УДК 514.74

ЗГИНАННЯ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ У ГВИНТОВИЙ КОНОЇД

Несвідомін А.В., канд. техн. наук,
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9227-4652
Пилипака С.Ф., д-р. техн. наук,
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615
Несвідомін В.М, д-р. техн. наук,
vnesvidomin@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1495-1718
Воліна Т.М., канд. техн. наук,
volina@nubip.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8610-2208
Бабка В.М., канд. техн. наук,
babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285
Грищенко І.Ю., канд. техн. наук,
hryshchenko@nubip.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1000-9805
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

У статті досліджено процес згинання поверхні обертання (катеноїда) у гвинтовий коноїд, що є важливим для інженерної практики, особливо при виготовленні шнеків. Гвинтовий коноїд, також відомий як прямий закритий гелікоїд, утворюється гвинтовим рухом відрізка навколо осі, причому цей відрізок під час руху перетинає вісь під прямим кутом. Така поверхня не може бути зігнута на площину, однак поступовим зменшенням кроку можна перетворити у відому поверхню обертання – катеноїд. При такій деформації не змінюються довжини ліній і площа витка в цілому, тобто деформація відбувається подібно до розгортних поверхонь. Така деформація базується на теорії згинань поверхонь. Згідно із нею всяку гвинтову поверхню можна зігнути на поверхню обертання і навпаки. Згинання нерозгортної поверхні гвинтового коноїда на катеноїд є класичним прикладом диференціальної геометрії.

Згідно диференціальної геометрії, будь-яку поверхню обертання можна зігнути у гвинтову. Поверхня відноситься до двох сімей координатних ліній, і точка на поверхні задається значеннями двох криволінійних координат. Якщо меридіан поверхні обертання заданий явним рівнянням, то вона опишеться параметричними рівняннями. Такий підхід дає можливість знайти наближену плоску заготовку для виготовлення витка шнека.

Запропоновано апроксимувати отриманий катеноїд зрізаним конусом. Розгортка зрізаного конуса і буде наближеною розгорткою витка шнека. В цьому полягають особливості знаходження наближеної розгортки, яка в інженерній практиці розраховується за іншими формулами. В статті отримано параметричні рівняння, які описують *однопараметричну множину проміжних поверхонь при згинанні гвинтового коноїда завдяки поступовому зменшенню кроку поверхні до нуля.*

Ключові слова: крок поверхні, катеноїд, зрізаний конус, апроксимація, наближена розгортка.

Постановка проблеми. Питанню конструювання гвинтових поверхонь присвячено багато наукових праць. Технологія виготовлення гвинтових поверхонь ускладняється тим, що вони є нерозгортними (за винятком розгортного гелікоїда). Найбільш поширеною гвинтовою поверхнею є гвинтовий коноїд, відомий в інженерній практиці під назвою шнек. Однією із технологій його виготовлення є деформація плоскої заготовки у виток потрібних розмірів. При такій деформації відбувається розтягування плоскої заготовки по внутрішній периферії витка і стиснення по зовнішній. Це призводить до значних пластичних деформацій і, як наслідок, супроводжується опором формуванню заготовки у готовий виріб. Для мінімізації опору потрібно мати плоску заготовку із розмірами, які забезпечать найменший опір і, відповідно, енергоємність процесу.

Дослідження в цьому напрямку є важливими, оскільки зменшення енергоємності процесу призводить не тільки до зменшення енергозатрат, а і до підвищення точності готового виробу. Для знаходження наближеної розгортки витка гвинтового коноїда існує довідкова література. Наведені в ній розрахункові формули отримані із припущення, що довжини периферійних зовнішньої і внутрішньої гвинтових ліній рівні довжинам відповідних дуг кіл на плоскій заготовці. Однак ці формули не відображають суті процесу поступового згинання. Таким чином, дослідження із врахуванням поступового згинання плоскої заготовки у виток гвинтового коноїда є важливими для практики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У праці [1] досліджується шнековий електротермомеханічний перетворювач, здатний здійснювати багатофізичний вплив на технологічне середовище через розподіл різних показників на поверхні ротора. У роботі [2] досліджується математичне моделювання процесу екструзії олії з попереднім подрібненням сировини у двошнековому екструдері. У статті [3] досліджується шнековий електромеханічний гідролізер для переробки побічних продуктів птахівництва. Автори розробили математичну модель для аналізу теплових та електромагнітних процесів у гідролізері. У праці [4] розроблено методику розрахунку максимального крутного моменту при заклинюванні шнека гвинтового конвеєра. Авторами використана нейронна мережа, яка була навчена на основі чисельної інтеграції нелінійних диференціальних рівнянь. У роботі [5] досліджено нові конструкції шарнірно-з’єднаних робочих органів гвинтових конвеєрів та обґрунтовано їх оптимальні параметри для забезпечення транспортування сипучих матеріалів по криволінійних маршрутах. Авторами отримано аналітичні залежності для умов жорсткості окремої секції з шарнірним з’єднанням залежно від навантаження та конструктивних параметрів конвеєра.

