

УДК 621.3.049.77

МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗМІННИХ

Бондар О., канд. техн. наук,

Bondardiit@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3884-5589

Кузнецов В.В., канд. техн. наук,

witjane20002014@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8169-4598

Український державний університет науки і технологій,
(м. Дніпро, Україна)

Кокович Б.О.,

kokovych@gmail.com; ORCID: 0009-0003-6714-3663

Назаренко Б.В.,

noliki222@gmail.com

Адам Б.Б.,

adamasboda@gmail.com

Адам В.Я.,

adamvitaliy@gmail.com

Запорізький національний університет, (м. Запоріжжя, Україна)

У статті розглянуто аналітичний підхід до моделювання нелінійних електричних кіл, заснований на методі перетворення змінних. Особливу увагу приділено задачі розряду конденсатора через нелінійне навантаження, яке моделює електролізер з вольт-амперною характеристикою, що включає активаційні та концентраційні компоненти. У результаті отримано узагальнене диференціальне рівняння другого порядку, яке описує динаміку напруги на ємності з урахуванням нелінійного струмозалежного опору. Запропоновано метод перетворення цього рівняння до лінійного з постійними коефіцієнтами шляхом введення нової змінної, що дозволило здійснити повний аналітичний розв'язок системи.

У процесі дослідження показано, що така заміна не лише спрощує аналіз, але й забезпечує збереження геометричної структури фазового простору, що особливо важливо для моделювання автоколивальних і нестійких режимів. Запропонований метод також дозволяє контролювати похибку та зберігати фізичну інтерпретованість параметрів при чисельному розв'язанні. Практична значущість підходу продемонстрована на прикладі електричного кола з ємнісним джерелом і нелінійним електролітичним навантаженням, що дозволило відтворити основні характеристики перехідного процесу: фазовий портрет, енергетичні втрати, гістерезисні ефекти.

Крім того, обґрунтовано можливість застосування методу перетворення змінних для моделювання електрохімічних процесів, зокрема

осадження металів у гальванічних ваннах, де кінетика реакцій і концентраційні залежності формують складну нелінійну динаміку. У такому контексті введення нових змінних дозволяє звести рівняння до лінійного вигляду та здійснювати аналіз як стаціонарних, так і перехідних режимів із підвищеною точністю. Представлені результати можуть бути застосовані у моделюванні електронних пристроїв із нелінійною ВАХ, у енергетиці, автоматизованих системах керування, а також у фізико-хімічних технологіях з електрохімічними перетвореннями.

Ключові слова: нелінійні електричні кола, симплектична структура, метод перетворення змінних, електролізер, електрохімічні процеси, осадження металів.

Постановка проблеми. У сучасній прикладній електроніці, енергетиці та автоматизованих системах зростає потреба в точному моделюванні нелінійних електричних кіл. Особливої складності набувають задачі довготривалого чисельного інтегрування динамічних режимів, які включають автоколивання, нестійкі стани або навіть хаотичну поведінку. Звичайні чисельні методи, які не зберігають структуру фазового простору, можуть призводити до неконтрольованого накопичення похибок і спотворення реальних фізичних процесів у моделі.

Крім того, з'являються нові виклики, пов'язані з моделюванням елементів пам'яті, таких як мемристори, та нелінійних реакцій у складних середовищах, наприклад, у гальванічних процесах. У цих умовах аналітичні методи, які зберігають фізичні інваріанти та дозволяють виявляти багатомасштабну динаміку, набувають особливої значущості. Актуальною постає задача поєднання геометричних та аналітичних підходів для побудови стійких, точних і структурно узгоджених моделей нелінійних електричних та електрохімічних систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним із найперспективніших підходів є симплектичне моделювання, що базується на збереженні геометричної структури фазового простору. У роботі [1] проаналізовано LC-коло з нелінійним конденсатором, де застосування методу симплектичного збурення дозволило забезпечити чисельну стійкість і зменшити похибки інтегрування. У дослідженні [2] запропоновано гамільтонову модель нелінійних електричних кіл з джозефсонівськими переходами, у якій продемонстровано збереження лагранжевої структури навіть для складних елементів. Такий підхід дозволив здійснити як класичне, так і квантове моделювання схем.

