УДК 514.18

MODELING AND COMPUTER IMPLEMENTATION OF A SPLINE FROM CLOTHOID SEGMENTS

Badaev Yu.I., Doctor of Technical Sciences,
ybad0228.gmail.com, ORCID: 0000-0002-1415-9739
National Technical University of Ukraine Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute (Kyiv, Ukraine)
Lagodina L.P., Ph.D,
lplahodina@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4012-836X
National Transport University (Ukraine)

When designing the contours of machines and units that operate in a moving environment, an important role is played by ensuring a smooth change in curvature.

The law of curvature change is very important in this case, because the curvature break along the surface inherits the turbulent stall of the flow of the moving medium, which increases the resistance of the unit to the moving medium. An increase in resistance to a moving medium leads to a decrease in the speed of movement. And when used in aircraft construction, the disruption of a moving medium can lead to a peak and an aircraft crash.

The integral curve of the "clothoid" is known. Its peculiarity lies in the fact that along the curve its curvature changes according to the linear law. Therefore, the use of this curve to construct a surface can provide a linear law of change in curvature along the surface. The paper considers the construction of a spline consisting of clothoid segments, which provides a linear closed curvature change along the entire spline curve.

The specified spline is advantageous to use in the design of surfaces of machines and assemblies, working in a moving environment (surfaces of aircraft, cars, ships), in which it is important to specify the law of curvature variation along the surface.

The law of curvature change is very important in this case, because the curvature break along the surface inherits the turbulent stall of the flow of the moving medium, hich increases the resistance of the unit to the moving medium. An increase in resistance to a moving medium leads to a decrease in the speed of movement. And when used in aircraft construction, the disruption of a moving medium can lead to a peak and an aircraft crash. The papers [1,2,3] consider various variants of surface portions, but none of them provides a linear law of curvature variation.

Key words: curvature, spline of clothoid segments, "clothoid" curve.

Statement of problem. An algorithm for constructing a curvilinear segment of the clothoid arc, given by two points and a tangent and a curvature in one of them, is given. The algorithm can be used in the design of curvilinear contours of machines with a given linear law of curvature operating in a moving medium.

Recent research and publication analysis. Books [1,2] provide an analytical definition of the segment of the clothoid arc and its characteristics. Clothoid is characterized by the fact that the curvature along the curve varies according to a linear law. This fact is very beneficial for the design of curved contours of machines and units operating in a moving environment. In [3,4,5] algorithms for constructing curves according to a given pattern-law of curvature are given. However, the problem of constructing an arc segment at given points, tangents and specific curves is not solved.

Setting article objectives. The article proposes an algorithm for constructing a segment of the clothoid arc at given two points, tangent and curvature at one of them.

Main part. We will build a segment of the clothoid arc, which is shown in fig.1.

As is known from [2], the following formulas are valid for the curve line:

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds\cos\varphi, \\ dy &= ds\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$k = d\varphi / ds, \tag{2}$$

where ds is the differential of the curve arc, $d\varphi$ is the differential of the angle between the edge tangents of the arc, k is the curvature of the curve at this point.

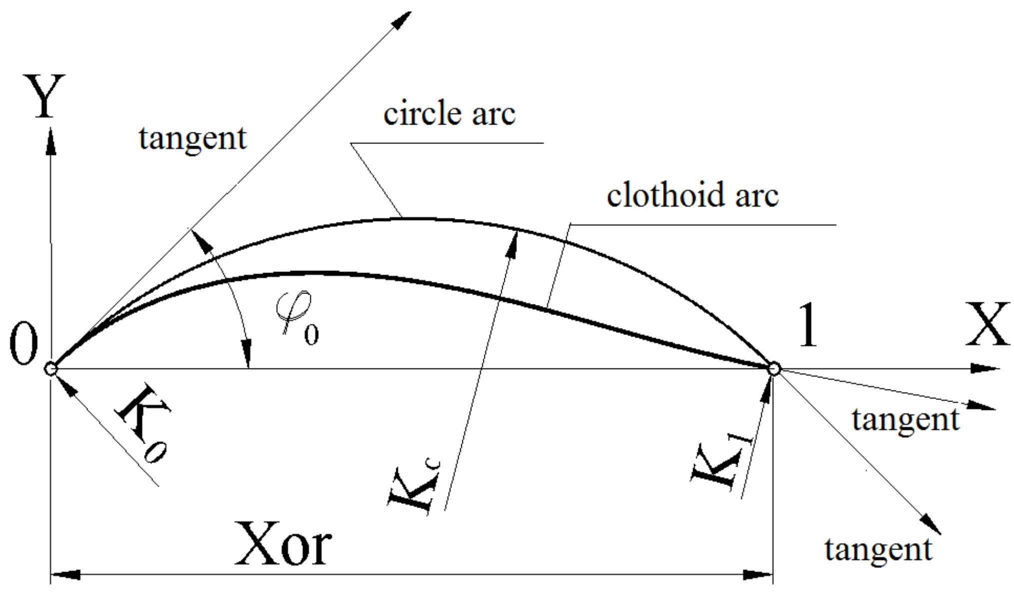

Fig.1. Segment of the arc of clothoid

From (2) you can write:

$$d\varphi = kds. \tag{3}$$

For clothoids will be:

$$k(s) = k_0 + (k_1 - k_0)s. \tag{4}$$

Integrating (3) taking into account (4), we obtain:

$$\varphi = \int_0^s k(s)ds = k_0 s + \frac{k_1 - k_0}{2} s^2 + \varphi_0. \tag{5}$$

Taking into account (1) and (5), as well as the location of the local coordinate system as shown in fig.1, the following formulas can be written to calculate the arc of the clothoid:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_0^s \cos[\varphi_0 + k_0 s + \frac{k_1 - k_0}{2} s^2]ds = \Big|_{S=So} Xor, \\ y &= \int_0^s \sin[\varphi_0 + k_0 s + \frac{k_1 - k_0}{2} s^2]ds = \Big|_{S=So} 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

In formulas (6), the unknowns are k_1 and s_0. System (6) can be solved only by an iterative method.

The following algorithm is proposed.

Based on the given values of the initial angle φ_0 and the chord Xor, we calculate the curvature of the circular arc using the formula

$$k_c = \frac{2\sin\varphi_0}{Xor}, \qquad k_{cl} = \frac{2\sin\varphi_0}{Xor}. \tag{7}$$

It would be logical to assume that the value of the curvature of the arc clothoid k_{cl} will be in the middle of the arc segment.

Thus, on the first calculation cycle, you can set the value of k_1 by the formula

$$k_1 = k_0 + 2(k_c - k_0) = 2k_c - k_0. \tag{8}$$

Next, we will calculate the arc of the clothoid using formulas (6) until the value of the ordinate y becomes equal to 0.

In this case, we get some value $(Xor)'$.

In general, there will be $(Xor)' \neq Xor$ first.

At the next stages, we correct the value of k_1 according to the formula

$$k_{1\text{new}} = k_{1\text{previous}} \frac{(Xor)'}{Xor}, \qquad (9)$$

and then we will repeat the calculations until $(Xor)' = Xor \pm \delta$ (the value of δ specifies the error).

The described algorithm works correctly if $k_0 \leq k_1$, $k_0 \leq k_{cl}$, that is, when the curvature further increases, which ensures the construction of a convex segment.

In this case, the arc will definitely cross the *x*-axis.

The described algorithm works correctly if $k_0 \leq k_{cl}$, that is, when the curvature increases further, which ensures the construction of a convex segment.

In the case when $k_0 \geq k_{cl}$,, that is, when the curvature will further decrease, the cases shown in fig. 2.

