УДК 514.18

# ПОРІВНЯННЯ КОМПОЗИЦІЙНИХ ТА ТРАДИЦІЙНИХ ПЕРШИХ ПОХІДНИХ ТОЧКОВИХ ПОЛІНОМІВ У ПРОЦЕСІ ЗАГУЩЕННЯ ЇХНІХ ВИХІДНИХ ПЛОСКИХ ДИСКРЕТНИХ КРИВИХ ЛІНІЙ

Верещага В.М., докт. техн. наук,
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Муртазієв Е.Г., канд. пед. наук,
ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523
Верещага І.В.,
ivereshchaha@gmail.com,
Кривенко О.В., аспірант*,
krivenko321@gmail.com
*Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна, м. Запоріжжя)*
*Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша*

*Розглядається сегмент дискретної плоскої кривої лінії, який складається із чотирьох базисних точок. За використання декартових координат цих базисних точок складається, у параметричній формі, відповідний точковий поліном, для якого, за методами диференціювання Ньютона-Лейбніца, утворюється традиційна перша похідна і обчислюються її значення у декількох поточних точках.*

*Надається пояснення відмінності між традиційною і композиційною першими похідними, які полягають у тому, що традиційна утворюється шляхом диференціювання характеристичних функцій, а у композиційної похідної характеристичні функції точкового поліному лишаються без змін, замінюються його базисні точки на значення похідних у цих базисних точках. За одних і тих же значень параметру обчислюються значення традиційної і композиційної похідних то здійснюється їх порівняння, яке показало, що в усіх поточних точках ці значення перших похідних відрізняються на величину обчислювальної похибки, а у базисних точках дорівнюють одне одному.*

*Далі здійснюється перший крок загущення, виконується, відповідно до цього кроку, параметризація базисних точок і точок загущення. За результатами параметризації утворюється точковий поліном для першого кроку загущення. Шляхом диференціювання якого знаходимо рівняння його традиційної першої похідної і обчислюються її значення у базисних і поточних точках. Знайдені значення традиційної першої похідної підставляються у точкове рівняння композиційної першої похідної та обчислюються її значення у тих же поточних точках. Порівнюються*

* Науковий керівник – докт. техн. наук, професор Верещага В.М.

*значення традиційної і композиційної похідних, які також відрізняються між собою на величину обчислювальної похибки, тобто дорівнюють одне одному. Аналогічні дії здійснюються і для другого кроку загущення і здобувається той самий результат, що значення композиційної і традиційної похідних в одних і тих самих поточних точках дорівнюють одне одному, якщо у точкове рівняння композиційної першої похідної підставити, замість базисних точок, значення традиційної першої похідної.*

*В результаті проведених досліджень дійшли висновку, що композиційна похідна є більш узагальненою по відношенню до традиційної похідної Ньютона-Лейбніца. Крім того, за використання смуги дифпроєкцій, шляхом загущення плоскої вихідної дискретної кривої лінії, композиційна похідна наближається до традиційної похідної та збігається з нею, коли дифпроєкції композиційної похідної у базисних точках збігаються зі значеннями традиційної першої похідної.*

*Ключові слова: точковий поліном, композиційна похідна, традиційна похідна, смуга дифпроєкцій, загущення дискретної кривої.*

***Постановка проблеми.*** Одним із засадничих елементів аналізу геометричних форм є утворення їхніх похідних. Композиційні криві лінії відрізняються від решти алгебраїчних тим, що кожен складовий елемент їхніх функціональних базисів завжди являє собою просте відношення трьох точок, яке, як відомо, є інваріантом паралельного проєктування, що є головною властивістю композиційних геометричних об'єктів.

Якщо до композиційних кривих ліній застосувати традиційне (Ньютона-Лейбніца) диференціювання, то здобута таким чином похідна втрачає головну властивість композиційної кривої і перетворюється на звичайну алгебраїчну криву. Тим самим традиційна похідна композиційної кривої лінії виходить за межі методів композиційної геометрії, а це, у свою чергу, призводить до певних труднощів у геометричному моделюванні та збільшенню ресурсовитрат у програмній реалізації.

Отже постає проблема, яким чином утворювати похідні для композиційних кривих ліній, тобто точкових поліномів, щоби ці похідні не втрачали головну властивість, а лишалися композиційними кривими лініями. Дослідженню на тестових прикладах щодо утворення композиційних похідних для точкових поліномів і присвячується надана стаття.