Запропонована в цих дослідженнях спрощена математична модель базується на низці припущень, які не враховують можливі варіації форми робочого органу, що обмежує загальну універсальність рішення. Одним зі способів подолання цього обмеження є створення більш адаптивної математичної моделі, здатної враховувати різноманітні конфігурації робочого органу та їхній вплив на відповідний технологічний процес.

У статті [6] розглядається конструкція робочого органу гвинтової секції комбінованого ґрунтообробного знаряддя, зокрема, обґрунтовуються його основні параметри та функціональні характеристики. Автори розглядають торс-гелікоїд з горизонтальною віссю обертання. У роботі [7] аналізується рух частинки ґрунту по поверхні розгортного гелікоїда з горизонтальною віссю обертання та заданим кутом атаки. Авторами розроблені математичні моделі та знайдені траєкторії руху частинок.

Широке застосування гвинтового коноїда в ролі робочої поверхні в різних механізмах і машинах зумовлює пошук вдосконалених технологій його виготовлення. Для цього потрібно мати наближену розгортку, яка б найбільш точно відповідала процесу виготовлення. Існуючі розрахункові формули не пов'язані із процесом виготовлення витка поверхні. У статті [8] побудова розгортки витка поверхні розглядається з точки зору її згинання у готовий виріб. Однак у ній йдеться про знаходження розгортки розгортного гелікоїда, для якого розгортка є не наближеною, а точною. Аналогічний підхід доцільно застосувати для знаходження наближеної розгортки витка гвинтового коноїда.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є математичний опис поступового згинання поверхні обертання, якою є катеноїд, у виток гвинтового коноїда, що дасть можливість розробити рекомендації щодо знаходження наближеної розгортки витка.

Основна частина. Дослідження базуються на розділі диференціальної геометрії стосовно теорії згинання поверхонь. Поверхня відноситься до двох сімей координатних ліній. Точка на поверхні задається значеннями двох криволінійних координат подібно до площини, де ці координати (x і y) є прямолінійними. Якщо криволінійні координати поверхні зв'язати певною залежністю, то на поверхні буде описана крива. З точки зору згинання потрібно знайти такі аналітичні перетворення поверхні, щоб довжина лінії на її поверхні не змінювалася. Згідно теореми диференціальної геометрії всяку поверхню обертання можна зігнути у гвинтову. Якщо меридіан поверхні обертання заданий явним рівнянням $z=f(\rho)$, то вона опишеться наступними параметричними рівняннями:

$$X=\rho\cos\alpha;\ Y=\rho\sin\alpha;\ Z=f\left(\rho\right), \tag{1}$$

де α і ρ – криволінійні координати поверхні, причому ρ – відстань від вертикальної осі обертання до точки на поверхні, α – кутова координата.

Довжину лінії на поверхні можна знайти за допомогою лінійного елемента поверхні, який ще носить назву першої квадратичної форми поверхні:

$$dS^2 = Ed\alpha^2 + 2Fd\alpha d\rho + Gd\rho^2, \quad (2)$$

де коефіцієнти *E, F, G* знаходять через частинні похідні рівнянь (1):

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right)^2;$$
$$F = \frac{\partial X}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial X}{\partial \rho} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial Y}{\partial \rho} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial Z}{\partial \rho}; \quad (3)$$
$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)^2.$$

Для поверхні обертання (1) перша квадратична форма (2) приймає вигляд:

$$dS^2 = \left[1 + f'^2(\rho)\right]d\rho^2 + \rho^2 d\alpha^2. \quad (4)$$

Середній коефіцієнт *F=0*, що свідчить про те, що сітка координатних ліній, якими є паралелі і меридіани, прямокутна. Якщо задати залежність *α=α(ρ)* або *ρ=ρ(α)*, то на поверхні (1) цим залежностям відповідатимуть певні лінії, довжину яких можна знайти із виразу (4). Але в процесі згинання поверхні довжини ліній не змінюються. Це означає, що нам потрібно знайти для поверхні (1) інші параметричні рівняння, згідно яких поверхня має трансформуватися у гвинтову і при цьому перша квадратична форма (4) не повинна змінюватися.

Гвинтову поверхню, в яку буде згинатися поверхня обертання (1), запишемо у вигляді:

$$X = w\cos\alpha;\ Y = w\sin\alpha;\ Z = \varphi + h\alpha, \quad (5)$$

де α і *w* – незалежні змінні поверхні, *h* – гвинтовий параметр (стала величина), *φ=φ(w)* – осьовий переріз гвинтової поверхні (невідома функція, яку потрібно розшукати).

При *h=0* гвинтова поверхня (5) перетворюється у поверхню обертання. Потрібно знайти таку залежність *φ=φ(w)*, щоб при *h=0* вона описувала таку ж криву (меридіан), як і залежність *f=f(ρ)*.

Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (5) і її лінійний елемент можуть бути знайдені за формулами (3) і (2):

$$E = 1 + \varphi'^2;\ F = h\varphi';\ G = w^2 + h^2; \quad (6)$$

$$dS^2 = (1 + \varphi'^2)dw^2 + 2h\varphi' dw d\alpha + (w^2 + h^2)d\alpha^2. \quad (7)$$

Із (7) видно, що сітка координатних ліній не ортогональна, оскільки *F≠0*. Згідно з теоремою диференціальної геометрії при згинанні гвинтової поверхні в поверхню обертання гвинтові лінії накладаються на паралелі, а їх ортогональні траєкторії – на меридіани. Отже, необхідно перейти до прямокутної сітки координатних ліній. Однією сім'єю цих ліній є сім'я гвинтових ліній, а другою – сім'я ортогональних траєкторій. Для знаходження цієї сім'ї ліній, перпендикулярних гвинтовим, потрібно розв'язати наступне диференціальне рівняння:

$$Fdw + Gd\alpha = 0. \tag{8}$$

Підстановка в рівняння (8) значень коефіцієнтів F і G із (6) із урахуванням того, що змінними є w і α дає результат:

$$\alpha = -h\int \frac{\varphi'}{w^2 + h^2} dw + t, \tag{9}$$

де t – постійна інтегрування.

Постійній інтегрування t можна надавати різних числових значень, яким відповідатимуть відповідні лінії на поверхні і які будуть перпендикулярні до сім'ї гвинтових ліній. Отже, сталу t можна прийняти за нову незалежну змінну. В такому випадку диференціал $d\alpha$ запишеться:

$$d\alpha = dt - \frac{h\varphi'}{w^2 + h^2} dw. \tag{10}$$

Підстановка значення $d\alpha$ із (10) у вираз лінійного елемента (7) після спрощень дає результат:

$$dS^2 = \left(1 + \frac{w^2 \varphi'^2}{w^2 + h^2}\right) dw^2 + (w^2 + h^2) dt^2. \tag{11}$$

Після такої заміни середній коефіцієнт відсутній, тобто сітка координатних ліній є ортогональною. Подальше завдання полягає в приведенні лінійного елемента (11) до вигляду (4), тобто в лінійному елементі (11) потрібно перейти від змінних w і t до змінних α і ρ таким чином, щоб він залишився незмінним. Для цього прирівнюються спочатку їх праві частини при диференціалах dt^2 і $d\alpha^2$: $\rho^2 = w^2 + h^2$. Результатом є наступні вирази:

$$\rho = \sqrt{w^2 + h^2};\ d\rho = \frac{wdw}{\sqrt{w^2 + h^2}}. \tag{12}$$

Тепер прирівнюються ліві частини з урахуванням значення диференціала $d\rho$ із (12):

$$\left(1 + f'^2\right) \frac{w^2 dw^2}{w^2 + h^2} = \left(1 + \frac{w^2 \varphi'^2}{w^2 + h^2}\right) dw^2. \tag{13}$$

Розв'язок (13) відносно φ' має вигляд:

$$\varphi' = \frac{\sqrt{w^2 f'^2 - h^2}}{w}, \tag{14}$$

де φ' – розшукувана залежність кривої осьового перерізу гвинтової поверхні, f' – похідна явного рівняння кривої (рівняння меридіана заданої поверхні обертання).

Для подальшої реалізації запропонованого підходу потрібно розглянути конкретний приклад, тобто взяти за меридіан поверхні обертання конкретну криву. Для цього візьмемо відомий приклад катеноїда, оскільки для нього відомий кінцевий результат гвинтової поверхні, в яку він згинається. Для катеноїда рівнянням меридіана є ланцюгова лінія. Її явне рівняння і похідна мають наступний вигляд:

$$f = a\mathrm{Arccosh}\left(\frac{\rho}{a}\right);\ f' = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}. \tag{15}$$

В похідній (15) необхідно перейти до змінної w згідно (12):

$$f' = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{w^2 + h^2 - a^2}}. \tag{16}$$

Підстановка (16) у (14) дає змогу записати:

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{\sqrt{w^2 f'^2 - h^2}}{w} = \frac{1}{w}\sqrt{\frac{a^2 w^2}{w^2 + h^2 - a^2} - h^2}. \tag{17}$$

Необхідно повернутися в (17) до змінної ρ. Згідно (12):

$$w = \sqrt{\rho^2 - h^2};\ dw = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}}. \tag{18}$$

Підстановка виразів (18) у (17) і після спрощень та перетворень остаточно дає змогу записати:

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\rho^2}{\rho^2 - h^2}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}}. \tag{19}$$

Подібним чином можна знайти вираз для визначення кута α. Для цього підстановка (17) у (10) і після спрощень дає результат:

$$d\alpha = dt - \frac{h}{w}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\left(w^2 + h^2 - a^2\right)\left(w^2 + h^2\right)}}dw. \tag{20}$$

Необхідно перейти в (20) до змінної ρ. Підстановкою в (20) виразів (18) і після спрощень можна отримати:

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = dt - \frac{h}{\rho^2 - h^2}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{\rho^2 - a^2}}. \tag{21}$$

