УДК 631.312: 514.18

КОВЗАННЯ ЧАСТИНКИ ПО РУХОМІЙ ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615
Несвідомін В.М., д.т.н.,
vnesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718
Воліна Т.М., к.т.н.,
t.n.zaharova@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8610-2208
Бабка В.М., к.т.н.,
babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285
Грищенко І.Ю., к.т.н.,
irgr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-1000-9805
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

Багато інженерних задач, які стосуються взаємодії робочих органів машин з частинками технологічного матеріалу, потребують аналітичних залежностей руху частинки по рухомій шорсткій площині. При потраплянні частинки на рухому горизонтальну шорстку площину, яка при русі залишається горизонтальною, частинка починає по ній ковзати. Характер руху площини задає форму траєкторій ковзання частинки. Достатньо дослідженими є зворотно-поступальні коливання горизонтальної площини, а також поступальні коливання, коли всі точки площини описують кола, проте, в цих випадках відсутній поворот площини. Однак, численні деталі машин і механізмів здійснюють саме такий рух. Якщо площина рухається поступально (усі точки площини описують однакові криві), частинка рухається по траєкторії, подібній до кривої, яку описує площина. При обертальному русі площини (усі точки площини описують концентричні кола), частинка рухається по спіралі правильної форми. У випадку поєднання цих двох рухів (усі точки площини описують еліпси та їх частковий випадок – коло або пряму) на початковому етапі відносний рух частинки є дещо хаотичним, проте з часом він набуває форми спіралі незалежно від місця попадання частинки на площину. У статті розглянуто відносний рух частинки по горизонтальній шорсткій площині, яка здійснює складні коливання, які є результатом переміщення точки площини по колу зі сталою кутовою швидкістю відносно його центра і одночасним обертанням площини навколо цієї точки з тією ж кутовою швидкістю в протилежну сторону. Розглянуто частковий випадок коливань, коли довжини кривошипу і повзуна дорівнюють нулю. Аналітичні залежності руху частинки знаходились методами диференціальної геометрії. Складено *диференціальні рівняння ковзання частинки, які розв'язано чисельними методами. Отримані закономірності дозволяють значно розширити теорію руху частинки по поверхні. Крім того, вони можуть бути застосовані до геометричного проектування механізмів кривошипно-повзунного типу, у яких довжина повзуна дорівнює довжині кривошипа.*

Ключові слова: відносний рух, горизонтальна площина, коливання з обертальним рухом, частинка, диференціальні рівняння.

Постановка проблеми. Інженерні задачі, що стосуються взаємодії робочих органів сільськогосподарських машин і знарядь з частинками технологічного матеріалу, для свого розв'язку потребують наявності аналітичних залежностей руху частинки. Досить глибоко дослідженими є поступальні коливання (усі точки площини описують кола), а також зворотно-поступальні коливання горизонтально розташованої площини. Зрозуміло, що у випадках таких коливань площина не здійснює поворот, проте у більшості випадків поверхні робочих органів здійснюють саме такий рух. Отже, доцільним є дослідження руху частинки по площині, яка здійснює складні коливання. Такий рух є результатом переміщення точки площини по колу зі сталою кутовою швидкістю відносно його центра і одночасним обертанням площини навколо цієї точки з тією ж кутовою швидкістю в протилежну сторону.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача руху матеріальної частинки по площині, яка здійснює коловий коливальний рух, вперше була розв'язана М. Є. Жуковським в геометричній інтерпретації [1], узагальнена і поширена на випадки еліптичних коливань І. І. Блехманом [2, 3]. П. М. Василенко диференціальні рівняння руху частинки складав у проекціях на осі рухомої системи координат, жорстко прив'язаної до площини, що коливається [4], а І. І. Блехман – у проекціях на осі нерухомої системи координат. П. М. Заїка розглядав переміщення частинок по робочих площинах вібраційних зерноочисних машин [5]. У праці [6] вивчено рух частинок по похилій площині, всі точки якої описують еліпси. Рух частинок технологічного матеріалу по поверхні циліндра, який здійснює горизонтальні і вертикальні коливання, розглянуто в працях [7, 8].