***Аналіз останніх досліджень і публікацій.*** Композиційна геометрія як новий науковий напрям розпочиналася із розвитку теорії композиційного геометричного моделювання, методи якого були опубліковані у роботах [1-7]. Останнім часом, з використанням смуги дифпроєкцій [8], розробляються у Мелітопольській школі прикладної геометрії, методи композиційного диференціювання і композиційного інтегрування, про необхідність яких наголошувалося у роботі [9]. Більш детально, за використання смуги дифпроєкцій, розглядалися питання побудови, у обчислювальних алгоритмах, композиційних похідних у базисних і поточних точках вихідної дискретної кривої у роботах [10, 11, 12]. Запропонована стаття є подальшим кроком щодо розробки теорії композиційних похідних для точкових поліномів.

***Формулювання цілей статті.*** На тестових прикладах показати, що значення композиційної похідної, у процесі загущення вихідної дискретної кривої, наближається до значень традиційної похідної у поточних точках та повністю збігається з нею, коли у базисних точках композиційної похідної знаходяться значення традиційної похідної.

***Основна частина.*** Нехай сегмент дискретної кривої задається чотирма базисними точками ${}^{\circ}A_1(0;\ 4)$, ${}^{\circ}A_2(8;\ 8)$, ${}^{\circ}A_3(24;\ -8)$, ${}^{\circ}A_4(32;\ 12)$, де горішній лівобічний індекс: “0” вказує на нульовий крок загущення. Тоді відповідний точковий поліном, у розгорнутому вигляді для нульового кроку загущення, матиме запис:

$$\begin{aligned}{}^{\circ}M(t) = y_1 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 3{,}5261162172 - t \cdot 3{,}45252888233 + 0{,}80059289586}{0{,}80059289586} + \\ + y_2 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 3{,}18962724621 - t \cdot 2{,}37925449242}{-0{,}47754680657} + \\ + y_3 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 2{,}33648897099 - t \cdot 0{,}67297794198}{0{,}82246070894} + \\ + y_4 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 1{,}5261162172 - t \cdot 0{,}40029644793}{-2{,}69612802706}.\end{aligned} \quad (1)$$

Або у загальному вигляді (1):

$${}^{\circ}M(t) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot {}^{\circ}p_i(t), \quad (2)$$

де ${}^{\circ}p_i(t)$ – характеристичні функції точкового поліному (1);

$y_i$ – координати базисних точок: $y_1 = 1$, $y_2 = 8$, $y_3 = -8$, $y_4 = 12$.

Для нульового кроку загущення традиційна перша похідна у розгорнутому вигляді для (1) матиме запис:

$$\begin{aligned}{}^{\circ}M'(t) = 4 \cdot \frac{-3t^2 + t \cdot 7{,}0522324344 - 3{,}45252888233}{0{,}80059289586} + \\ + 8 \cdot \frac{-3t^2 + t \cdot 6{,}37925449242 - 2{,}37925449242}{-0{,}47754680657} + \\ + (-8) \cdot \frac{-3t^2 + t \cdot 4{,}67297794198 - 0{,}67297794198}{0{,}82246070894} + \\ + 12 \cdot \frac{-3t^2 + t \cdot 3{,}0522324344 - 0{,}40029644793}{-2{,}69612802706}.\end{aligned} \quad (3)$$

Або (3) у загальному вигляді:

$${}^{\circ}M'(t) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot {}^{\circ}p_i'(t), \quad (4)$$

де ${}^{\circ}p_i'(t)$ – базисні функції традиційної першої похідної.

Зауважимо, що базисні функції ${}^{\circ}p_i'(t)$ втрачають властивості характеристичних функцій, якими наділені ${}^{\circ}p_i(t)$ із (1), (2).

Якщо у традиційної першої похідної (4) диференціюються характеристичні функції $°p_i(t)$ за параметром $t$ і здобуваються базисні функції $°p_i{}'(t)$, тобто $°p_i(t) \Rightarrow °p_i{}'(t)$, то для утворення композиційної першої похідної $°M_k{}'(t)$ точкового полінома (1) характеристичні функції лишаються без змін, а відбувається заміна точок – $y_i$ на значення першої похідної – $y_i{}'$, які визначаються за використання смуги дифпроєкцій із залученням методів точкового БН-числення (Балюби-Найдиша числення). У цьому випадку рівняння композиційної першої похідної матиме вигляд:

$$°M_k{}'(t) = \sum_{i=1}^{4} y_i{}' \cdot °p_i(t), n = 4. \qquad (5)$$

Здійснимо параметризацію дискретної кривої таким чином, що $t_1 = 0$; $t_2 = 0{,}33648897099$; $t_3 = 1{,}18962724621$; $t_4 = 2$. Виконаємо відповідні обчислення і складемо порівняльну таблицю 1 для традиційних – $°M'(t)$ та композиційних – $°M_k{}'(t)$ перших похідних нульового кроку згущення у базисних та поточних точках. При цьому, значення $y_i{}'$ візьмемо такими, що дорівнюють значенню $°M'(t_i)$ здобутих за результатами обчислення (4) у базисних точках № 1; 3; 8; 13, тобто: $y_1{}' = °M'(t_1) = 30{,}9357332666$, $y_2{}' = °M'(t_3) = -4{,}22446709036$, $y_3{}' = °M'(t_8) = -14{,}4083782542$, $y_4{}' = °M'(t_{13}) = 80{,}7991590076$.

*Таблиця 1*

Порівняльна таблиця значень традиційних і композиційних перших похідних для нульового кроку згущення.

| $i$ | $t_i$ | $°M'(t_i)$ | $°M_k{}'(t_i)$ | $\Delta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 30,9357332666 | 30,9357332666 | 0 |
| 2 | 0,2 | 7,9136549269 | 7,91365492512 | $0{,}178\cdot10^{-8}$ |
| 3 | 0,33648897099 | –4,22446709036 | –4,22446709036 | 0 |
| 4 | 0,4 | –8,88432987652 | –8,88432987712 | $0{,}6\cdot10^{-9}$ |
| 5 | 0,6 | –19,4582211435 | –19,4582211443 | $0{,}8\cdot10^{-9}$ |
| 6 | 0,8 | –23,8080188741 | –23,8080188749 | $0{,}8\cdot10^{-9}$ |
| 7 | 1 | –21,9337230685 | –21,9337230693 | $0{,}8\cdot10^{-9}$ |
| 8 | 1,18962724621 | –14,4083782542 | –14,4083782542 | 0 |
| 9 | 1,2 | –13,8353337261 | –13,8353337323 | $0{,}62\cdot10^{-8}$ |
| 10 | 1,4 | 0,48714914254 | 0,48714914347 | $0{,}93\cdot10^{-9}$ |
| 11 | 1,6 | 21,0337255685 | 21,0337255664 | $0{,}21\cdot10^{-8}$ |
| 12 | 1,8 | 47,8043955215 | 47,8043955171 | $0{,}44\cdot10^{-8}$ |
| 13 | 2 | 80,7991590076 | 80,7991590076 | 0 |

Як бачимо (табл. 1), значення традиційної та композиційної перших похідних збігаються у базисних точках: $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_8 = \Delta_{13} = 0$ і відрізняються у поточних точках одне від одного на величину обчислювальної похибки. У табл. 1 $\Delta_i = \left|°M'(t_i) - °M_k{}'(t_i)\right|$, крім того, параметризуються лише базисні точки, а жодна з поточних точок не враховується у процесі параметризації.

Перший крок загущення. До вихідних базисних точок – $^{\circ}A_1$, $^{\circ}A_2$, $^{\circ}A_3$, $^{\circ}A_4$ додаємо точки першого кроку загущення – $^{1}A_{12}$, $^{1}A_{23}$, $^{1}A_{34}$, які залучимо до процесу параметризації дискретної кривої, крім того, долучаємо точки першого кроку загущення – $^{1}A_{12,1}$; $^{1}A_{12,2}$; $^{1}A_{23,1}$; $^{1}A_{23,2}$; $^{1}A_{34,1}$; $^{1}A_{34,2}$, які не параметризуються, але для яких визначаються параметри. За результатами дій щодо параметризації супровідної ламаної лінії дискретної кривої складемо вихідну табл. 2.

*Таблиця 2*

Вихідні точки для обчислень перших похідних за першим кроком загущень

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_i$ | $^{\circ}A_1$ | $^{1}A_{12,1}$ | $^{1}A_{12}$ | $^{1}A_{12,2}$ | $^{\circ}A_2$ | $_{23,1}$ | $^{1}A_{23}$ | $^{1}A_{23,2}$ | $^{\circ}A_3$ | $^{1}A_{34,1}$ | $^{1}A_{34}$ | $^{1}A_{34,2}$ | $^{\circ}A_4$ |
| $x_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| $y_i$ | 4 | 5,8 | 6,8 | 7,6 | 8 | 7 | -1,8 | -6,8 | -8 | -6,4 | -3,2 | 1 | 12 |
| $t_i$ | 0 | 0,10122671039 | 0,18368723043 | 0,2647245058 | 0,34079551289 | 0,49590926426 | 0,81672225894 | 1,05761170276 | 1,19749041904 | 1,29384619656 | 1,43255150869 | 1,85316272242 | 2,02385368832 |

У табл. 2 горішній лівобічний індекс: “1” вказує, що це точки першого кроку загущення. Долішній індекс: цифри до коми вказують, що точка загущення розташована між 1-ю та 2-ю базисними точками, чи то 2-ю та 3-ю, чи то 3-ю та 4-ю; цифра після коми вказує на номер точки.

