

УДК 514.17

ГЕОМЕТРИЧНІ УМОВИ ПОЯВИ ДИСКРЕТНИХ АНАЛОГІВ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК НА ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ КРИВИХ

Ботвіновська С.І., д-р. техн. наук,

botvinovaka@ua.fm, ORCID: 0000-0002-1832-1342

Золотова А.В., канд. техн. наук,

zolotova.av@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8014-3834

Суліменко А.Г., канд. техн. наук,

asulimenko@i.ua, ORCID: 0000-0002-2454-1675

Київський національний університет будівництва і архітектури
(м. Київ, Україна)

Проблеми створення зовнішніх форм дизайн-об'єктів нерозривно пов'язані з геометричним моделюванням об'єктів, що включає пошук оптимальних форм кривих ліній, які б відповідали естетичним, економічним, композиційним, геометричним, статичним та іншим вимогам. На сьогодні однією з найважливіших задач прикладної геометрії залишається задача визначення геометричної форми кривої лінії, а також законів її зміни та варіювання її формою. Саме геометрична форма може стати критерієм естетичності форми майбутнього виробу.

При дискретному геометричному моделюванні статико-геометричним методом (СГМ) форма кривих ліній залежить від зовнішнього формоутворюючого навантаження на вузли дискретно-представленої моделі та наявності додаткових вихідних умов, які, в свою чергу, можуть містити приховані чинники оперативного керування процесом формотворення. Розробка алгоритмів побудови дискретних моделей кривих ліній з урахуванням залежностей параметрів зовнішнього навантаження дозволить вирішувати задачі появи особливих точок кривих та визначення критеріїв естетичності та виразності.

Описані в роботі дослідження є продовженням раніше представлених досліджень щодо пошуку дискретних аналогів особливих точок кривих ліній в залежності від параметрів вертикального зовнішнього навантаження на вузли геометричної моделі. Представлені алгоритми дозволять управляти формою геометричних моделей кривих ліній або ліній обводів поверхонь. За рахунок цього може бути розширено список задач моделювання дискретних моделей кривих ліній, знаходження на них різних сингулярних точок, зокрема точок перегину, спрямління, зламу. Умови появи цих точок на дискретних кривих, а також ідентифікація та локалізація вузлів дискретної моделі, буде потужним інструментом для модифікації форми криволінійних об'єктів. Представлені дослідження демонструють, що при використанні (СГМ), основними

керуючими параметрами для варіювання формою моделей кривих залишаються коефіцієнти пропорційності та величини векторів зусиль, прикладених до вузлів дискретно-представленої кривої лінії.

Ключові слова: особливі точки на кривих; точка спрямління; точки нульової кривини; дискретний аналог; точки перегину; зовнішні зусилля; статико геометричний метод.

Постановка проблеми. Прикладна геометрія, зокрема інженерна та комп'ютерна графіка, активно використовує математичні та геометричні моделі кривих для проектування, моделювання та аналізу різних об'єктів. Особливі точки (точки сингулярності) на кривих лініях є ключовим аспектом, оскільки вони визначають якісні зміни у поведінці кривої, такі як зміни напрямку, перетини, самоперетини, точки повернення тощо. Розуміння та коректне оперування з такими точками є критично важливим для забезпечення гладкості, безперервності та правильної функціональності моделі.

Саме плоскі криві лінії впливають на створення складних креативних форм архітектурних об'єктів. У процесі геометричного моделювання виникають питання знаходження залежностей між формою майбутнього виробу та геометричними характеристиками, які будуть впливати на естетичні характеристики архітектурних форм. При конструюванні криволінійних поверхонь важливою задачею залишається правильність вибору та включення в каркас поверхні ліній заданої форми та положення в просторі. Сукупність заданих умов, які будуть накладатись на геометричні дискретні моделі таких ліній, суттєво впливатиме на процес побудови і появи особливих точок. Виявити умови появи особливих точок на дискретних моделях кривих ліній та порівняти з криволінійним обрисом дизайн-виробу – це і є задача геометричного моделювання.