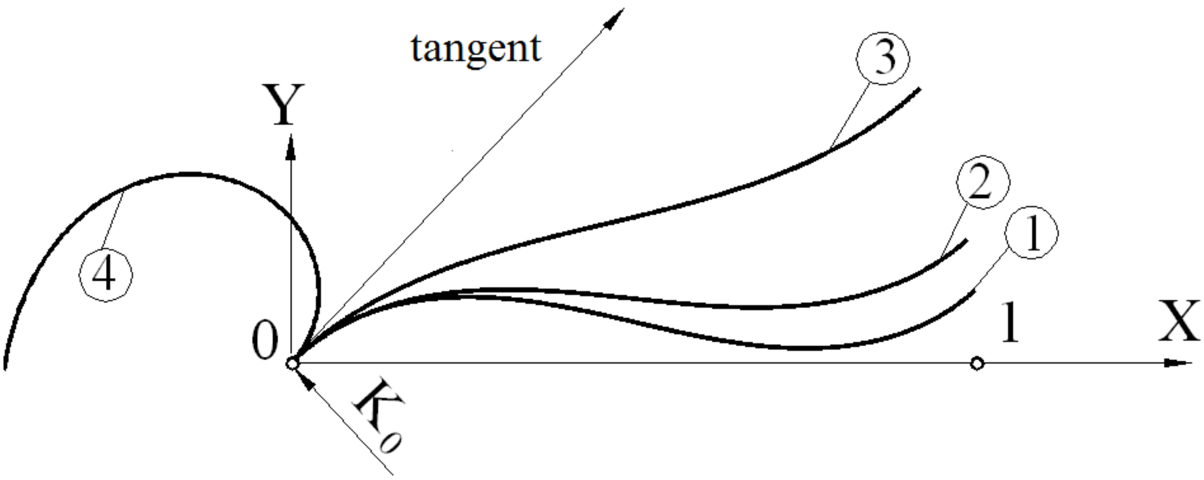

Fig. 2. Variants of the arc clothoid

Cases 1), 2) and 3) differ in that the arc further does not intersect the *x* axis, and in variant 4) the abscissa *x* generally decreases without reaching $x = x_1$.

It is clear that in this case the value of k_1 is very small and should be increased. Therefore, in the construction algorithm, it is necessary to provide for checking such options and, if they are, then the value of k_1 must be increased.

Thus, the following algorithm for constructing a segment of the clothoid arc is proposed.

1. Given: Xor, k_0 , φ_0 , δ – Xor calculation error.
2. Set the initial data:

   Δs – discrete value of the arc length for construction δ (0.1,…,0.001), $s = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $k = k_0$, $\varphi = \varphi_0$, δ.
3. Calculate k_{cl} according to formula (7) and k_1 according to formula (8).
4. Calculate the following x and y values:

$$s_{new} = s + \Delta s,$$

$$\varphi_{new} = \varphi + [k_0 + (k_1 - k_0)s_{new}]\Delta s,$$

$$x_{new} = x + \Delta s \cos \varphi_{new},$$

$$y_{new} = y + \Delta s \sin \varphi_{new}.$$

5. Parsing x_{new}, y_{new} :

   a) if $y_{new} \le 0$, then go to 5);

   b) if $x_{new} \ge 2X_{окр}$ then go to 6).

6. If X_{cl} - $\delta \le X_{cl}$ + δ, then we calculate finished otherwise, we calculate new values of k_1 according to formula (9), we assign $s = 0, x = 0, y = 0, k = k_0$, $\varphi = \varphi_0$ and go to 3).

7. In these cases, we increase the value of k_1:

   $k_1 = k_1 + 0.1(k_0 - k_1)$,

   assign $s = 0, x = 0, y = 0, k = k_0$, $\varphi = \varphi_0$ and go to 3).

The article implements a computer program in the AutoLISP language in the system environment AutoCAD.

The results are presented in fig.3.

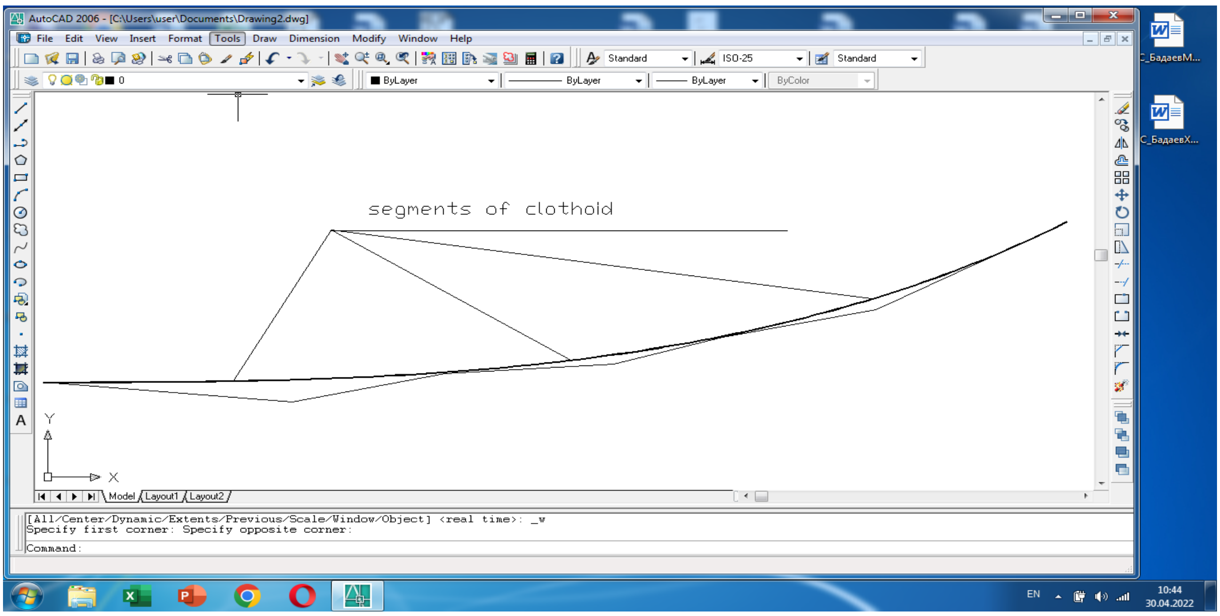

Fig. 3. The results the results of the clothoid arc segment construction algorithm

