ya}/V_{Fy1a}, V_{yp}/V_{Fy1p}, V_{ya}/(V_{Fy1a} \cdot u), V_{yp}/(V_{Fy1p} \cdot u)\}, \quad (6)$$

У залежності (6):

V_{ya} та V_{yp} – абсолютні швидкості ковзання на вершині зубця та у нижній точці активного профіля [3],

$$V_{ya} = \sqrt{(x_{1c}^2 - x_{1a}^2) + (y_{1c}^2 - y_{1a}^2)}(u + 1/u); \quad V_{yp} = \sqrt{(x_{1c}^2 - x_{1p}^2) + (y_{1c}^2 - y_{1p}^2)}(u + 1/u), \quad (7)$$

де x_a та y_a – координати профілю на вершині зубця; x_p та y_p – координати нижньої точки активного профілю.

V_{Fy1a} та V_{Fy1p} – дотичні складові швидкості ковзання на вершині зубця та у нижній точці активного профіля [3]:

$$V_{Fy1a} = \omega_1 r_a \sin \alpha_a; \quad V_{Fy1p} = \omega_1 r_p \sin \alpha_p, \quad (8)$$

де r_a та r_p – радіуси на вершині зубця та у нижній точці активного профіля; $u = z_2 / z_1$ – передатне число.

Отже, рівняння (5)...(8) є математичною моделлю оптимізації С-С зачеплення за критерієм мінімальних відносних швидкостей ковзання.

Визначення змінних проектування. До основних характеристик С-С зачеплення відносяться [2]: кут зачеплення в полюсі α_C ; радіуси кривизни верхньої та нижньої частин лінії зачеплення r_{kh} та r_{kd} ; коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^* та h_f^* ; модуль зачеплення m ; числа зубців шестерні та колеса z_1 та z_2 .

Параметри h_a^* та h_f^* , m , z_1 та z_2 призначають, виходячи із потрібного передатного числа та згинальної міцності зубців Вони, на відміну від інших, не мають суттєвого впливу на контактні напруження та відносні швидкості ковзання. Тому обираємо у якості змінних проектування наступні параметри:

- кут зачеплення в полюсі α_C ;
- радіуси кривизни верхньої та нижньої частин лінії зачеплення r_{kh} та r_{kd} .

За необхідності можливо додати ще дві змінні проектування у випадку мінімізації відносних швидкостей ковзання:

- коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^* та h_f^* .

Числові та функціональні обмеження на змінні проектування.

1. Мінімальне значення кута зачеплення в полюсі α_C знаходиться із умови відсутності заклинювання передачі: $\alpha_{C\min} \geq (1,1 \dots 1,2) \operatorname{tg} f$, де f – коефіцієнт тертя ковзання у зачепленні. Максимальне значення $\alpha_{C\max}$ призначається у межах $25 \dots 28^\circ$, виходячи із досвіду проектування С-С зачеплення [2].

2. Радіуси кривизни лінії зачеплення r_{kh} та r_{kd} обмежуються діапазоном $4 \dots 14$ мм, виходячи з теорії С-С зачеплення та досвіду проектування [2].

3. Коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^* та h_f^* обмежується діапазонами $h_{a\min}^* \leq h_a^* \leq h_{a\max}^*$; $h_{f\min}^* \leq h_f^* \leq h_{f\max}^*$.

4. Відсутність підрізання ніжки та загострення вершини зубця.

5. Відсутність інтерференції у зачепленні.

6. Коефіцієнт торцевого перекриття ε_α повинен задовольняти умові $\varepsilon_\alpha \geq 1,1 \dots 1,2$.

7. Коефіцієнт радіального зазору c^* повинен задовольняти умові $c^* \geq 0,2 \dots 0,25$.

Обрання методу розв'язання задачі. З усього різноманіття шляхів розв'язання оптимізаційних задач було обрано метод, який добре себе зарекомендував під час оптимізації трансмісій та редукторів [4], а саме, зондування простору параметрів, де у якості пробних точок в одиничному багатомірному кубі використовуються точки ЛПт-послідовності [5]. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів – до 51, та забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок – до 2^{20} .

Висновки. Побудовано цільові функції оптимізації С-С зачеплення за критеріями мінімальних контактних напружень та мінімальних відносних швидкостей ковзання. Визначені змінні проектування та сформовано

систему обмежень. У якості методу розв'язання задачі обрано зондування простору параметрів за допомогою ЛПт-послідовності. У подальших дослідженнях планується розробити алгоритми розв'язання задачі, провести перевіірочні розрахунки з метою оцінки отриманих теоретичних результатів, запропонувати варіанти С-С зачеплень із підвищеною навантажувальною здатністю.

Література

1. Stephen P. Radzevich. Theory of Gearing Kinematics, Geometry, and Synthesis. Second Edition: Revised and Expanded. Boca Raton, Taylor & Francis, CRC Press, 2018. 898 p.
2. Vereš M., Bošanský M., Gaduš J. Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
3. Goldfarb Veniamin, Trubachev Evgenii, Barmina Natalya. Advanced Gear Engineering. Springer, Mechanisms and Machine Science. Volume 51, 2018, 499 p.
4. Ustinenko O., Bondarenko O., Klochkov I., Serykov V. Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 1 (2019), pp. 196–199.
5. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. Москва, Дрофа, 2006. 175 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМ КОНТАКТОМ

Левин Н.А., Протасов Р.В., Андриенко С.В.,
Устиненко А.В., Бондаренко А.В.