Метою представленої роботи – є визначити умов появи особливих точок на дискретних аналогах кривих ліній при моделюванні їх статико-геометричним методом. Проаналізувати результати досліджень з точки зору використання законів розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження і появи на моделях точок перегину, нульової кривизни, точок зламу тощо.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Тема особливих точок на кривих лініях є фундаментальною як в алгебраїчній так і в диференціальній геометрії, а також в теорії сингулярностей. Для архітектурного проектування або дизайну, для аналізу складних криволінійних форм, сьогодні найчастіше використовується диференціальна геометрія та комп'ютерні методи моделювання. Особливі точки тут розуміються як місця, де певні геометричні властивості (наприклад, гладкість, кривина) змінюються або стають сингулярними. Стаття [1] демонструє дослідження авторів у галузі диференціальної геометрії та теорії сингулярностей. У роботі описуються геометричні особливості, що виникають на кривих

лініях, а саме дають математично коректні та геометрично змістовні визначення «вершин» та «точок перегину» на плоских кривих. Аналізуються моменти появи та зникнення таких точок. Але автори спираються на властивості, які зберігаються при афінних перетвореннях, а такий підхід відрізняється від евклідового простору. Знаходження точок перегину або інших особливих точок на дискретно заданих кривих залишається важливою задачею в багатьох сферах, таких як: обробка сигналів; аналіз даних; моделювання архітектурних оболонок або комп'ютерне моделювання обрисів дизайнерських виробів складних форм. Автори статті [2] демонструють роботу з нелінійними регресійними моделями. Вони використовують чіткі аналітичні формули не лише для візуального оцінювання появи точок перегину, але і для точного визначення таких точок на кривих зростання. Автори досліджують різні плоскі криві і перевіряють зміну другої похідної навколо визначеної точки. Такий підхід дуже важливий для практичного використання в задачах фізичного або біологічного тлумачення. У роботі [3] досліджуються ділянки плоского криволінійного обводу, які генерується за умови, що задано кубічний розподіл кривини. Автори аналізують умови, за яких на кривій виникають точки перегину, та визначають залежності кута нахилу дотичної. Стаття містить графіки, що демонструють приклади кривих з однією, двома або трьома точками перегину. Використання кубічного розподілу кривини дозволяє досягти певної гнучкості у формуванні кривої, що є важливим моментом в інженерній практиці, особливо при створенні гладких та естетично привабливих кривих в галузях транспортобудування або архітектури. Питання умов існування точок зламу та перегину, зокрема для параметричних кривих, розглядаються у роботі [4]. Дослідження [5] описують процес введення точок зламу в естетичні криві, що використовуються в комп'ютерному дизайні. Обговорюється проблема, як ці точки можуть бути інтегровані в дизайн, незважаючи на їх «негладкість». Автори звертають увагу на те, що наявність точок зламу може бути бажаною для створення певних естетичних ефектів у дизайні, особливо коли вони є контрольованими та передбачуваними. Саме такий ефект було використано в роботі [6] при моделюванні об'єктів дизайну СГМ. Автор для варіювання форми поверхні використовує коефіцієнти пропорційності та вектори зовнішніх зусиль, прикладених до вузлів сітки. Управління формою дискретних каркасів поверхонь пропонується проводити за рахунок використання дискретних аналогів кінцевих точок та точок сплюснення. У роботах [7-9] розглядаються задачі моделювання дискретних аналогів кривих ліній СГМ. Розглядаються питання впливу зовнішнього формоутворюючого навантаження на появу особливих точок. Доведено, що дискретний аналог точки спрямління, коли кривина в точці дорівнюватиме нулю, можна отримати за допомогою графіка розподілу зусиль між вузлами. Основною умовою при моделюванні в такому випадку буде дотикання графіку зусиль до координатної осі і відсутність перетину з нею. Автори

звертають увагу на те, що залишається питання визначення форми кривої поблизу особливих точок.

Проведений ґрунтовний аналіз літературних джерел переконливо засвідчує актуальність обраної теми дослідження. Широке коло джерел, що охоплюють як фундаментальні теоретичні аспекти, так і новітні прикладні розробки, підкреслює не лише наукову значущість проблеми, а й значний інтерес до її вирішення з боку дослідників у різноманітних галузях. Це стосується, зокрема, машинобудування, архітектури, комп'ютерної графіки. Очікується, що результати цього дослідження стануть вагомим внеском у задачі знаходження особливих точок плоских кривих.