Формулювання цілей статті. Метою статті є дослідження закономірностей руху матеріальних частинок по шорсткій горизонтальній площині, у якої точка описує коло по відношенню до нерухомої горизонтальної площини, а шорстка площина обертається навколо цієї рухомої точки.

Основна частина. На рис. 1 рухома площина μ зображена прямокутником, виділеним потовщеними відрізками. Вона віднесена до прямокутної системи Auv. Переміщення рухомої площини μ будемо здійснювати по відношенню до нерухомої системи координат Oxy.

На початку переміщення площини μ осі Au і Ox збігаються, а осі Oy і

Av паралельні і зміщені на величину *r* радіуса кола (рис. 1,a), по якому буде рухатися початок координат рухомої площини μ. Відрізок *r=OA* будемо вважати кривошипом, а відрізок *L=AB* – повзуном. Вони рівні, тобто мають однакові довжини. До повзуна прикріплена нерухомо площина μ, яка буде рухатися разом із ним. При повороті кривошипа *OA* на кут γ (рис. 1,b) повзун *AB* теж повернеться на кут γ. Це випливає з того, що за умовою точка *B* має рухатися по осі *Ox* і *OA=AB*, отже трикутник *OAB* рівнобедрений і кути при основі рівні. Слід мати на увазі, що кривошип *OA* повертається проти годинникової стрілки, а повзун *AB* – за годинниковою стрілкою.