Не менш значущим є застосування багатомасштабного аналізу до схем із мемристивними елементами [3]. У роботі показано, що апроксимація мемристивної залежності у вигляді степеневого ряду дозволяє отримати точне наближене рішення, яке враховує поступову зміну фазового простору. Цей підхід особливо важливий для проектування нейроморфних систем, де накопичувальні ефекти мають ключове

значення.

У сфері електрохімічного моделювання доцільним виявляється використання методу перетворення змінних, що походить із концепції фазових інтегралів [4]. У галузі гальванічного осадження металів, де дифузійно-міграційні процеси тісно пов'язані з нелінійною кінетикою, такий метод дозволяє зменшити складність системи рівнянь і підвищити точність чисельного аналізу. Завдяки можливості розділення швидких і повільних компонентів процесу відкриваються нові можливості для моделювання перехідних і сталих режимів.

Отже, аналіз сучасних підходів показує, що аналітичні та геометрично орієнтовані методи не лише не втрачають своєї актуальності, а й формують основу нової генерації математичних моделей складних нелінійних систем.

Формулювання цілей статті. Метою статі є теоретичне обґрунтування та практична реалізація методу перетворення змінних для аналізу нелінійних електричних кіл, динаміка яких описується диференціальними рівняннями другого порядку. Особливу увагу приділено зведенню вихідної нелінійної моделі до лінійної форми шляхом введення нових змінних, що істотно спрощує її аналітичний та чисельний розгляд. Ефективність запропонованого підходу продемонстровано на прикладі перехідного процесу в колі з розрядом конденсатора через нелінійне навантаження, яке моделює електролізер із заданою вольт-амперною характеристикою.

Основна частина. Розглянемо процес розряду конденсатора на нелінійне електричне коло (рис. 1), яке може бути використане як спрощена модель електролізера. Така модельна схема дозволяє відтворити ключові фізичні особливості електрохімічної системи, зокрема нелінійну залежність напруги на навантаженні від струму, що проходить через нього. Нелінійність у даному випадку зумовлена складною вольт-амперною характеристикою електролітичного елемента, яка включає в себе як активаційні, так і концентраційні компоненти переносу. Застосування подібної моделі дозволяє не лише якісно описати поведінку системи в перехідних режимах, але й здійснити кількісний аналіз процесів накопичення заряду, енергетичних втрат, коливальних нестійкостей або ефектів гістерезису, що мають місце в реальних електрохімічних пристроях.

Динаміка перехідного процесу в даному електричному колі описується диференціальним рівнянням, яке враховує взаємодію ємнісних, індуктивних та нелінійних резистивних компонентів.

$$L \left(\frac{di}{dt} \right) + u_R(i) - u_C = 0, \quad (1)$$

де $u_R(i)$ - нелінійна характеристика електролізера.

Початкові умови визначаються зарядом конденсатора до моменту комутації: $u_C(0) = U_0$ а також струмом у колі на момент комутації: $i(0) = 0$.

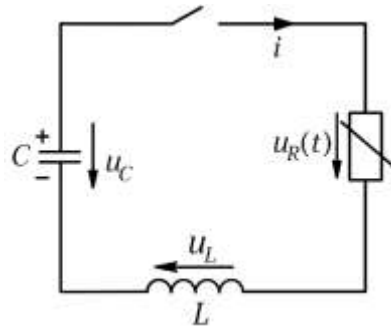


Рис.1. Модельна схема розряду ємнісного джерела через індуктивно-резистивне навантаження з нелінійною характеристикою

Використовуючи вираз для струму через перехідну напругу на конденсаторі: $i = C(du_C/dt)$, перетворимо рівняння (1) у вигляді:

$$(d^2u_C/dt^2) - (LC)^{-1}u_C + u_R(i) = 0. \quad (2)$$

Позначаючи для спрощення подальших викладок:

$$x = u_C; \dot{x} = du_C/dt = i/C;$$

перепишемо рівняння (2) у формі:

$$\ddot{x} + ax + F(x) = 0,$$

де

$$a = -(LC)^{-1}; F(x) = \frac{u_R(i)}{LC}. \quad (3)$$

Крапки над змінною означають похідні за часом, а штрихи - похідні за залежною змінною x .