Тоді, відповідний даним табл. 2, точковий поліном у розгорнутому вигляді для першого загущення, матиме запис:

$$\begin{aligned} {}^{1}M(t) = y_1 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 3{,}56213962025 - t \cdot 3{,}52136501855 + 0{,}82593339803}{0{,}82593339803} + \\ + y_2 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 3{,}22134410736 - t \cdot 2{,}4235454013}{-0{,}4913819284} + \\ + y_3 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 2{,}36464920121 - t \cdot 0{,}68972025572}{0{,}84775280834} + \\ + y_4 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 1{,}53828593193 - t \cdot 0{,}40809936153}{-2{,}81481103856}. \end{aligned} \quad (6)$$

Або (6) у загальному вигляді:

$$ {}^{1}M(t) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot {}^{1}p_i(t), $$

де ${}^{1}p_i(t)$ – характеристичні функції точкового поліному (6);

$y_i$ – координата базисних точок із (1), (2).

Традиційна перша похідна для (6) матиме вигляд:

$$ {}^{1}M'(t) = 4 \cdot \frac{-3t^2 + t \cdot 7{,}1242792405 - 3{,}52136501855}{0{,}82593339803} + \quad (7)$$

$$+8\cdot\frac{-3t^2+t\cdot 6{,}44268821472-2{,}4235454013}{-0{,}4913819284}+$$
$$+(-8)\cdot\frac{-3t^2+t\cdot 4{,}72929840242-0{,}68972025572}{0{,}84775280834}+$$
$$+12\cdot\frac{-3t^2+t\cdot 3{,}07657186386-0{,}40809936153}{-2{,}81481103856}.$$

Або (7) у загальному вигляді:

$$^1M'(t)=\sum_{i=1}^{4}y_i\cdot{}^1p_i'(t)\,,n=4, \qquad (8)$$

де $^1p_i'(t)$ – базисні функції традиційної першої похідної.

$y_i$ – координата базисних точок із (6).

Аналогічно (5), запишемо рівняння композиційної першої похідної для першого кроку загущення:

$$^1M_k'(t)=\sum_{i=1}^{4}y_i'\cdot{}^1p_i(t)\,,n=4. \qquad (9)$$

Здійснимо параметризацію вершин супровідної ламаної лінії $°A_1$, $°A_2$, $°A_3$, $°A_4$ – базисні точки та $^1A_{12}$, $^1A_{23}$,$^1A_{34}$ – точки першого кроку загущення. В результаті дістанемо параметри, які наведені у табл. 2.

Виконаємо необхідні обчислення і складемо порівняльну табл. 3 для традиційних $^1M'(t)$ та композиційних $^1M_k'(t)$ перших похідних першого кроку загущення у базисних точках та поточних точках, які включені і ті, що не враховуються в процесі параметризації. При цьому, для обчислення значень традиційної першої похідної у базисних точках, тобто $y_1'={}^1M'(t_1)=30{,}6513059394$, $y_2'={}^1M'(t_5)=-4{,}25731106056$, $y_3'={}^1M'(t_9)=-14{,}6464844727$, $y_4'={}^1M'(t_{13})=80{,}2171388233$.

*Таблиця 3*

Порівняльна таблиця значень традиційних і композиційних перших похідних для першого кроку загущення