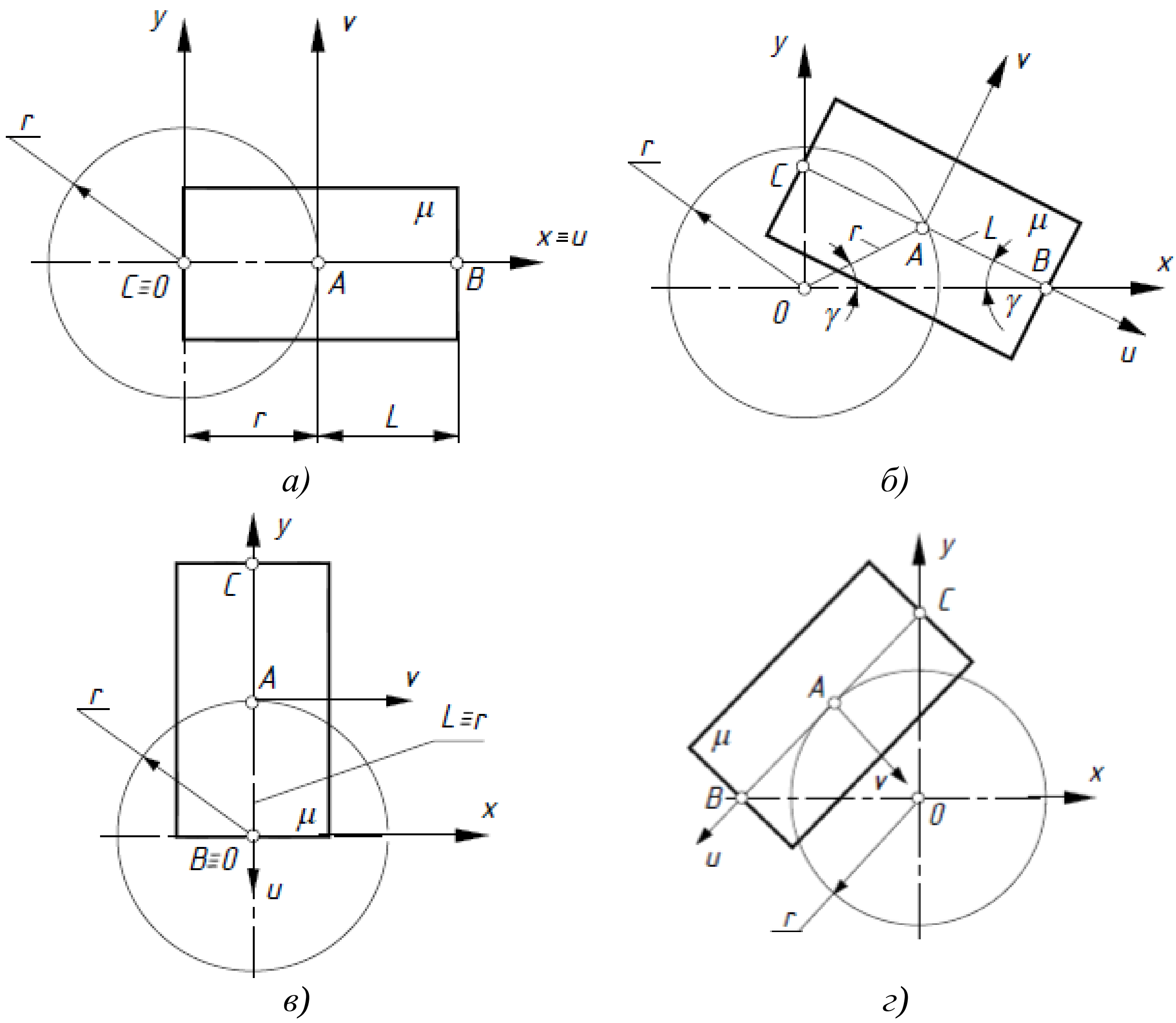


Рис. 1. Графічні ілюстрації до переміщення площини μ: *а*) кут $\gamma=0°$; *б*) кут $\gamma=30°$; *в*) кут $\gamma=90°$; *г*) кут $\gamma=135°$

Приймаючи кут γ за незалежну змінну, запишемо параметричні рівняння кола – множини положень точки *A* кривошипа *AB*:

$$x_A = r\cos\gamma\,; y_A = r\sin\gamma. \tag{1}$$

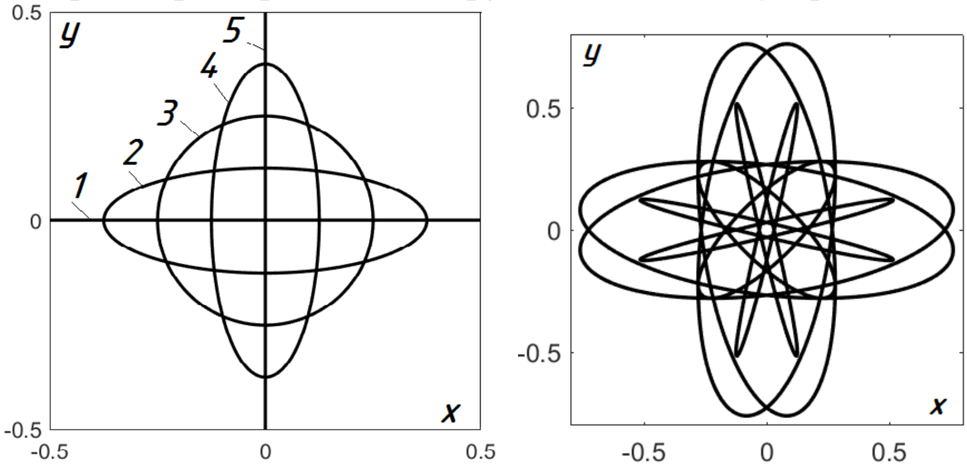
Повзун *AB* разом із рухомою системою *Auv* при своєму переміщенні повертається на кут (*–γ*) по відношенню до нерухомої системи координат *Oxy*. Цей поворот рухомої системи по відношенню до нерухомої запишеться:

$$x_{uv} = u\,cos(-\gamma) - v\,sin(-\gamma)\,; y_{uv} = u\,sin(-\gamma) + v\,cos(-\gamma). \tag{2}$$