Статья посвящена оптимальному проектированию зубчатых передач с выпукло-вогнутым контактом зубьев. Построена математическая модель оптимизации по критериям минимальных контактных напряжений или относительных скоростей скольжения. В качестве объекта исследований выбраны С-С зацепления, предложенные словацкими учеными М. Бошански и М. Верешем. Для них разработано достаточное количество вариантов исходных контуров, выполнен большой объем теоретических и натурных экспериментальных исследований контактной прочности и износостойкости. Построены целевые функции: для случая минимизации контактных напряжений $F_{\sigma} = \sigma_H \rightarrow \min$; случая минимизации относительных скоростей скольжения $F_{\lambda} = \lambda \rightarrow \min$. В качестве переменных проектирования для обеих целевых функций выбраны: угол зацепления в полюсе α_C ; радиус кривизны верхней части линии зацепления $r_{k\bar{b}}$; радиус кривизны нижней части линии зацепления r_{kd} . Можно добавить еще две переменных проектирования в

случае минимизации относительных скоростей скольжения: коэффициенты высоты головки и ножки зуба исходного контура h_a^* и h_f^* . Сформирована система ограничений на переменные проектирования: на угол зацепления в полюсе α_C ; на радиусы кривизны линии зацепления r_{kh} и r_{kd} ; на коэффициенты высоты головки и ножки зуба исходного контура h_a^* и h_f^* ; условия отсутствия подрезания ножки и заострения вершины зуба; условие отсутствия интерференции в зацеплении; минимально допустимые значения коэффициента торцевого перекрытия ε_α и коэффициента радиального зазора s^* . В качестве метода решения задачи выбрано зондирование пространства параметров посредством ЛП-последовательности. Метод позволяет оперировать значительным количеством параметров – до 51, обеспечивает достаточно большое количество равномерно распределенных пробных точек – до 2^{20} . В дальнейших исследованиях планируется разработать алгоритмы решения задачи, провести тестовые и проверочные расчеты для оценки полученных теоретических результатов, предложить варианты С-С зацеплений с повышенной погрузочной способностью.

Ключевые слова: зубчатая передача, выпукло-вогнутый контакт, оптимизация, целевая функция, переменные проектирования.

A MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION FOR GEARS WITH CONVEX-CONCAVE CONTACT

Nickita Levin, Roman Protasov, Sergij Andrienko,
Oleksandr Ustynenko, Oleksiy Bondarenko

The article is devoted to the optimal design of gears with convex-concave tooth contact. A mathematical model of optimization is built according to the criteria of minimum contact stresses or relative sliding velocities. C-C gearing proposed by the Slovak scientists M. Boshanski and M. Veres was chosen as the object of research. A sufficient quantity of the initial contour's variants have been developed for them. A large volume of theoretical and experimental studies of contact strength and wear resistance has been carried out. An objective function is constructed: for the case of minimizing contact stresses $F_\sigma = \sigma_H \rightarrow \min$; for the case of minimizing the relative sliding velocities $F_\lambda = \lambda \rightarrow \min$. As variables planning for both objective functions, the following were chosen: pressure angle at the pole α_C ; the curvature radius at the upper part of contact path r_{kh} ; the curvature radius at the lower part of contact path r_{kd} . You can add two variables planning in the case of minimizing the relative sliding speeds: the addendum and dedendum coefficients of basic rack tooth h_a^ and h_f^* . Formed a system of constraints on the variables planning: on pressure angle at the pole α_C ; on the curvature radiuses of contact path r_{kh} and r_{kd} ; on the addendum and dedendum coefficients of basic rack tooth h_a^* and h_f^* ; conditions of the absence of cutter interference for tooth dedendum and sharpening for the tooth addendum;*

condition of the absence of mesh interference; the minimum permissible values for the profile contact ratio ε_a and the radial clearance coefficient c^* . Probing of the parameter space by means of an LP-sequence was chosen as a method for solving the problem. The method allows you to operate with a significant number of parameters – up to 51, provides a sufficiently large number of evenly distributed test points – up to 2^{20} . In further studies, it is planned to develop algorithms for solving the problem, to carry out test and verification calculations to evaluate the theoretical results obtained, to propose variants of C-C gearing with increased loading capacity.

Key words: gear, convex-concave contact, optimization, objective function, variables planning.

References

1. Stephen P. Radzevich. (2018) *Theory of Gearing Kinematics, Geometry, and Synthesis. Second Edition: Revised and Expanded*. Boca Raton, Taylor & Francis, CRC Press, 898. [in English]
2. Vereš, M., Božanský, M., Gaduš J. (2006) *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 180 [in English]
3. Goldfarb Veniamin, Trubachev Evgenii, Barmina Natalya. (2018) *Advanced Gear Engineering*. Springer, Mechanisms and Machine Science. 51, 499 [in English]
4. Ustinenko, O., Bondarenko, O., Klochkov, I., Serykov V. (2019) Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 196–199. [in English]
5. Sobol, I.M., Statnikov, R.B. (2006) *Vybor optimal'nyh parametrov v zadachah so mnogimi kriterijami*. Moscow, Drofa, 175 [in Russian].