| $i$ | $t_i$ | $^1M'(t_i)$ | $^1M_k'(t_i)$ | $\Delta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 30,6513059394 | 30,6513059394 | 0 |
| 2 | 0,10122671039 | 18,453567411 | 18,4535674096 | $0{,}14\cdot10^{-8}$ |
| 3 | 0,18368723043 | 9,6594083033 | 9,6594083018 | $0{,}15\cdot10^{-8}$ |
| 4 | 0,2647245058 | 2,0162048567 | 2,0162048556 | $0{,}11\cdot10^{-8}$ |
| 5 | 0,34079551289 | –4,25731106056 | –4,25731106056 | 0 |
| 6 | 0,49590926426 | –14,3451338433 | –14,3451338434 | $0{,}1\cdot10^{-9}$ |
| 7 | 0,81672225894 | –23,6949699211 | –23,6949699214 | $0{,}3\cdot10^{-9}$ |
| 8 | 1,05761170276 | –20,5115754306 | –20,5115754305 | $0{,}1\cdot10^{-9}$ |
| 9 | 1,19749041904 | –14,6464844727 | –14,6464844727 | 0 |
| 10 | 1,29384619656 | –8,8897225035 | –8,8897225044 | $0{,}9\cdot10^{-9}$ |
| 11 | 1,43255150869 | 1,85597080042 | 1,85597079939 | $0{,}103\cdot10^{-8}$ |
| 12 | 1,85316272242 | 52,1824491525 | 52,1824491585 | $0{,}6\cdot10^{-8}$ |
| 13 | 2,02385368832 | 80,2171388233 | 80,2171388233 | 0 |

Як бачимо (табл. 3), і на першому кроці загущення значення традиційної та композиційної перших похідних збігаються у базисних точках і відрізняються у поточних точках на величину обчислювальної похибки.

Другий крок загущення. До точок першого кроку загущення (табл. 2) додамо ще чотири точки загущення ${}^{2}A_{23,1}$; ${}^{2}A_{23,2}$; ${}^{2}A_{23,3}$; ${}^{2}A_{23,4}$, які не використовуватимемо у процесі параметризації. В результаті, дістанемо, для другого кроку загущення, вихідну табл. 4.

Вихідні дані для обчислень за другим кроком загущення

Табл. 4

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | 2,2 | | 3,1 | 3,1 | 3,2 | 3 | 3,3 | 3,2 | 3,4 | | 4,1 | 34 | 4,2 | |
| $x_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| $y_i$ | 4 | 5,8 | 6,8 | 7,6 | 8 | 7,8 | 7 | 4 | -1,8 | -4,8 | -6,8 | -7,8 | -8 | -6,4 | -3,2 | 1 | 12 |
| $t_i$ | 0 | 0,10122671039 | 0,18534895314 | 0,26208024425 | 0,33881153536 | 0,41636841104 | 0,49392528673 | 0,67575391 39 | 0,85758254107 | 0,97802726298 | 1,09847198489 | 1,17702612612 | 1,25558026735 | 1,3519360488 | 1,49390089726 | 1,66890751389 | 2,08951872763 |

У табл. 4 базисними точками є точки з номерами 1, 5, 13, 17, тобто ${}^{\circ}A_1$, ${}^{\circ}A_2$, ${}^{\circ}A_3$, ${}^{\circ}A_4$.

Тоді, відповідний даним табл. 4, точковий поліном, у розгорнутому вигляді для другого кроку загущення, матиме наступний запис:

$$\begin{aligned}{}^{2}M(t) = y_1 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 3{,}68391053034 - t \cdot 3{,}75691660908 + 0{,}8888918776}{0{,}8888918776} + \\ + y_2 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 3{,}34509899498 - t \cdot 2{,}62355848267}{-0{,}54379035019} + \\ + y_3 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 2{,}42833026299 - t \cdot 0{,}70795304827}{0{,}95992715556} + \\ + y_4 \cdot \frac{-t^3 + t^2 \cdot 1{,}59439180271 - t \cdot 0{,}42540507814}{-3{,}05065985703},\end{aligned} \qquad (10)$$

де $y_1$ відповідає ${}^{\circ}A_1(0{,}4)$; $y_2$ – ${}^{\circ}A_2(8{,}8)$; $y_3$ – ${}^{\circ}A_3(24,-8)$, $y_4$ – ${}^{\circ}A_4(32{,}12)$.

Або (10) у загальному вигляді:

$${}^{2}M(t) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot {}^{2}p_i(t), \qquad (11)$$

де ${}^{2}p_i(t)$ – характеристичні функції точкового поліному (10), (11).

Традиційна перша похідна для (10) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}{}^{2}M'(t) = 4 \cdot \frac{-3t^2 + t \cdot 7{,}36782106068 - 3{,}75691660908}{0{,}8888918776} + \\ + 8 \cdot \frac{-3t^2 + t \cdot 6{,}69019798996 - 2{,}62355848267}{-0{,}54379035019} +\end{aligned} \qquad (12)$$

$$+(-8)\cdot\frac{-3t^2+t\cdot 4{,}85666052598-0{,}70795304827}{0{,}95992715556}+$$
$$+12\cdot\frac{-3t^2+t\cdot 3{,}18878360542-0{,}42540507814}{-3{,}05065985703}.$$

Або (11) у загальному вигляді:

$$^2M'(t)=\sum_{i=1}^{4} y_i\cdot {}^2p_i{}'(t), \tag{13}$$

де $^2p_i{}'(t)$ – базисні функції традиційної першої похідної (12), (13);

$y_i$ – координата базисних точок із (10).