Conclusions. Thus, the article proposes an algorithm for calculating a segment of an arc of a clothoid for given two points, a tangent and a curvature in one of them. Ssible to model curvilinear contours, in which the curvature changes linearly, which compares favorably with machines and units that operate in a moving environment.

Literature

1. Савелов А.А. Плоские кривые. *Систематика, свойства, применения*. Москва: Физматгиз, 1960. 293с.
2. Рашевский А.В. Курс дифференциальной геометрии. Москва: ГОНТИ, 1939. 360с.
3. Бадаєв С.Ю. Проектування криволінійних обводів за заданим законом кривини. *Прикладна геометрія та інженерн графіка*, 2002. Вип. 4, Т. 15. С. 93-96.
4. Бадаєв С.Ю. Інтегральні криві із заданим законом кривини *Прикладна геометрія та інженерн. графіка*. ТДАТА, 2003. Вип. 4, Т. 18. С. 132-134.
5. Бадаєв С.Ю. Проектування сегмента клотоїди, вписаного в заданий трикутник. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків, 2009. Вип.24. С.157-163.

МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ СПЛАЙНУ З КЛОТОЇДНИХ СЕГМЕНТІВ

Бадаєв Ю.І., Лагодіна Л.П.

При проектуванні контурів машин і агрегатів, що працюють в рухомому середовищі, важливу роль відіграє забезпечення плавної зміни кривизни. Закон зміни кривизни дуже важливий у цьому випадку, тому що розрив кривизни вздовж поверхні успадковує турбулентний зрив потоку рухомого середовища, що підвищує стійкість агрегату до рухомого середовища.

Збільшення опору рухомому середовищу призводить до зменшення швидкості руху. А при використанні в літакобудуванні порушення рухомого середовища може призвести до піку та падіння літака. Інтегральна крива «клотоїди» відома. Її особливість полягає в тому, що вздовж кривої її кривизна змінюється за лінійним законом. Отже,

використання цієї кривої для побудови поверхні може забезпечити лінійний закон зміни кривизни вздовж поверхні.

У роботі розглянуто побудову сплайну, що складається з сегментів клотоїди, який забезпечує лінійну замкнуту зміну кривизни вздовж всієї сплайн-кривої. Зазначений сплайн вигідно використовувати при проектуванні поверхонь машин і вузлів, що працюють у рухомому середовищі (поверхні літаків, автомобілів, кораблів), в якому важливо вказати закон зміни кривизни вздовж поверхні .

Закон зміни кривизни дуже важливий у цьому випадку, тому що розрив кривизни вздовж поверхні успадковує турбулентний зрив потоку рухомого середовища, Це підвищує стійкість агрегату до рухомого середовища. Збільшення опору рухомому середовищу призводить до зменшення швидкості руху. А при використанні в літакобудуванні порушення рухомого середовища може призвести до піку та падіння літака. У роботах [1,2,3] розглядаються різні варіанти ділянок поверхні, але жодна з них не надає лінійного закону зміни кривизни.

Ключові слова: кривизна, сплайн сегментів клотоїди, "клотоїдна" крива.

References

1. Savelov A.A. Flat curves. *Systematics, properties, applications*. Moskva: Fizmatgiz. 1960. 293p. [in Russian]
2. Rashevsky A.V. Course of differential geometry. M.: GONTY. 1939. 360p.
3. Badaev S.Yu. Design of curvilinear contours according to the given law of curvature. *Prykladna hieomietriia ta inzhenierna hrafika*, 2002. 4(15), p. 93-96. [in Ukrainian]
4. Badaev S.Yu. (2003). Integral curves with a given curvature law. *Prykladna hieomietriia ita inzhenierna hrafika*,2003. 4(18), p.132-134. [in Ukrainian]
5. Badaev S.Yu. (2009). Designing a clothoid segment inscribed in a given triangle. *Heometrychne ta kompiuterne modeliuvannia*, 2009. Vol. 24, p. 157-163. [in Ukrainian]