Формулювання цілей статті. Розробити алгоритми розв'язання задач формоутворення дискретних аналогів кривих ліній, які матимуть особливі точки. Визначити умови появи точок перегину та спрямління на дискретних аналогах кривих ліній, отриманих під впливом не лише вертикального формоутворюючого навантаження, прикладеного до кожного з вузлів.

Основна частина. При моделюванні дискретних аналогів кривих ліній можна отримати й дискретні аналоги особливих точок. Причому слід зазначити, що при використанні СГМ появу особливих точок можна спрогнозувати за рахунок використання різних типів розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження.

1. При параболічному розподілі зовнішнього формоутворюючого навантаження можна отримати дискретні аналоги параболічних кривих, які взагалі не будуть мати особливі точки.

2. Дискретний аналог точки спрямління, коли кривина в точці дорівнює нулю, буде виникати на кривій, якщо зусилля у вузлі дискретно представленої кривої (ДПК) буде дорівнювати нулю. Графік розподілу зовнішнього навантаження між вузлами буде описуватись параболічною функцією. Але існує одна умова, графік розподілу зовнішнього навантаження не повинен перетинати вісь O_i , він може лише дотикатись до неї. У такому випадку гілки кривої до і після точки спрямління матимуть однаковий знак кривини і розмішуватимуться з одного боку від дотичної.

3. Точки перегину будуть з'являтися у тому випадку, коли графік розподілу зовнішнього навантаження між вузлами буде перетинати вісь O_i . Але умова щодо нульового значення зовнішнього навантаження у вузлі дискретно представленої кривої зберігається.

4. При довільній функції параметрів розподілу зовнішнього навантаження точці перегину або спрямління буде відповідати вузол дискретно представленої кривої, до якого прикладене нульове зусилля. У такій ситуації три суміжні вузли, середнім з яких є вузол з нульовим значенням зусилля, належатимуть одній прямій.

5. Якщо маємо значення зовнішнього навантаження у вузлі рівним нулю, а саме навантаження не належить єдиній функції розподілу зусиль між вузлами, тоді дискретно представлена крива лінія буде моделлю

складеної кривої, частини якої стикуються у точці спрямління або перегину з першим порядком гладкості.

6. Якщо функція розподілу зовнішнього навантаження має розрив, а зусилля в тоці розриву не дорівнює нулю, тоді утворюється дискретний аналог точки зламу кривої.

Підводячи підсумки виконаних досліджень слід зазначити, що в процесі моделювання дискретних аналогів кривих ліній виникає супутня задача визначення форми кривої поблизу особливих точок. Розглянемо приклади.

Приклад 1 (рис. 1). Задано координати трьох вузлів ламаної A , B , C , так що $A(x_A=0; y_A=2)$, $B(x_B=8; y_B=3)$ і $C(x_C=3; y_C=1)$. Необхідно побудувати ДПК, під дією рівномірно розподіленого навантаження при умові, що у вузлі C зусилля дорівнюватиме нулю $P_C=0$. Як було описано вище, така умова передбачає появу дискретного аналогу точки спрямління у вузлі C . Вирішуючи задачу СГМ складаємо система рівнянь рівноваги вузлів, яка матиме:

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 + kP + 2 &= 0; & y_4 - 2y_5 + y_6 + kP &= 0; \\ y_1 - 2y_2 + kP + 1 &= 0; & y_5 - 2y_6 + y_7 + kP &= 0; \\ y_2 - y_4 + 2 &= 0; & & \\ -2y_4 + y_5 + kP + 1 &= 0; & y_7 - 2y_7 + kP + 3 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

За результатами розв'язання системи (1), наведеними в таблиці 1, на рис. 1 побудовано точковий каркас ДПК. Сірим кольором в таблиці позначено точку з нульовим значенням кривини.

Крива є складеною з двох спряжених частин. Це є результатом того, що функція зовнішнього навантаження на вузли ДПК має розрив.