Введемо нелінійну функцію:

$$V(x) = ax + F(x) = -(LC)^{-1}[u_C - u_R(i)],$$

і тоді рівняння (3) приймає вид:

$$\ddot{x} + V(x) = 0, \quad (4)$$

з початковими умовами:

$$x(0) = U_0; \dot{x}(0) = 0. \quad (5)$$

Для розв'язання цього рівняння (4) подамо функцію $V(x)$ у вигляді добутку:

$$V(x) = f(x)df/dx = f(x)f'(x),$$

де $f(x)$ - невідома функція.

Правомірність цього представлення буде доведено нижче.

Підставляючи вираз (6) у рівняння (4), маємо:

$$\ddot{x} + f(x)f'(x) = 0. \quad (7)$$

Тепер здійснимо перетворення цього нелінійного рівняння (7) на лінійне з постійними коефіцієнтами у вигляді:

$$z''(y) + z(y) = 0, \quad (8)$$

де $z(y) = f[x(t)]$, y - нова змінна,

$$y = \varphi(t). \quad (9)$$

Функцію $\varphi(t)$ виберемо такою, щоб при використанні рівності (9) нелінійне рівняння (7) перетворилося на лінійне (8). З цією метою продифференціюємо рівність (9) незалежною змінною t :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) \dot{y} = f'(x)x.$$

Прийmemo:

$$\dot{y} = \dot{\varphi}(t) = f'[x(t)]. \quad (10)$$

Тоді:

$$\dot{x} = \frac{dz}{dy} = z'(y).$$

Диференціюючи останній вираз ще раз за t і використовуючи рівність (10), отримаємо:

$$\dot{x}' = z''(y)\dot{y} = z''(y)f'(x). \quad (11)$$

Підставляючи вираз (11) у рівняння (7) і вважаючи $f(x) \neq 0$, знаходимо $z''(y) + f(x) = 0$, або, з урахуванням заміни (9), остаточно отримаємо рівняння (8): $z'' + z = 0$.

Розв'язок лінійного рівняння (8) відомий:

$$z = f(x) = A\cos\varphi + B\sin\varphi.$$

Постійні інтегрування знаходяться з початкових умов (5):

$$A = f(U_0)\cos\varphi(0); \quad B = f(U_0)\sin\varphi(0). \quad (12)$$

Остаточно:

$$z(y) = f(x) = f(U_0)\cos\theta(t), \quad (13)$$

де

$$\theta(t) = \varphi(t) - \varphi(0).$$

Розділяючи змінні у рівності (6), отримаємо вираз невідомої функції:

$$f(x) = [2\int V(x)dx + D]^{1/2}.$$

Постійна інтегрування D дорівнює:

$$D = [l^2(x) - 2\int V(x)dx]_{x=U_0}.$$

Оскільки згідно з (10):

$$\dot{y} = \dot{\varphi}(t) = \theta(t) = f'[x(t)],$$

то

$$\theta = \int_{x_0}^x f'(x)dx.$$

Останній вираз враховує співвідношення (13).

Розглянемо розв'язання задачі при іншому поданні функції z . Нехай:

$$z(y) = f(x)s(t); \quad y = \varphi(t). \quad (14)$$

Диференціюючи перше з цих співвідношень двічі за y і використовуючи друге, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = (f'\dot{x}s + f\dot{s})\dot{y}^{-1}; \\ \frac{d^2z}{dy^2} &= \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dy}\right) \frac{dt}{dy} = \\ &= [(f'\dot{x}^2s + f'\dot{x}'s + 2f'\dot{x}\dot{s} + f\dot{s})\dot{y} - (f'\dot{x}s + f\dot{s})\dot{y}']\dot{y}^{-3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Підставляючи першу заміну (14) і вираз (15) у рівняння (8), після нескладних перетворень приходимо до замінного рівняння:

$$\dot{x} + \left(\frac{f'}{f'} \dot{x} + 2 \frac{\dot{s}}{s} \cdot \frac{\dot{y}}{y} \right) \dot{x} + \frac{f}{f'} \left(\frac{\ddot{x}}{s} + \dot{y}^2 \frac{\dot{y}' \dot{s}}{\dot{y} s} \right) = 0. \quad (16)$$