Отримані вирази (18), (19) і (21) підставляються у рівняння гвинтової поверхні (5), причому вирази (19) і (21) у вигляді інтегралів. Результатом є наступні рівняння:

$$X=\sqrt{\rho^2-h^2}\cos\left(t-h\int\frac{1}{\rho^2-h^2}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{\rho^2-a^2}}d\rho\right);$$

$$Y=\sqrt{\rho^2-h^2}\sin\left(t-h\int\frac{1}{\rho^2-h^2}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{\rho^2-a^2}}d\rho\right); \qquad (22)$$

$$Z=\int\frac{\rho^2}{\rho^2-h^2}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{\rho^2-a^2}}d\rho-h^2\int\frac{1}{\rho^2-h^2}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{\rho^2-a^2}}d\rho.$$

Якщо взяти частинні похідні рівнянь (22) і згідно (3) і (4) знайти першу квадратичну форму, то вона має наступний вигляд:

$$dS^2=\left[\frac{\rho^2}{\rho^2-a^2}\right]d\rho^2+\rho^2dt^2. \qquad (23)$$

Якщо у першу квадратичну форму (4) підставити вираз похідної із (15), то вона точно буде збігатися із (23) за винятком змінних α і t. Однак це несуттєво, бо позначення змінної іншим символом нічого не міняє. При $\alpha=t$ буде повна аналогія.

Підінтегральні вирази, що входять до рівнянь (22), можна проінтегрувати. Після цього і після заміни символу *«t»* на символ *«α»* рівняння (22) набувають остаточного вигляду:

$$X=\sqrt{\rho^2-h^2}\cos\left(\alpha-\mathrm{Arctg}\frac{h}{\rho}\sqrt{\frac{\rho^2-a^2}{a^2-h^2}}\right);$$

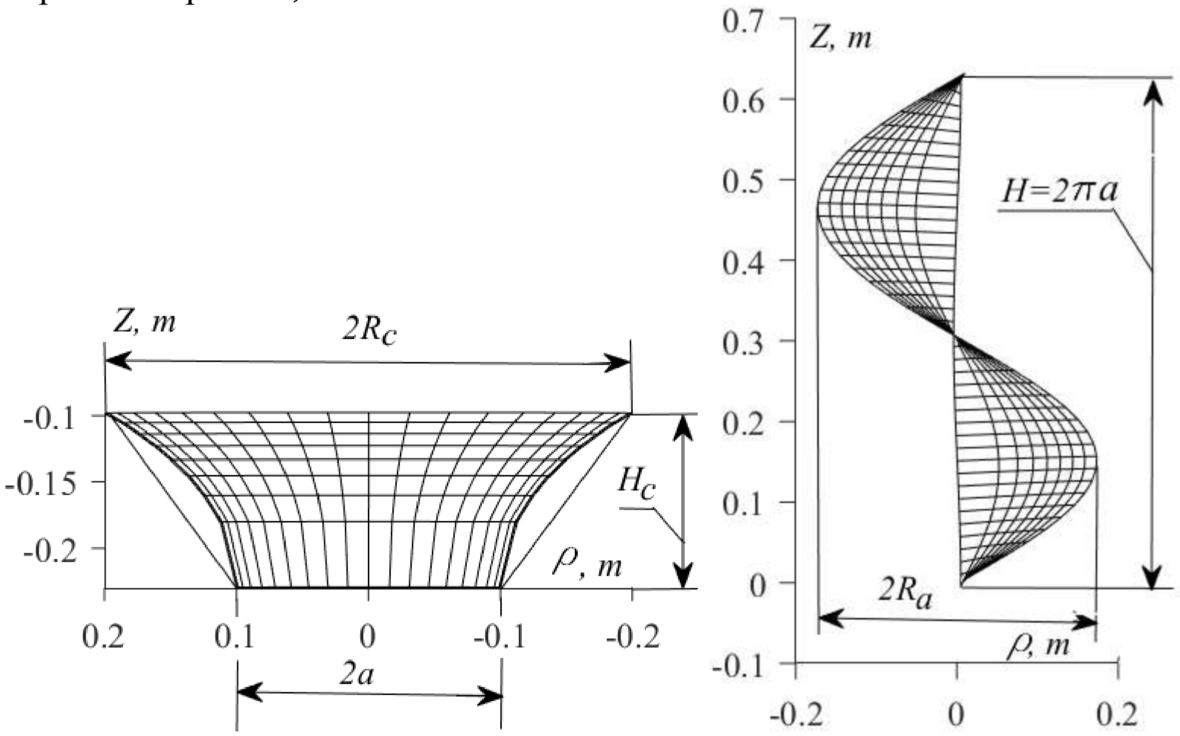
$$Y=\sqrt{\rho^2-h^2}\sin\left(\alpha-\mathrm{Arctg}\frac{h}{\rho}\sqrt{\frac{\rho^2-a^2}{a^2-h^2}}\right); \qquad (24)$$

$$Z=\sqrt{a^2-h^2}\ln\left(\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}\right)+h\alpha.$$

До першої квадратичної форми (23) не входить стала h, в той час, як вона впливає на форму поверхні. Вона є параметром згинання. При $h=0$ рівняння (24) описують поверхню обертання – катеноїд (рис. 1, *а*). Стала a є радіусом найменшої паралелі. Таким чином, змінна ρ не може бути меншою a. При побудові поверхні вона змінювалася в межах $\rho=0{,}1...0{,}2$ *м*, що видно із рис. 1, *а*.