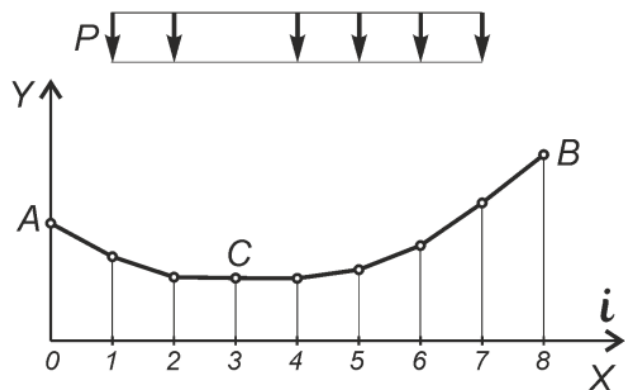


Рис. 1. Точковий каркас ДПК з точкою спрямління і нульовим зусиллям в ній

Таблиця 1

Аплікати вузлів точкового каркаса ДПК, що має точку спрямління

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
kP	-0,24444	0,0000	-0,24444						
y_i	2,000	1,42222	1,08889	1,0000	0,91111	1,06667	1,46667	2,11111	3,00000

Приклад 2 (рис. 2). Задано координати чотирьох вузлів A, B, C, D ДПК. За вихідні умови приймаємо точки дискретно представленої кривої з одиничним кроком вздовж осі Ox , з координатами: $A(x_A=0; y_A=2)$, $B(x_B=3; y_B=5)$ і $C(x_C=5; y_C=4)$, $D(x_D=8; y_D=3)$. Необхідно побудувати дискретний каркас кривої з точкою зламу у вузлі C . На рис. 2 показано лінійний графік розподілу зусиль між вузлами, коли $P_i = \text{const}$. Таке навантаження діє на кожний вузол, крім вузла C . На вузол C діє зовнішнє зусилля P_5 з протилежним знаком. Система рівнянь рівноваги вузлів складається окремо для двох інтервалів ДПК, а саме до і після точки C .

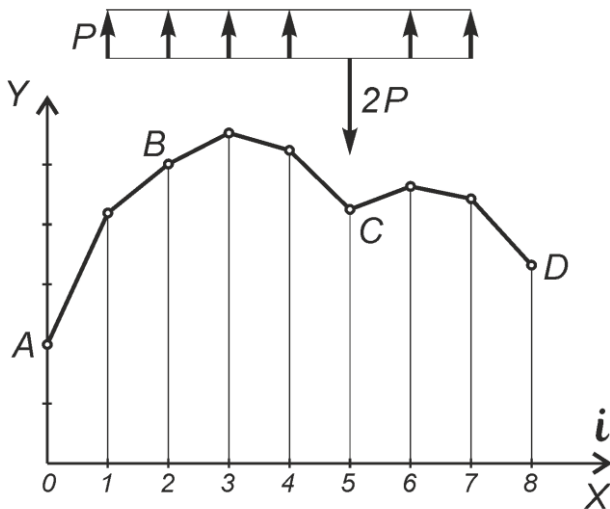


Рис. 2 Точковий каркас ДПК з точкою зламу у вузлі C

Для першої частини ДПК на інтервалі від 0 до 5 вузла система може мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} -2y_1 + 2 + kP + 5 &= 0; \\ y_1 - 10 + y_3 + kP &= 0; \\ 5 - 2y_3 + y_4 + kP &= 0; \\ y_3 - 2y_4 + 4 + kP &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При розв'язанні системи (2) з урахуванням $P_i = \text{const}$, отримуємо значення невідомих координат вузлів на інтервалі 0–5 та величину зусилля:

$$y_1 = 3.8667; y_3 = 5.4000; y_4 = 5.0667; kP = 0.73333.$$

На наступному етапі складаємо та розв'язуємо систему рівнянь рівноваги вузлів для другої частини кривої (на інтервалі 5–8):

$$\begin{aligned} y_4 - 2y_5 + y_6 + kP_5 &= 0; \\ y_5 - 2y_6 + y_7 + kP &= 0; \\ y_6 - 2y_7 + y_8 + kP &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо координати $y_6 = 4.4000$; $y_7 = 4.0666$. За відомими координатами вузлів, суміжних з вузлом C за СГМ можна визначити величину зовнішнього формоутворюючого навантаження у цьому вузлі: $kP_5 = y_4 + y_6 - 2y_5 = 1.4667$.

Розглянемо зворотну задачу і продемонструємо, що при заданій величині зовнішнього зусилля $kP_5 = 1.4667$ ум. одиниць та невідомій ординаті вузла C отримаємо той самий результат. Для цього складаємо і розв'язуємо систему рівнянь рівноваги всіх вузлів ДПК. Результати

розв'язання цієї системи занесено у табл. 2. За отриманими результатами на рис. 2 побудовано точковий каркас ДПК з точкою зламу у заданому вузлі.