Аналогічно (5) запишемо рівняння композиційної першої похідної для другого кроку загущення:

$$^2M_k{}'(t)=\sum_{i=1}^{4} y_i{}'\cdot {}^2p_i(t)\,, n=4. \tag{14}$$

Використовуючи (табл. 4) усі, окрім $^2A_{23,1}$; $^2A_{23,2}$; $^2A_{23,3}$; $^2A_{23,4}$, вершини супровідної ламаної лінії, визначимо параметри для усіх точок включно і точок другого кроку загущення (табл. 4). При цьому, для обчислення значень композиційної першої похідної, візьмемо значення першої похідної (табл. 5) у базисних точках, тобто $y_1{}'={}^2M'(t_1)=29{,}2639683789$, $y_2{}'={}^2M'(t_5)=-3{,}07157141394$, $y_3{}'={}^2M'(t_{13})=-12{,}9407315489$, $y_4{}'={}^2M'(t_{17})=76{,}5390726366$.

Таблиця 5

Порівняльна таблиця значень традиційних і композиційних перших похідних для другого кроку загущення

| $i$ | $t_i$ | $^1M'(t_i)$ | $^1M_k{}'(t_i)$ | $\Delta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 29,2639683789 | 29,2639683789 | 0 |
| 2 | 0,10122671039 | 17,9812173607 | 17,9812173616 | $0{,}9\cdot10^{-9}$ |
| 3 | 0,18534895314 | 9,6564147127 | 9,6564147109 | $0{,}18\cdot10^{-8}$ |
| 4 | 0,26208024425 | 2,8953715207 | 2,89537151952 | $0{,}118\cdot10^{-8}$ |
| 5 | 0,33881153536 | –3,07157141394 | –3,07157141394 | 0 |
| 6 | 0,41636841104 | –8,2957529084 | –8,29575290921 | $0{,}81\cdot10^{-9}$ |
| 7 | 0,49392528673 | –12,708654093 | –12,7086540935 | $0{,}5\cdot10^{-9}$ |
| 8 | 0,6757539139 | –19,8739092122 | –19,8739092128 | $0{,}6\cdot10^{-9}$ |
| 9 | 0,85758254107 | –22,579985966 | –22,5799859667 | $0{,}7\cdot10^{-9}$ |
| 10 | 0,97802726298 | –21,9173064939 | –21,9173064942 | $0{,}3\cdot10^{-9}$ |
| 11 | 1,09847198489 | –19,2980098033 | –19,2980098036 | $0{,}3\cdot10^{-9}$ |
| 12 | 1,17702612612 | –16,5355097531 | –16,5355097538 | $0{,}7\cdot10^{-9}$ |
| 13 | 1,25558026735 | –12,9407315489 | –12,9407315489 | 0 |
| 14 | 1,35193604488 | –7,3947581635 | –7,39475816423 | $0{,}73\cdot10^{-9}$ |
| 15 | 1,49390089726 | 3,05796536214 | 3,05796536278 | $0{,}64\cdot10^{-9}$ |
| 16 | 1,66890751389 | 19,6844096918 | 19,684409691 | $0{,}8\cdot10^{-9}$ |
| 17 | 2,08951872763 | 76,5390726366 | 76,5390726366 | 0 |

Як бачимо (табл. 5), значення традиційних і композиційних перших похідних точкового поліному другого кроку загущення також, як і у попередніх випадках, відрізняється одне від другого на величину обчислювальної похибки у поточних точках.

***Висновки.*** Композиційна перша похідна точкового поліному, у якої застосовуються у базисних точках значення традиційної першої похідної, у всіх поточних точках збігаються з відповідними значеннями традиційної першої похідної, утвореної за методом Ньютона-Лейбніца. Для будь-якого точкового поліному утворюється лише одна традиційна перша похідна. Для утворення композиційної першої похідної будь-якого точкового поліному використовується смуга дифпроєкцій, за допомоги якої встановлюються границі поля у межах якого можна утворити для точкового поліному незлічену кількість композиційних перших похідних, до якої належать і традиційна перша похідна. Наявність такої особливості утворення композиційної першої похідної надає можливість варіативного моделювання неперервних композиційних кривих за наперед визначеними умовами. Збільшення кроків загущення дискретної кривої призводить до звуження смуги дифпроєкцій, а це, у свою чергу, наближує одна до одної традиційну і композиційну похідні. Границею звуження смуги дифпроєкцій є композиційна перша похідна точкового поліному, яка прямує до традиційної першої похідної цього ж точкового поліному.