При деформації катеноїда в коноїд паралелі перетворюються у гвинтові лінії. Ця деформація здійснюється поступовим збільшенням сталої h. При максимальному значенні $h=a$ найменша паралель радіуса a розтягується у пряму лінію – вісь гвинтового коноїда (рис. 1, *б*). Довжина цієї паралелі рівна $2\pi a$, відповідно цій величині дорівнює крок гвинтового коноїда. Для заданого максимального значення параметра ρ (в нашому випадку $\rho=0{,}2$ *м*) на катеноїді відповідатиме паралель із значенням радіуса R_c (рис. 1, *а*), а на гвинтовому коноїді – гвинтова лінія на циліндрі радіуса

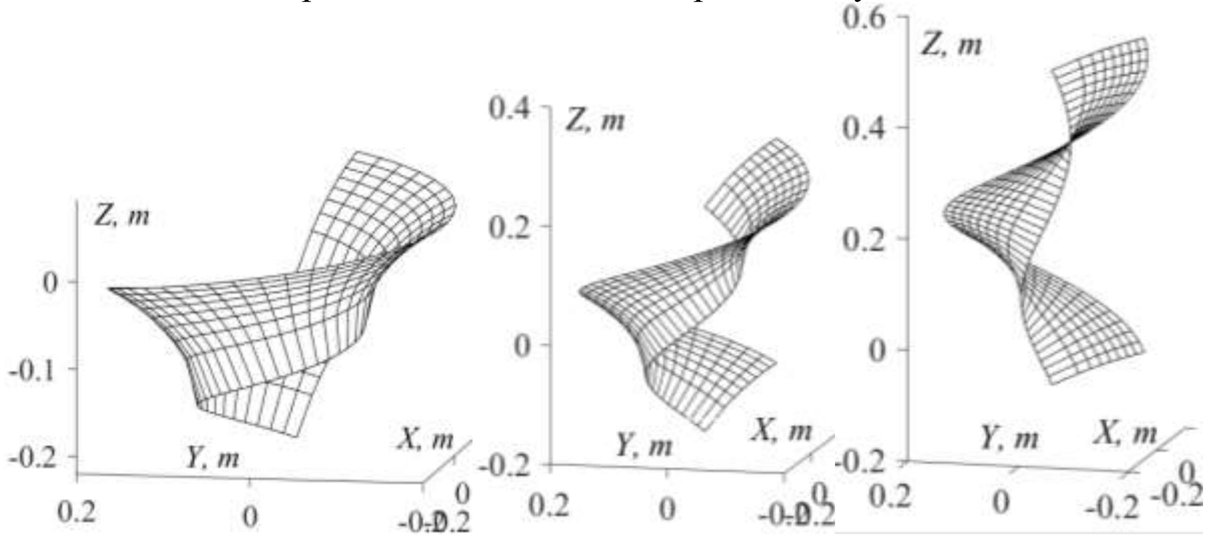
R_a (рис. 1, *б*). Оскільки при максимальному значенні *h=a=0,1* в рівняннях (24) виникає ділення на нуль, зображення гвинтового коноїда (рис. 1, *б*) отримано при *h*=0,099.



а *б*

Рис. 1. Фронтальні проекції поверхні, описаної рівняннями (24) при a=0,1 м і різних значеннях h: *а* – катеноїд (h=0); *б* – гвинтовий коноїд (h=0,099)

При інших значеннях сталої *h* із проміжку *a>h≥0* можна отримати скільки завгодно проміжних положень. На рис. 2 побудовані деякі із них.