Таблиця 2

Координати вузлів точкового каркаса ДПК із точкою зламу у вузлі С

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
xi	0,000	1,000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000	7,0000	8,0000
yi	2,000	3,8666	4,9999	5,3999	5,0667	4,0000	4,4001	4,0669	3,000

Аналіз результатів показав, що вузли ДПК належать двом різним параболам, відповідно на інтервалах $i = 0-5$ і $i' = 5-8$, а точка С є точкою зламу кривої, і ще є точкою стикування (перетину) цих парабол.

У загальному випадку графік розподілу зусиль між вузлами ДПК може враховувати зміну обох параметрів векторів зусиль (величину і напрямок зусиль), але розглянуті умови появи особливих точок не змінюються і залишаються такими саме.

Представлені приклади враховували лише параболічні криві, коли навантаження залишалось вертикальним і розподілялося за параболічним законом. Приклади довели, що якщо використовується параболічний закон розподілу зовнішнього навантаження то і отримана крива буде параболічною, яка матиме порядок вищий, ніж крива розподілу зовнішніх зусиль.

Якщо обрати закон розподілу векторів зовнішнього навантаження довільним і так, щоб їх величини залежали від номерів вузлів ДПК (задати графік зміни самого зусилля в залежності від номера вузла), та окремо задати залежність зміни кута нахилу векторів зусиль від номерів вузлів, отримаємо непараболічні криві.

Приклад 3 (рис. 3).

Необхідно побудувати точковий каркас ДПК при $i = 9$, коли напрямок зусилля у вузлах залежить від номерів вузлів i , у кожному вузлі зусилля змінюють напрямок. Окремо задано графік розподілу величин зовнішніх зусиль (рис. 3) по параболі:

$$P_i = a_0 - a_1 i + a_2 i^2. \quad (3)$$

Необхідно побудувати ДПК так, щоб вона пройшла через вузли: $A(x_A = -3; y_A = 8)$, $B(x_B = 6; y_B = 1)$ $D(x_D = 6; y_D = 1)$.

Вузол

$C(x_C = 2; y_C = 4)$ є точкою перегину ДПК.

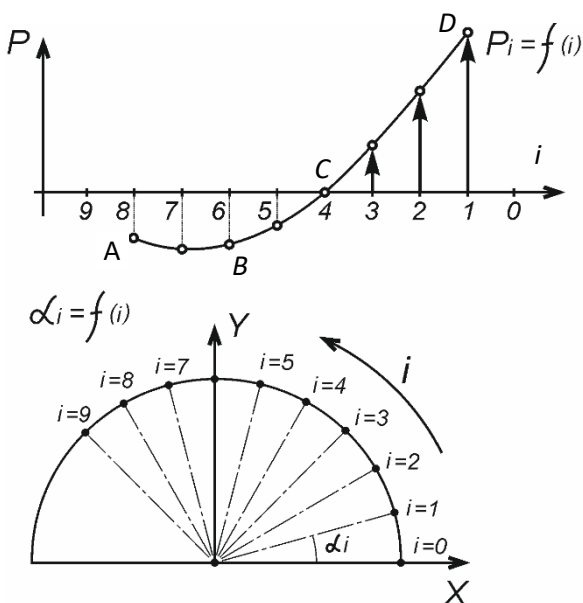


Рис. 3. Задано напрямок та графік розподілу величин зовнішніх зусиль

З урахуванням величини зусилля у вузлі $i = 4$ ($kP_4 = 0$) всі інші зусилля kP_i можна виразити через два параметри (P_2 і P_8) параболи (3).

$$\text{Тоді, } a_2 = \frac{2P_2 + P_8}{24}; a_1 = -\frac{4P_2 + P_8}{4}; a_0 = \frac{8P_2 + P_8}{3}, \quad \text{отримаємо}$$

рівняння розподілу зовнішніх зусиль по параболі :

$$P_i = \frac{64P_2 + 8P_8 - 6i(4P_2 + P_8) + i^2(2P_2 + P_8)}{24} \quad (4)$$

Маємо два невідомих P_2 і P_8 зусилля, через які визначаємо всі інші зусилля у вузлах ДПК. Кутовий крок зусиль задаємо 15° .