Будемо вважати, що кривошип *OA* обертається зі сталою кутовою швидкістю *ω*, отже *γ=ωt*, де t – час. Приймаючи це до уваги, додамо два рухи (1) і (2) і отримаємо параметричні рівняння положень точок рухомої площини μ, заданих координатами u, *v*, в проекціях на нерухому площину *Oxy*:

$$\begin{aligned} x &= (r + u)\,cos\,\omega\,t + v\,sin\,\omega\,t; \\ y &= (r - u)\,sin\,\omega\,t + v\,cos\,\omega\,t. \end{aligned} \tag{3}$$

Точка *B* у рухомій системі має координати: *u=AB=r, v=0*. Після їх підстановки у рівняння (3) отримаємо *x=0*, тобто точка *B* ковзає по осі *Ox*. Точка *C* повзуна має координати *u=-r, v=0*, тобто вона ковзає по осі *Oy*. Точка *A* описує коло, всі інші точки описують еліпси. На рис. 2 побудовані абсолютні траєкторії окремих точок рухомої площини *μ* при *r=0,25*.



а) *б)*

Рис. 2. Абсолютні траєкторії точок в системі *Oxy*, які є нерухомими по відношенню до рухомої системи координат *Auv*: *а*) траєкторії точок, розташованих на відрізку *AB*, тобто при *v=0*: *1* – точки *B* (*u=0,25*), *3* – точки *A* (*u=0*), *5* – точки *C* (*u= –0,25*), та інших (*u= ±0,125*); *б*) траєкторії точок, розташованих на площині *μ* при попередніх значеннях координати *u* і значеннях координати *v=±0,125*

Траєкторії на рис. 2 побудовані для нерухомих точок рухомої площини. Однак частинка при попаданні на площину *μ* почне ковзати по ній, отже координати u і v будуть змінними і залежними від часу *t*, тобто *u=u(t)* і *v=v(t).* Ці залежності опишуть лінію в рухомій системі *Auv*, по якій ковзає частинка, тобто відносну траєкторію. Таким чином, нам потрібно знайти невідомі залежності $u=u(t)$ і $v=v(t)$. Для цього складемо рівняння руху у вигляді $m\bar{w} = \bar{F}$, де m – маса частинки, $\bar{w}$ – вектор абсолютного прискорення, $\bar{F}$– результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9,81$ *м/с*^{2}), яка врівноважується силою реакції N площини, та сила тертя $F=fN=fmg$, яка спрямована в протилежну сторону ковзання частинки (f – коефіцієнт тертя). Сила ваги mg і сила реакції N діють у вертикальному напрямі і врівноважені між собою, отже у площині діє тільки одна сила тертя $F=fmg$. Вектор її дії спрямований по дотичній до відносної траєкторії в протилежну сторону відносної швидкості, яка визначається першими похідними $u'=u'(t)$ і $v'=v'(t)$. Абсолютна величина відносної швидкості є геометричною сумою похідних: $V_r = \sqrt{u'^2 + v'^2}$. Проекції одиничного вектора відносної швидкості в системі Auv запишуться:

$$\left\{\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}\right\}. \tag{4}$$

Для знаходження абсолютного прискорення продиференціюємо абсолютну траєкторію (3), маючи на увазі, що $u=u(t)$ і $v=v(t)$. Після першого диференціювання отримаємо складові абсолютної швидкості:

$$\begin{aligned} x' &= (v' - \omega u - \omega r)\sin\omega t + (u' + \omega v)\cos\omega t; \\ y' &= (v' - \omega u + \omega r)\cos\omega t - (u' + \omega v)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{5}$$

Диференціюванням виразів (5) отримаємо складові абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned} x'' &= [v'' - \omega(2u' + \omega v)]\sin\omega t + [u'' + \omega(2v' - \omega u - \omega r)]\cos\omega t; \\ y'' &= [v'' - \omega(2u' + \omega v)]\cos\omega t - [u'' + \omega(2v' - \omega u + \omega r)]\sin\omega t. \end{aligned} \tag{6}$$

Векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ розпишемо в проекціях на осі нерухомої системи координат. Але одиничний вектор (4) відносної швидкості знайдено в системі Auv без врахування її повороту. Щоб привести цей вектор у відповідність до нерухомої системи координат Oxy, його теж потрібно повернути на кут ($-\gamma$) за формулами (2). Після цього отримаємо:

$$\left\{\frac{u'\cos\omega t + v'\sin\omega t}{\sqrt{u'^2+v'^2}}; \frac{v'\cos\omega t - u'\sin\omega t}{\sqrt{u'^2+v'^2}}\right\}. \tag{7}$$

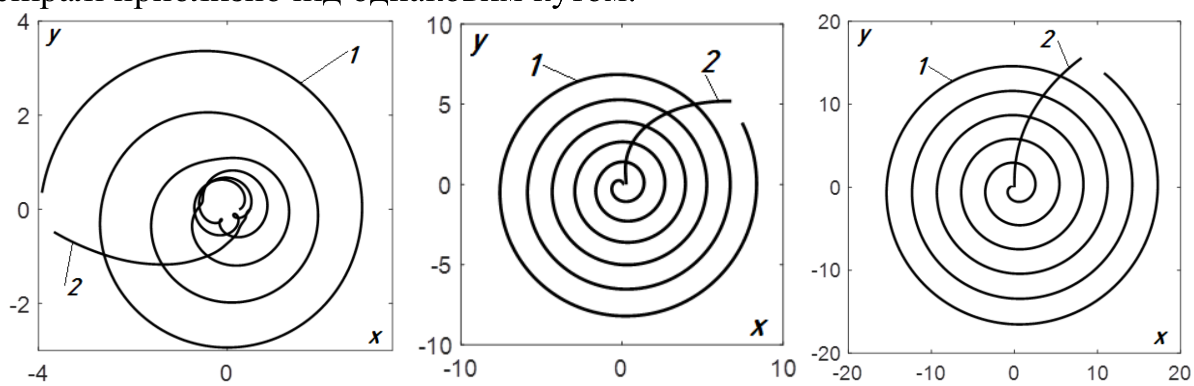
Запишемо диференціальне рівняння, маючи на увазі, що сила тертя $F=fmg$ спрямована в протилежну сторону від вектора (7):

$$mx'' = -fmg\frac{u'\cos\omega t + v'\sin\omega t}{\sqrt{u'^2 + v'^2}};$$
$$my'' = -fmg\frac{v'\cos\omega t - u'\sin\omega t}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}. \quad (8)$$

Після підстановки у (8) виразів абсолютного прискорення (6) і розв'язування відносно других похідних, отримаємо:

$$u'' = -\frac{fgu'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} + \omega(\omega r\cos 2\omega t - 2v' + \omega u);$$
$$v'' = -\frac{fgv'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} + \omega(\omega r\sin 2\omega t + 2u' + \omega v). \quad (9)$$