Порівнюючи рівняння (4) та (16), бачимо, що вони ідентичні за умов:

$$(f''/f') \dot{x} + 2\dot{s}/s - \dot{y}/\dot{y} = 0, \quad (17)$$

та

$$f/f' \left(\frac{\dot{s}'}{s} + \dot{y}^2 - \frac{\dot{y}' \dot{s}}{\dot{y} s} \right) = V(x). \quad (18)$$

Подемо рівняння (17) у вигляді:

$$\frac{df'}{f'} + 2 \frac{ds}{s} - \frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = 0.$$

Позначимо

$$\ln s^2 f' / \dot{y} = G,$$

тоді

$$s^2(t) f'(x) = \dot{y} e^G = N^2 \ddot{y},$$

де N - деяка функція, що залежить від параметрів кола.

Оскільки згідно з (10) $\dot{y} = f'[x(t)]$, то $s \doteq N = \sqrt{e^G}$, тобто заміни (9) та (14) збігаються з точністю до постійної інтегрування.

При $G = 0$ вирази (9) і (14) - еквівалентні. Розгляд виразу (18) приводить до представлення (6):

$$V(x) = \frac{f}{f'} \left(\frac{\ddot{s}}{s} + \dot{y}^2 - \frac{\dot{s} \ddot{y}}{s \dot{y}} \right) = \frac{f}{f'} \dot{y}^2 = f(x) f'(x).$$

Це доводить ідентичність заміни (9) і (14), тобто отримання розв'язку нелінійного рівняння (4) перетворенням у лінійне (8) визначається характером нелінійного елемента і для електрохімічного ланцюга може бути представлена виразом [5]:

$$u_B(i) = K_1 \ln(i/K_2),$$

де K_1 і K_2 - емпіричні константи.

Висновки. У межах даної роботи було реалізовано підхід до моделювання нелінійних електричних кіл на основі методу перетворення змінних, що дозволяє зводити рівняння другого порядку з нелінійною правою частиною до лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами. Запропонована методика дозволила провести аналітичний розв'язок задачі розряду ємнісного джерела через індуктивно-резистивне навантаження з нелінійною характеристикою, яка моделює електролізер. Такий підхід забезпечив не лише компактну математичну форму опису, але й дозволив точно дослідити динаміку перехідного процесу, включаючи зміну напруги, струму та енергетичні втрати. Важливою перевагою методу є можливість збереження геометричної структури фазового простору моделі при переході до нових змінних. Це забезпечує стійкість розв'язку, що є особливо актуальним при аналізі нестійких або автоколивальних режимів, характерних для нелінійних електричних схем. Отримані результати підтверджують ефективність перетворення нелінійного рівняння на лінійне не тільки в теоретичному, але й у практичному сенсі - з можливістю

подальшої реалізації на числовому рівні. Також у роботі розглянуто потенційне застосування методу до аналізу електрохімічних процесів, таких як осадження металів у гальванічних ваннах. У цьому випадку метод перетворення змінних може бути використаний для спрощення рівнянь, що враховують кінетичні та дифузійні ефекти. Таким чином, описані підходи можуть мати широке застосування в моделюванні електрохімічних систем із часово-залежними параметрами.

Таким чином, результати статті свідчать про доцільність і універсальність методу перетворення змінних для аналізу складних нелінійних електричних схем, зокрема таких, що включають елементи з нелінійною ВАХ, електрохімічні навантаження або тривалі перехідні режими. Отримані висновки можуть стати основою для розробки нових аналітичних і чисельно-орієнтованих моделей у прикладній електроніці, енергетиці та автоматизованих системах керування.