Складаємо та розв'язуємо дві системи рівнянь рівноваги зусиль. Спочатку знаходимо абсциси вузлів ДПК:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + P_2 \cos 30^\circ &= 0; \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + 0.4166 \cdot P_2 \cos 45^\circ - 0.04167P_8 \cos 45^\circ &= 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + P_4 \cos 60^\circ &= 0; \\ x_4 - 2x_5 + x_6 + 0.1250P_8 \cos 75^\circ - 0.25P_2 \cos 75^\circ &= 0; \\ x_5 - 2x_6 + x_7 &= 0; \\ x_6 - 2x_7 + x_8 + 0.6250P_8 \cos 105^\circ - 0.25P_2 \cos 105^\circ &= 0; \\ x_7 - 2x_8 + x_9 + P_8 \cos 120^\circ &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

Потім визначаємо ординати вузлів ДПК:

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 + y_3 + P_2 \sin 30^\circ &= 0; \\ y_2 - 2y_3 + y_4 + 0.4166 \cdot P_2 \sin 45^\circ - 0.04167P_8 \sin 45^\circ &= 0 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 + P_4 \sin 60^\circ &= 0; \\ y_4 - 2y_5 + y_6 + 0.1250P_8 \sin 75^\circ - 0.25P_2 \sin 75^\circ &= 0; \\ y_5 - 2y_6 + y_7 + 0.3333P_8 \sin 90^\circ - 0.3333P_2 \sin 90^\circ &= 0; \\ y_6 - 2y_7 + y_8 + 0.6250P_8 \sin 105^\circ - 0.250P_2 \sin 105^\circ &= 0; \\ y_7 - 2y_8 + y_9 + P_8 \sin 120^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

За результатами розв'язання систем рівнянь рівноваги вузлів (5), (6), наведеними в табл. 3, на рис. 5 побудовано точковий каркас непараболічної ДПК з точкою перегину в заданому вузлі.

Отримані значення $P_2 = -0.6684$, $P_8 = 0.1667$.

Виконані експериментальні дослідження дозволяють при конструюванні дискретно представлені кривої задавати вузол, який відповідає точці перегину або спрямління неперервного аналогу дискретно визначеної кривої.

Таблиця 3

Аплікати вузлів точкового каркаса непараболічної ДПК

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	6,000	4,2135	3,0058	2,0000	0,9942	-0,0630	-1,1148	-2,0991	-3,0000
y_i	1,000	1,7099	2,7541	4,000	5,2459	6,3103	7,0964	7,6204	8,000