Функціональний базис традиційних похідних точкового поліному втрачає властивості характеристичних функцій, тобто не є простим відношенням трьох точок. Функціональний базис композиційних похідних точкового поліному лишається характеристичною функцією, що значно зменшує ресурсовитрати на операції із застосуванням похідних для композиційних об’єктів. Через те, що традиційні похідні мають функціональний базис, який є простим відношенням трьох точок, треба утворювати традиційні похідні окремо за кожним із параметричних напрямів. І навпаки, композиційна похідна може бути однією за усіма координатними напрямами, це дозволить утворювати двопараметричні композиційні об’єкти, що є похідними двопараметричних точкових поліномів, а це, у свою чергу, призведе до значного скорочення ресурсовитрат у процесі здійснення аналізу цих об’єктів.

В результаті усього сказаного робимо висновок, що композиційні похідні є більш загальною диференціальною формою у порівнянні з традиційними (Ньютона-Лейбніца) похідними для композиційних геометричних об’єктів.

Крім того, якщо для точкового рівняння композиційної похідної довільно обирати у базисних точках значення дифпроєкцій у межах смуги дифпроєкцій, то у процесі загущення дискретної плоскої кривої смуга дифпроєкцій буде звужуватися і наближатиметься до традиційної першої похідної, тому що вона знаходиться всередині цієї смуги. Через це, разом зі смугою дифпроєкцій до традиційної першої похідної буде наближатися і відповідна композиційна перша похідна. У разі, коли обрані значення дифпроєкцій будуть збігатися зі значеннями традиційної першої похідної у базисних точках, то традиційна і композиційна перші похідні, за значеннями в усіх поточних точках, будуть однаковими, якщо нехтувати обчислювальними похибками.

Подальшими напрямками у дослідженнях щодо композиційних похідних є виявлення особливостей утворення композиційних похідних для просторових кривих ліній, заданих множиною із *n* точок. Дослідження цього питання надасть можливість утворення двопараметричних композиційних похідних, тобто утворення, для будь-якої композиційної поверхні довільної форми, композиційної поверхні – похідної.

***Література***


1. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018, 512с.
2. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Моногафія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108с.
3. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О., Лисенко К.Ю. Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
4. Лисенко К.Ю. Теоретичні основи методів утворення композиційних ліній і поверхонь: дис…к.т.н. Київ. КНУБА, 2022. 267с.
5. Павленко О.М. Порівняльний аналіз композиційної інтерполяції з традиційними методами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К., 2022. Вип. 103. С. 162-174.
6. Павленко О.М. Параметричні композиційні матриці. Збірник тез доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції «*Обухівські читання*» 30 березня 2023 р. НУБІП. Київ, 2023, с. 91-96.
7. Лисенко К.Ю. Точкові композиційні матриці. Збірник тез доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції «*Обухівські читання*» 30 березня 2023 р. НУБІП. Київ, 2023, с. 97-99.
8. Верещага В.М. О поле дифпроекций эмпирической кривой / В.М. Верещага. *Начертательная геометрия и черчение*: межвузовский сборник. Алма-Ата, 1979 С. 63-66.
9. Верещага В.М. Про необхідність розробки методів композиційного диференціювання та композиційного інтегрування. Збірник тез доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції «*Обухівські читання*» 30 березня 2023 р. НУБІП. Київ, 2023, С.108-110.
10. Лисенко К.Ю., Верещага В.М. Елементи композиційного диференціювання у точковій формі. *Прикладна геометрія, інженерна графіка*. Випуск 103. КНУБА, 2023 р. 114-122 с.
11. Муртазієв Е.Г., Верещага В.М. Узагальнений графічний аналіз кривих з використанням їхніх похідних. Прикладна геометрія та інженерна

графіка. К., 2022, Вип. 103. С. 142-150.
12. Муртазієв Е.Г. Алгоритм утворення смуги дифпроєкцій та визначення композиційних похідних у базисних точках. Збірник тез доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції «*Обухівські читання*» 30 березня 2023 р. НУБІП. Київ, 2023, с. 102-105.