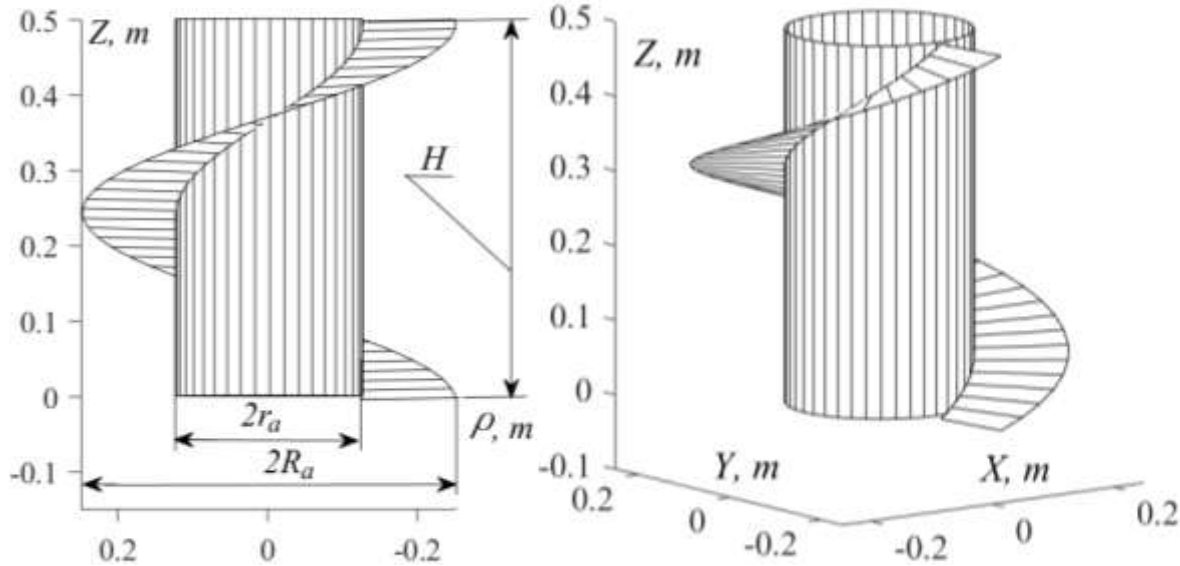
а *б* *в*

Рис. 2. Аксонометричне зображення проміжних положень поверхні (24) при згинанні катеноїда у гвинтовий коноїд при *a=0,1 м* і різних значеннях *h*: *а* – *h=0,03*; *б* – *h=0,06*; *в* – *h=0,09*

При такому згинанні сітка криволінійних координатних ліній залишається ортогональною, однією сім'єю яких є гвинтові лінії, а другою – ортогональні траєкторії до них. Коли катеноїд трансформується у гвинтовий коноїд (рис. 1, *а*), одна сім'я перетворюється у прямолінійні твірні (рис. 1, *б*).

Якби необхідно було отримати виток гвинтового коноїда, зображеного на рис. 1, *б*, коли внутрішньою крайкою є вісь коноїда, то деформувати потрібно було б катеноїд, зображений на рис. 1, *а*. Умовно його можна було б замінити зрізаним конусом, як показано на цьому рисунку. В такому випадку точна розгортка зрізаного конуса була б наближеною розгорткою витка коноїда. Однак значна величина відхилення поверхні катеноїда від поверхні конуса вказує на значні пластичні деформації, які виникатимуть при формуванні витка із плоскої заготовки. Можна було б спочатку сформувати поверхню катеноїда, а потім розтягувати її у виток, однак це потребує спеціального обладнання, наприклад штампа. Сучасні верстати можуть примусово формувати плоску заготовку у виток, здійснюючи при цьому необхідні пластичні деформації. Із наочного зображення процесу згинання катеноїда у гвинтовий коноїд, яке здійснено на основі точних розрахунків, можна зробити певні висновки і рекомендації.

При виготовленні шнеків внутрішньою кромкою поверхні є не пряма лінія, а гвинтова – лінія, вздовж якої виток приварюється до валу (рис. 3).



а *б*

Рис. 3. Один виток шнека: *а* – фронтальна проекція із вказаними розмірами; *б* – аксонометрія

В такому випадку вилучається поверхня всередині валу, тобто та частина поверхні катеноїда, яка знаходиться в його нижній частині. При такому обмеженні катеноїда частина, що залишилася, значно краще апроксимується зрізаним конусом. На рис. 4 відхилення поверхні конуса від поверхні катеноїда незначне (показане стрілкою). Це означає, що при формуванні розгортки конуса у виток гвинтового коноїда пластичні деформації теж будуть незначними.

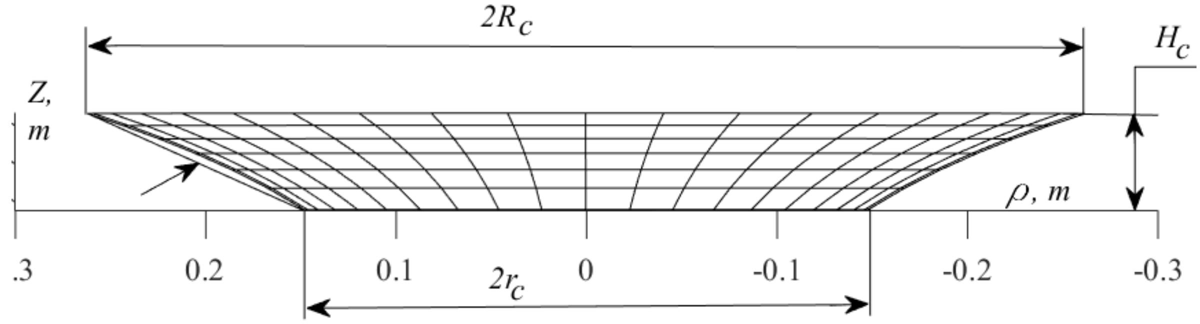


Рис. 4. Частина катеноїда, яка відповідає витку гвинтового коноїда на рис. 3

І взагалі, чим менша різниця між зовнішнім радіусом R_a і внутрішнім r_a, тим точнішою буде апроксимація відсіку катеноїда зрізаним конусом і, відповідно, менші пластичні деформації. Апроксимація також покращуватиметься, якщо різниця між радіусами R_a і r_a буде незмінною, але збільшуватиметься радіус r_a валу.

При малосерійному виготовленні витків шнека існує практика, коли зварені між собою плоскі кільця насаджують на вал і потім розтягують з допомогою лебідки. Згідно отриманих результатів розтягувати потрібно не плоске кільце, а сформований із нього зрізаний конус, або, принаймні, розтягування плоского кільця потрібно чергувати із його скручуванням навколо осі валу.