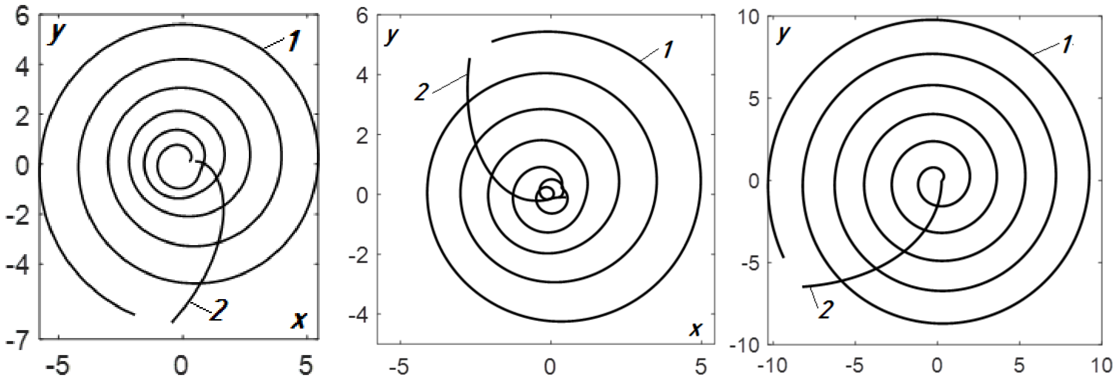
Систему диференціальних рівнянь (9) потрібно розв'язувати чисельними методами. Знайдені залежності $u=u(t)$ і $v=v(t)$ у вигляді графіків представляють собою траєкторію відносного руху частинки, тобто слід її ковзання по площині μ. Параметричні рівняння (3) з урахуванням цих залежностей дозволяють побудувати траєкторію абсолютного руху. На рис. 3 цифрою *1* позначено відносну траєкторію ковзання частинки по площині μ, а цифрою *2* – абсолютну траєкторію її руху по відношенню до нерухомої системи координат *Oxy*. Частинка попадала на площину μ в точках *B*, *A* і *C* (рис. 1,*а*). З часом рух частинки ставав прогнозованим – відносний по спіралі, а абсолютний – по кривій, яка перетинає витки спіралі приблизно під однаковим кутом.



а) *б)* *в)*

Рис. 3. Відносна – *1* і абсолютна – *2* траєкторії руху частинки при $r=0,25$, $w=15$ і $v=0$: *а*) $u=0,25$; *б*) $u=0$; *в*) $u=-0,25$

На рис. 4,*а,б* частинка попадала на площину μ по обидві сторони від точки *B* зі значенням координати $v=\pm 0,1$, а на рис. 4,в – при $r=0$, тобто при обертальному русі площини.



а) б) в)

Рис. 4. Відносна – *1* і абсолютна – *2* траєкторії руху частинки при $w=15$ і $u=0=25$: а) $u=r=0{,}25$, $v=0{,}1$; б) $u=r=0{,}25$, $v=-0{,}1$; в) $r=0$, $v=0{,}1$

Якщо при коливальному русі площини з її поворотом відносний рух частинки на початковому етапі був дещо хаотичним, оскільки спіраль була певною мірою спотворена, то при обертальному русі траєкторія відносного руху (спіраль) має правильну форму

Висновки. Якщо частинка попадає на горизонтальну шорстку площину, яка рухається, залишаючись горизонтальною, то вона починає по ній ковзати. Форма траєкторій ковзання залежить від характеру руху площини. При поступальному переміщенні, коли всі точки площини описують однакові криві (наприклад, кола), траєкторії ковзання частинки подібні до цих кривих. При обертанні площини, коли всі її точки описують концентричні кола, траєкторією відносного руху частинки є спіраль правильної форми. При поєднанні обох рухів, коли точки площини описують еліпси і їх частковий випадок – коло або пряму, відносний рух частинки на початковому етапі є дещо хаотичним, однак із часом він набуває форми спіралі незалежно від місця попадання частинки на площину.

Література

1. Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. 2-е изд., пер. и доп. М.: Колос, 1980. 304 с.
2. Блехман И.И. Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
3. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
4. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. Киев: Изд-во Укр. акад. сельск. наук, 1960. 283 с.
5. Заика П.М. Об одном семействе регулярных режимов движения частицы по колеблющейся плоскости вибрационной зерноочистительной машины. *Теория механизмов и машин*. Х.: 1966. Вып 1. С. 28–33.