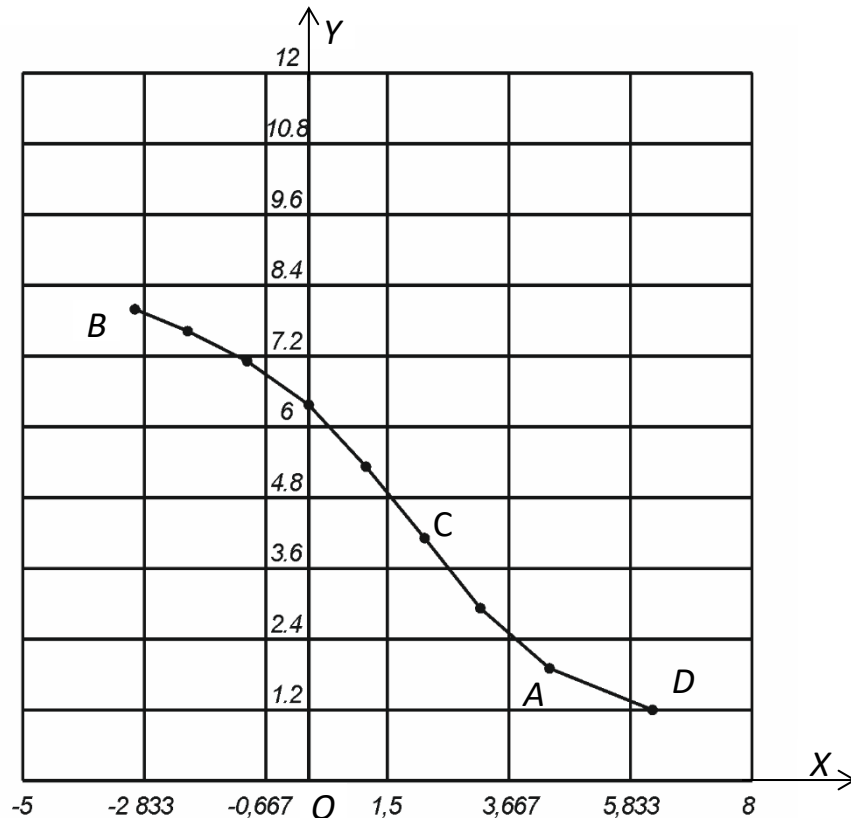


Рис. 5. Точковий каркас непараболічної ДПК з точкою перегину

Звісно, подібні задачі можна розв'язувати, і тоді, крива представлена в неперервному вигляді. Однак, якщо працювати з кривими лініями, заданими в дискретному вигляді, можна задавати особливі точки і в тих випадках, коли аналітичні рівняння кривої отримати неможливо.

Висновки. Представлені приклади та алгоритми побудови дискретних аналогів кривих ліній із заданими на них дискретними аналогами особливих точок розширюють можливості використання статико геометричного методу для архітектурного проектування і дизайн проектів. Особливі точки на дискретно представлених кривих, такі як точки спрямління, перегину або точки зламу можна отримати за рахунок варіювання параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження прикладених до вузлів зусиль.

Література

1. Bruce, J. W., Fernandes, M. A. C., & Tari, F. On vertices and inflections of singular plane curves /arXiv Is Hiring a DevOps Engineer. 2025. pp. 1-22. arXiv:2505.21601v1 [math.DG]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2505.21601v1.pdf>
2. Ayele Taye Goshu, Purnachandra Rao Koya. Derivation of Inflection Points of Nonlinear Regression Curves - Implications to Statistics. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 2013. Vol. 2, No. 6, pp. 195-202. URL: <https://www.sciencepublishinggroup.com/article/10.11648/j.ajtas.20130206.25>
3. Устенко С. А., Діданов С. В, Агарков О. Ю. Дослідження кривих ліній, заданих кубічним розподілом кривини. *Наука та прогрес транспорту*. 2014. № 2. С. 164-172. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vdnuzt_2014_2_18.
4. Manocha, D.; Canny, J.F. *Detecting cusps and inflection points in curves*. Comput. Aided Geom. Des. 1992, 9, 1–24. [CrossRef].
5. Kenjiro T. Miura , Sho Suzuki , Shin Usuki , R. U. Gobithaasan. τ -curve: introduction of cusps to aesthetic curves. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2020. Volume 7, Issue 2, pp. 155–164. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa014https://academic.oup.com/jcde/article/7/2/155/5815389>.
6. Ботвіновська С. І. Моделювання криволінійних поверхонь об'єктів дизайну та управління їх формою. *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. 2017. Вип. 47. С. 451-457. Режим доступу: <http://nbuv.gov.ua/UJRN/>
7. Ботвіновська С.І. Точки перегину і спрямління на дискретно заданих кривих. *Містобудування та територіальне планування : міжвідомчий науково-технічний збірник*. Київ: КНУБА, 2016. № 62. С. 90-96. Режим доступу: <https://surl.li/ovlphr>.
8. Ботвіновська С.І. Моделювання дискретних каркасів об'єктів дизайну шляхом завдання на поверхні особливих точок. *Сучасні проблеми геометричного моделювання: тези доповідей 19 міжнародної науково-практичної конференції, 06-09 червня 2017 р. Мелітополь: МДПУ, 2017. Т. 1. С. 7.*
9. Ботвіновська С.І., Золотова А.В., Колган А.В. Випадки появи особливих точок на дискретно представлених кривих. *Обухівські читання: XVIII Міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, 28 березня 2024 року: тези конференції*. Київ: Національний університет біоресурсів і природокористування України, 2024. С. 40-42.

GEOMETRIC CONDITIONS FOR THE APPEARANCE OF DISCRETE ANALOGS OF SINGULAR POINTS ON DISCRETELY REPRESENTED CURVES

Svitlana Botvinovska, Alla Zolotova, Hanna Sulimenko

The problems of creating the external forms of design objects are inextricably linked to the geometric modeling of objects, which includes the search for optimal forms of curved lines that would meet aesthetic, economic, compositional, geometric, static, and other requirements. Today, one of the most important tasks of applied geometry is to determine the geometric shape of a curved line, as well as the laws of its change and variation in shape. It is the geometric shape that can become a criterion for the aesthetics of the shape of a future product.