Література

1. H. Yang, H. Liu, H. Wang, and J. Zhang. Numeric-analytical solution of an LC circuit with nonlinear capacitor based on the symplectic conservative perturbation method. *Int. J. Numer. Model. Electron. Netw. Devices Fields*, 2022. vol. 35, no. 6, Art. no. e2861. DOI: 10.1002/jnm.2861.
2. A. Osborne, T. Larson, S. Jones, R. W. Simmonds, A. Gyenis, and A. Lucas, Symplectic geometry and circuit quantization. 2023. *arXiv preprint*, arXiv:2304.08531, [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2304.08531>.
3. K. J. Chandía, M. Bologna, and B. Tellini. Multiple scale approach to dynamics of an LC circuit with a charge-controlled memristor. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, 2018. Vol. 65, No. 1, pp. 120–124. DOI: 10.1109/TCSII.2017.2699423.
4. M. Paunovic and M. Schlesinger, *Fundamentals of Electrochemical Deposition*, 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2006. ISBN: 978-0-471-71221-3.
5. Шидловська Н.А. Аналіз нелінійних електричних кіл методом малого параметру: автореферат дис. ... докт. техн. наук. Київ, 1997. 39 с.

SIMULATION OF NONLINEAR ELECTRIC CIRCUITS VIA VARIABLE TRANSFORMATION METHOD

Oleg Bondar, Vitaliy Kuznetsov, Bohdan Kokovych, Boris Nazarenko,
Bohdan Adam, Vitaliy Adam

The article presents an analytical approach to modeling nonlinear electrical circuits based on the method of variable transformation. Special attention is given to the problem of capacitor discharge through a nonlinear load that models an electrolyzer with a volt-ampere characteristic incorporating both activation and concentration components. As a result, a generalized second-order differential equation is obtained, describing the voltage dynamics on the capacitor, accounting for the nonlinear current-dependent resistance. A

method is proposed for transforming this equation into a linear one with constant coefficients by introducing a new variable, which enables a complete analytical solution of the system.

The study demonstrates that such a transformation not only simplifies the analysis but also preserves the geometric structure of the phase space, which is particularly important for modeling oscillatory and unstable operating modes. The proposed method also allows for error control and retains the physical interpretability of parameters during numerical solution. The practical significance of the approach is illustrated using an example of an electric circuit with a capacitive source and nonlinear electrolytic load, reproducing key characteristics of the transient process, including the phase portrait, energy losses, and hysteresis effects.

In addition, the possibility of applying the variable transformation method to the modeling of electrochemical processes-such as metal deposition in galvanic baths-is substantiated. In such systems, reaction kinetics and concentration dependencies lead to complex nonlinear dynamics. In this context, the introduction of new variables enables the reduction of equations to a linear form and facilitates accurate analysis of both steady-state and transient regimes. The results presented can be applied to the modeling of electronic devices with nonlinear V-I characteristics, in power engineering, automated control systems, and in physico-chemical technologies involving electrochemical transformations.

Keywords: nonlinear electrical circuits, symplectic structure, variable transformation method, electrolyzer, electrochemical processes, metal deposition.

References

1. H. Yang, H. Liu, H. Wang, and J. Zhang (2022) Numeric-analytical solution of an LC circuit with nonlinear capacitor based on the symplectic conservative perturbation method. *Int. J. Numer. Model. Electron. Netw. Devices Fields*, vol. 35, no. 6, Art. no. e2861. DOI: 10.1002/jnm.2861.
2. A. Osborne, T. Larson, S. Jones, R. W. Simmonds, A. Gyenis, and A. Lucas (2023) Symplectic geometry and circuit quantization. *arXiv preprint*, arXiv:2304.08531. Retrieved from: <https://arxiv.org/abs/2304.08531>
3. K. J. Chandía, M. Bologna, and B. Tellini (2018) Multiple scale approach to dynamics of an LC circuit with a charge-controlled memristor. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 65, no. 1, 120–124. DOI: 10.1109/TCSII.2017.2699423.
4. M. Paunovic and M. Schlesinger, (2006) *Fundamentals of Electrochemical Deposition*, 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley, ISBN: 978-0-471-71221-3.
5. N.A. Shydlovska (1997) *Analysis of Nonlinear Electrical Circuits Using the Small Parameter Method*, Doctor's thesis. Kyiv. [in Ukrainian]