Необхідно знайти розміри зрізаного конуса, яким апроксимується катеноїд, за заданими розмірами витка шнека. Нехай його крок $H=0,5$ *м*. Звідси можна знайти сталу $a=H/(2\pi)=0,08$ *м*. Змінна ρ є дійсною величиною радіуса певної паралелі катеноїда. При зростанні гвинтового параметра h від нуля до a ця паралель перетворюється у гвинтову лінію, радіус ρ_a якої зменшується. Нам потрібно навпаки за радіусом ρ_a визначати ρ. Зв'язок між цими величинами встановлюється залежністю, яка входить до рівнянь (24) в ролі радіуса:

$$\rho_a = \sqrt{\rho^2 - h^2}. \qquad (25)$$

Залежність (25) стосується всіх поверхонь в процесі згинання. Цікавим є кінцевий результат згинання, тобто гвинтовий коноїд, який отримується при $h=a$. Отже в залежності (25) потрібно замінити h на a і знайти ρ:

$$\rho = \sqrt{\rho_a^2 + a^2}. \qquad (26)$$

Нехай виток обмежується двома гвинтовими лініями при $r_a=0,125$ *м* і $R_a=0,25$ *м* (рис. 3, *а*). Підстановка почергово цих двох значень у вираз (26) при знайденому раніше значенні $a=0,08$ дає змогу знайти величину радіусів двох основ зрізаного конуса: $r_c=0,148$ *м* і $R_c=0,262$ *м* (рис. 4). Залишилося знайти висоту H_c. Вона визначається із останнього рівняння (24) при $h=0$, що відповідає поверхні катеноїда. H_c буде різницею висот для меншої (r_c) і більшої (R_c) основ катеноїда. Результатом перетворень є вираз:

$$H_c = a \ln \frac{R_c + \sqrt{R_c^2 - a^2}}{r_c + \sqrt{r_c^2 - a^2}}. \tag{27}$$

За знайденими радіусами основ r_c і R_c із формули (27) можна отримати H_c*=0,05 м*. За знайденими розмірами зрізаного конуса можна визначити його точну розгортку, яка буде наближеною для витка гвинтового коноїда.

Отримані результати теоретичного згинання катеноїда у виток гвинтового коноїда можуть бути перенесені на реальний процес при умові, що товщина поверхонь не враховується. Однак для порівняно невеликої товщини поверхонь розрахунки можуть бути достатньо точними. Вони пояснюються тим, що при згинанні катеноїда у гвинтовий коноїд довжини ліній і площа поверхні в процесі теоретичного згинання не змінюються. Але для цього заготовкою для згинання повинен бути відсік катеноїда, який не має точної розгортки. Однак його можна замінити зрізаним конусом і цей конус дає уявлення, наскільки відсік катеноїда відрізняється від конуса, що продемонстровано на рис. 4. Завдяки такому підходу забезпечуються переваги знаходження заготовки для деформування її у виток гвинтового коноїда. Отримані результати дають можливість оцінювати точність апроксимації катеноїда зрізаним конусом для витків різного кроку і заданих діаметрів обмежувальних циліндрів, що неможливо для альтернативних існуючих способів знаходження наближеної розгортки.

Висновки. Із застосуванням методів диференціальної геометрії виведено параметричні рівняння поступового згинання поверхні обертання, якою є катеноїд, у виток гвинтового коноїда. Згинання здійснюється без розтягування або стискання поверхні поступовим збільшенням кроку від нуля до заданої величини. За отриманими рівняннями побудовано кінцеві і проміжні поверхні, що дає наочне уявлення про процес згинання. Отримані результати дали можливість оцінювати ступінь пластичних деформацій при формуванні наближеної плоскої заготовки у виток гвинтового коноїда. Їх величина залежить від того, наскільки відсік катеноїда відрізняється від зрізаного конуса, який його апроксимує. Точність апроксимації збільшується по мірі віддалення від осі катеноїда. Виведено розрахункові формули для отримання розмірів апроксимуючого зрізаного конуса за заданими параметрами витка гвинтового коноїда.

Література

1. Junge S., Zablodskiy M., Zaiets N., Chuenko R., Kovalchuk S. The screw-type electrothermomechanical converter as a source of multiphysical influence on the technological environment. *Machinery & Energetics*, 2023.Vol. 14(3), pp. 34 – 46. DOI: 10.31548/machinery/3.2023.34.
2. Mushtruk M., Gudzenko M., Palamarchuk I., Vasyliv V., Slobodyanyuk N.,

Kuts A., Nychyk O., Salavor O., Bober A. Mathematical modeling of the oil extrusion process with pre-grinding of raw materials in a twin-screw extruder. *Potravinarstvo Slovak Journal of Food Sciences*, 2020. Vol. 14, pp. 937 – 944. DOI: 10.5219/1436.