In discrete geometric modeling by the static-geometric method (SGM), the shape of curved lines depends on the external shaping load on the nodes of the discretely represented model and the presence of additional initial conditions, which, in turn, may contain hidden factors of operational control of the shaping process. The development of algorithms for constructing discrete models of curved lines, taking into account the peculiarities of the dependencies of the external load parameters, will allow solving the problems of the appearance of special points of curves and determining the criteria of aesthetics and expressiveness.

The research described in this paper is a continuation of previously presented studies on the search for discrete analogs of special points of curved lines depending on the parameters of the vertical external load on the nodes of the geometric model. The presented algorithms will allow us to control the shape of geometric models of curved lines or lines of surface contours. Due to this, the list of tasks for modeling discrete models of curved lines, finding various singular points on them, in particular, points of bending, straightening, and breaking, can be expanded. The conditions for the appearance of these points on discrete curves, as well as the identification and localization of discrete model nodes, will be a powerful tool for modifying the shape of curved objects. The presented studies demonstrate that when using (SGM), the main control parameters for varying the shape of curve models are the proportionality coefficient and the magnitude of the force vectors applied to the nodes of a discretely represented curved line.

Key words: singular points on curves; point of straightening; points of zero curvature; discrete analog; Inflection point on the curve; external forces; static geometric method.

Reference

1. Bruce, J. W., Fernandes, M. A. C., & Tari, F. (2025). On vertices and inflections of singular plane curves /*arXiv Is Hiring a DevOps Engineer*. Pp. 1-22. arXiv: 2505.21601v1 [math.DG] 27 May 2025. Retrieved from: <https://arxiv.org/pdf/2505.21601v1.pdf>
2. Ayele Taye Goshu, Purnachandra Rao Koya (2013) Derivation of Inflection Points of Nonlinear Regression Curves - Implications to Statistics. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, Vol. 2, No. 6, 195-202. Retrieved from: <https://www.sciencepublishinggroup.com/article/10.11648/j.ajtas.20130206.25>
3. Ustenko S. A., Didanov S. V., Agarkov O. Yu. (2014) Study of curved lines given by the cubic distribution of curvature. *Nauka ta prohres transportu*. Vol. 2. 164-172. Retrieved from: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vdnuzt_2014_2_18. [in Ukrainian]
4. Manocha, D.; Canny, J.F. (1992) Detecting cusps and inflection points in curves. *Comput. Aided Geom. Des.* 9, 1–24. [CrossRef].
5. Kenjiro T. Miura, Sho Suzuki, Shin Usuki, R. U. (2020) Gobithaasan. τ -curve: introduction of cusps to aesthetic curves. *Journal of Computational Design and Engineering*, Volume 7, Issue 2, pp. 155–164, <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa014><https://academic.oup.com/jcde/article/7/2/155/5815389>.
6. Botvinovska S. (2017) Modeling of curved surfaces of design objects and management of their shape. *Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia*. Issue 47. 451-457. Retrieved from: <http://nbuv.gov.ua/UJRN/>. [in Ukrainian]
7. Botvinovska S.I. (2016) Points of inflection and straightening on discretely defined curves. *Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia : mizhvidomchyi naukovo-tekhnicnyi zbirnyk*. Kyiv: KNUBA. 62. 90-96. Retrieved from: <https://surl.li/ovlphr>. [in Ukrainian]
8. Botvinovska S.I. (2017) Modeling of discrete frames of design objects by setting special points on the surface. *Suchasni problemy heometrychnoho modeliuвання: tezy dopovidei 19 mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii, 06-09 chervnia 2017*. Melitopol: MDPU. Vol. 1. p. 7. [in Ukrainian].
9. Botvinovskaya S.I., Zolotova A.V., Kolgan A.V. (2024) Cases of appearance of special points on discretely represented curves. *Obukhivski chytannia: XVIII Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiia, m. Kyiv, 28 bereznia 2024 roku: tezy konferentsii*. Kyiv: Natsionalnyi universytet bioresursiv i pryrodokorystuvannia Ukrainy, 40-42. [in Ukrainian]