## COMPARISON OF COMPOSITE AND TRADITIONAL FIRST DERIVATIVE POINT POLYNOMIALS IN THE PROCESS OF THICKENING THEIR OUTPUT FLAT DISCRETE CURVES

Viktor Vereshchaha, Ernest Murtaziiev, Ivan Vereshchaha, Olensandr Kryvenko

*A segment of a discrete flat curve line consisting of four basic points is considered. By using the Cartesian coordinates of these base points, a corresponding point polynomial is formed in a parametric form, for which, according to the Newton-Leibnitz differentiation methods, the traditional first derivative is formed and its values are calculated at several current points.*

*An explanation of the difference between the traditional and composite first derivatives is given, which is that the traditional derivative is formed by differentiating the characteristic functions, while in the composite derivative the characteristic functions of the point polynomial remain unchanged, its base points are replaced by the values of the derivatives at these base points. For the same parameter values, the values of the traditional and composite derivatives are calculated, then their comparison is carried out, which showed that at all current points these values of the first derivatives differ by the amount of the calculation error, and at the base points they are equal to each other.*

*Next, the first thickening step is carried out, according to this step, the parameterization of the base points and thickening points is performed. According to the results of the parameterization, a point polynomial is formed for the first step of thickening. By differentiating which we find the equation of its traditional first derivative and calculate its values at the base and current points. The found values of the traditional first derivative are substituted into the point equation of the composite first derivative and its values are calculated at the same current points. The values of traditional and composite derivatives are compared, which also differ from each other by the amount of computational error, that is, they are equal to each other.*

*Similar actions are carried out for the second step of thickening and the same result is obtained, that the values of the composite and traditional derivatives at the same current points are equal to each other, if the values of the traditional first derivative are substituted into the point equation of the composite first derivative, instead of base points.*

*As a result of the conducted research, it was concluded that the composite derivative is more generalized in relation to the traditional Newton-Leibnitz derivative. In addition, by using the diff projection band, by thickening the flat* *original discrete curve, the composite derivative approaches and coincides with the traditional derivative when the diff projections of the composite derivative at the base points coincide with the values of the traditional first derivative.*

*Key words: point polynomial, composite derivative, traditional derivative, diffraction band, discrete curve thickening.*

**References**

1. Adoniev, Ye. (2018) Composite method of geometric modeling of multifactorial systems: Dr. thesis K.: KNUBA. [in Ukrainian].
2. Vereshchaga, V. (2017) Composite geometric modeling: Monohafiia. Melitopol: FOP Odnoroh [in Ukrainian].
3. Vereshchaga, V., Naidysh, A., Adoniev, Ye., Lysenko, K. (2019) Fundamentals of composite geometric modeling: a textbook. Melitopol: FOP Odnorog [in Ukrainian].
4. Lysenko, K. (2022) Theoretical foundations of the methods of formation of compositional lines and surfaces: Ph.D. Kyiv. KNUBA. [in Ukrainian].
5. Pavlenko, O. (2022) Comparative analysis of composite interpolation with traditional methods. *Applied geometry andengineering graphics*. K.,103, 162-174 [in Ukrainian].
6. Pavlenko, O. (2023) Parametric composite matrices. Collection of theses of reports of the XVII International Scientific and Practical Conference "Obukhov Readings" March 30, 2023. KNUBA. Kyiv, 91-96 [in Ukrainian].
7. Lysenko, K. (2023) Point composite matrices. Collection oftheses of reports of the XVII International Scientific and Practical Conference "Obukhov Readings" March 30, 2023. KNUBA. Kyiv, 97-99 [in Ukrainian].
8. Vereshchaga, V. (1979) On the field of diffrictions of the empirical curve. Sketchy geometry and drawing (interuniversity collection) - Alma-Ata [in Russian].
9. Vereshchaga, V. (2023) On the need to develop methods of compositional differentiation and compositional integration. Collection of theses of reports of the XVII International Scientific and Practical Conference "Obukhov Readings" March 30, 2023.KNUBA. Kyiv, 108-110 [in Ukrainian].
10. Lysenko, K., Vereshchaga, V. (2023) Elements of compositional differentiation in point form. Applied geometry and engineering graphics. K., 103, 114-122 [in Ukrainian].
11. Murtaziiev, E., Vereshchaga, V. (2023) Generalized graphic analysis of curves using their derivatives. Applied geometry and engineering graphics. K., 103, 142-150 [in Ukrainian].
12. Murtaziiev, E. (2023) Algorithm for the formation of a band of diffrictions and determination of composite derivatives at base points. Collection of theses of reports of the XVII International Scientific and Practical Conference "Obukhov Readings" March 30, 2023.KNUBA. Kyiv, 102-105 [in Ukrainian].