6. Клендій М.Б. Пилипака С.Ф. Взаємодія похилої площини, всі точки якої при поступальному коливанні описують еліпси, із частинками матеріалу. *Механізація та електрифікація сільського господарства*: Міжвідомчий тематичний науковий збірник. Глеваха, 2013. Вип. 98. Т. 1. С. 574–587.
7. Pylypaka S., Klendiy M., Zaharova T. Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2019. Part F2. P. 336–345. DOI: 10.1007/978-3-319-93587-4_35.
8. Pylypaka S., Klendii M., Kremets T., Klendii O.M. Particle Motion over the Surface of a Cylinder, which Performs Translational Oscillations in a Vertical Plane. *Engineering Journal.* 2018. Vol. 22. No. 3. P. 83–92. DOI: 10.4186/ej.2018.22.3.83.

SLIDING OF THE PARTICLE ALONG THE MOVABLE HORIZONTAL PLANE

Serhii Pylypaka, Victor Nesvidomin, Tatiana Volina, Vitaliy Babka, Iryna Hryshchenko

A lot of engineering problems relate to the interaction of working bodies of machines with particles of technological material and require analytical dependencies of particle movement on a moving rough plane. When a particle hits a moving horizontal rough plane, which remains horizontal during movement, the particle begins to slide along it. The character of the movement of the plane determines the shape of the particle's sliding trajectories. The reciprocating oscillations of the horizontal plane, as well as translational oscillations, when all points of the plane describe circles, are sufficiently researched. However, there is no rotation of the plane in these cases. However, numerous parts of machines and mechanisms carry out just such a movement. If the plane moves translationally, the particle moves along a trajectory, which is similar to the curve described by the plane. During the rotational movement of the plane, the particle moves along a spiral of the correct shape. In the case of a combination of these two movements, at the initial stage the relative motion of the particle is chaotic, but over time it acquires the shape of a spiral regardless of point of particle incidence to the plane. The article deals with the relative motion of a particle on a horizontal rough plane, which carries out complex oscillations, which are the result of moving a point of the plane in a circle with a constant angular velocity relative to its center and simultaneous rotation of the plane around this point with the same angular velocity in the opposite direction. The partial case of oscillations, when the lengths of the crank and slider are *equal to zero, is considered. Analytical dependencies of particle motion were found by methods of differential geometry. The obtained regularities make it possible to significantly expand the theory of particle movement on the surface. In addition, they can be applied to the geometric design of mechanisms of the crank-slider type, in which the length of the slider is equal to the length of the crank.*

Key words: relative motion, horizontal plane, oscillations with rotational motion, particle, differential equations.

References

1. Gortinsky, V.V., Demsky, A.B., & Boriskin, M.A. (1980). *Separation processes at grain processing enterprises*. (2nd ed., rev.). M.: Kolos [in Russian].
2. Blekhman, I.I., & Janelidze, G.Yu. (1964). *Vibratory movement*. M.: Nauka [in Russian].
3. Blekhman, I.I. (1994). *Vibrational mechanics*. M.: Physmatlite [in Russian].
4. Vasilenko, P.M. (1960). *Theory of movement of a particle on rough surfaces of agricultural machines*. Kyiv: Publishing House of the Ukrainian Academy of Agricultural Sciences [in Russian].
5. Zaika, P.M. (1966). On one family of regular regimes of particle motion along an oscillating plane of a vibratory grain cleaning machine. *Theory of mechanisms and machines*, 1, 28–33 [in Russian].
6. Klendiy, M.B., & Pylypaka, S.F. (2013). The interaction of an inclined plane, all points of which describe ellipses during translational oscillation, with material particles. *Mechanization and electrification of agriculture*, 98 (1), 574–587 [in Ukrainian].
7. Pylypaka, S., Klendiy, M., & Zaharova, T. (2019). Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, F2, 336–345. DOI: 10.1007/978-3-319-93587-4_35.
8. Pylypaka, S., Klendii, M., Kremets, T., & Klendii, O.M. (2018). Particle Motion over the Surface of a Cylinder, which Performs Translational Oscillations in a Vertical Plane. *Engineering Journal*, 22(3), 83–92. DOI: https://doi.org/10.4186/ej.2018.22.3.83.