3. Zablodskiy M., Kovalchuk S., Gritsyuk V., Subramanian P. Screw electromechanical hydrolyzer for processing poultry by-products. *Machinery & Energetics*, 2023. Vol. 14(1), pp. 36 – 45. DOI: 10.31548/machinery/1.2023.36.
4. Romasevych Yu., Loveikin V., Malinevsky O. The method of calculating the maximum torque when jamming the auger of the screw conveyor. *Machinery & Energetics*, 2022. Vol. 13(2), pp. 83 – 90. DOI: 10.31548/machenergy.13(2).2022.83-90.
5. Trokhaniak O. Determination of optimal parameters of hinged operating elements of screw conveyers. *Machinery & Energetics*, 2023. Vol. 14(1), pp. 79 – 88. DOI: 10.31548/machinery/1.2023.79.
6. Клендій М. Б., Драган А. П. Обґрунтування конструкції робочого органа гвинтової секції комбінованого ґрунтообробного знаряддя. *Перспективні технології та прилади*, 2021. № 18, С. 66 – 72. DOI: 10.36910/6775-2313-5352-2021-18-10.
7. Кресан Т. Рух частинки ґрунту по поверхні розгортного гелікоїда з горизонтальною віссю обертання і заданим кутом атаки. *Machinery & Energetics*, 2021. Vol. 12(2), pp. 67 – 75. DOI: 10.31548/machenergy2021.02.067.
8. Pylypaka S., Hropost V., Kresan T., Hryshchenko I., Babka V. Calculation of the bending parameters of a flat workpiece into a twist of a helicoid torso. *Machinery & Energetics*, 2022. Vol. 13(4), pp. 81 – 88. DOI: 10.31548/machenergy.13(4).2022.81-88.

BENDING OF A SURFACE OF REVOLUTION INTO A HELICAL CONOID

Serhii Pylypaka, Andrii Nesvidomin, Victor Nesvidomin, Tetiana Volina, Vitalii Babka, Iryna Hryshchenko

The article explores the process of bending a catenoid into a helical conoid, which is significant for manufacturing of screws. A helical conoid (a straight closed helicoid) is formed by the helical motion of a line segment around an axis, with the segment intersecting the axis at a right-angle during motion. Such a surface cannot be bent into a plane; however, by gradually reducing the pitch, it can be transformed into a surface of revolution – a catenoid. During this deformation, the lengths of the lines and the area of the turn as a whole remain unchanged, meaning the deformation occurs similarly to developable surfaces. This deformation is based on the theory of surface bending. Any helical surface can be bent into a surface of revolution and vice *versa.*

The bending of the non-developable surface of a helical conoid into a catenoid is a classic example of differential geometry. Any surface of revolution can be bent into a helical surface. A surface relates to two families of coordinate lines, and a point on the surface is defined by the values of two curvilinear coordinates. If the meridian of the surface of revolution is given by an explicit equation, it can be described by parametric equations. This approach allows finding an approximate flat blank for manufacturing a screw turn.

It is proposed to approximate the obtained catenoid with a truncated cone. The development of the truncated cone will be the approximate development of the screw turn. These are the features of finding the approximate development, which in engineering practice is calculated using different formulas. The article presents parametric equations describing a one-parameter set of intermediate surfaces during the bending of a helical conoid by gradually reducing the pitch of the surface to zero.

Keywords: surface pitch, catenoid, truncated cone, approximation, approximate development.

References

1. Junge S., Zablodskiy M., Zaiets N., Chuenko R., Kovalchuk S. (2023). The screw-type electrothermomechanical converter as a source of multiphysical influence on the technological environment. *Machinery & Energetics*, 14(3), 34 – 46.
2. Mushtruk M., Gudzenko M., Palamarchuk I., Vasyliv V., Slobodyanyuk N., Kuts A., Nychyk O., Salavor O., Bober A. (2020). Mathematical modeling of the oil extrusion process with pre-grinding of raw materials in a twin-screw extruder. *Potravinarstvo Slovak Journal of Food Sciences*, 14, 937 – 944.
3. Zablodskiy M., Kovalchuk S., Gritsyuk V., Subramanian P. (2023). Screw electromechanical hydrolyzer for processing poultry by-products. *Machinery & Energetics*, 14(1), 36 – 45.
4. Romasevych Yu., Loveikin V., Malinevsky O. (2022). The method of calculating the maximum torque when jamming the auger of the screw conveyor. *Machinery & Energetics*, 13(2), 83 – 90.
5. Trokhaniak O. (2023). Determination of optimal parameters of hinged operating elements of screw conveyers. *Machinery & Energetics*, 14(1),79–88.
6. Klendii M. B., Drahan A. P. (2021). Substantiation of the design of the working body of the screw section of a combined soil-tilling tool. *Perspektyvni tekhnolohii ta prylady*, 18, 66 – 72 [in Ukrainian].
7. Kresan T. (2021). Motion of a soil particle on the surface of a developable helicoid with a horizontal axis of rotation and a given angle of attack. *Machinery & Energetics*, 12(2), 67 – 75 [in Ukrainian].
8. Pylypaka S., Hropost V., Kresan T., Hryshchenko I., Babka V. (2022). Calculation of the bending parameters of a flat workpiece into a twist of a helicoid torso. *Machinery & Energetics*, 13(4), 81 – 88.